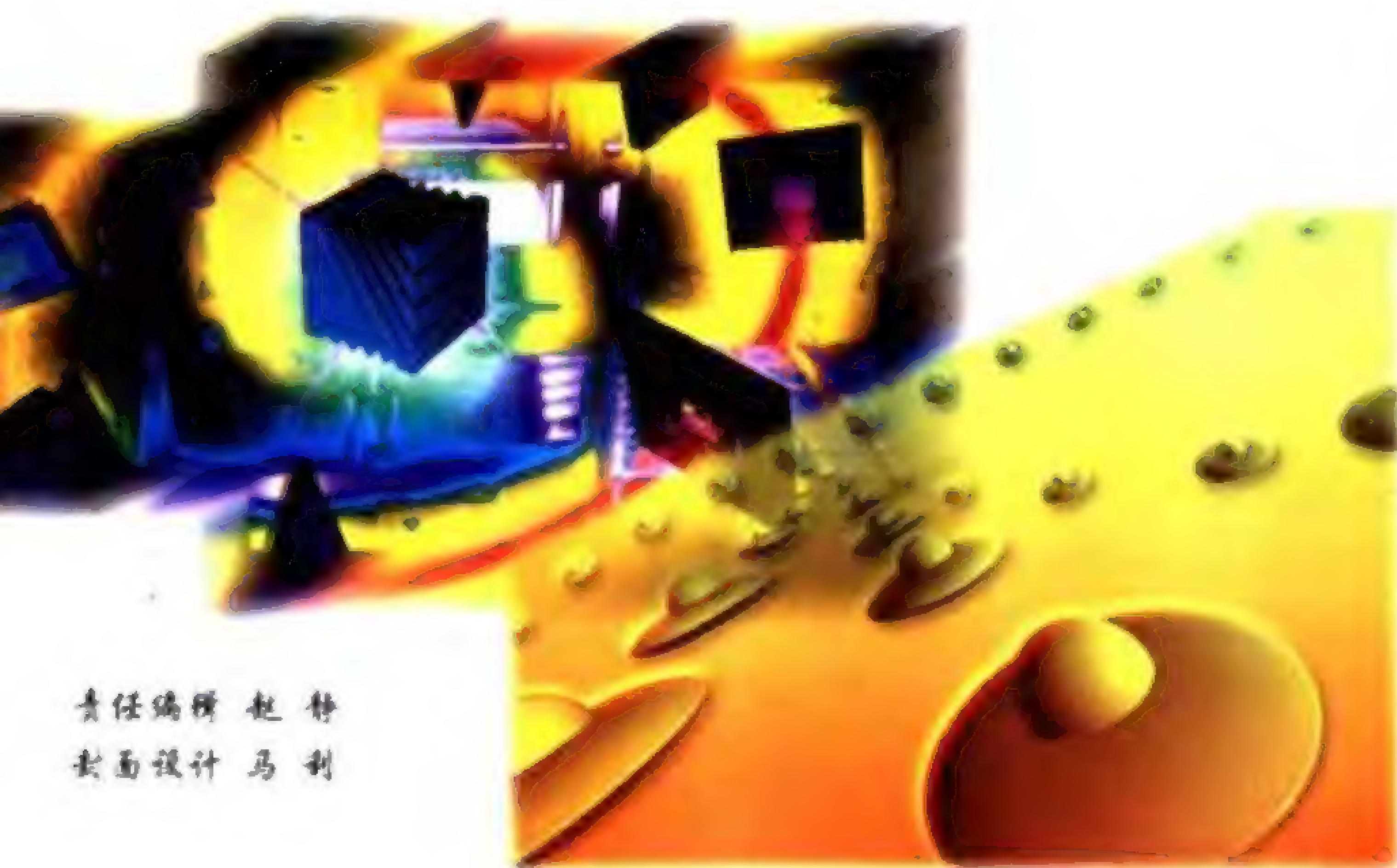
高等学校教材

# 电磁场与电磁波理论基础

北方交通大学 陈乃云 魏东北 李一玫 主编

中国铁道出版社

DIANCICHANG YU DIANCIBO LILUN JICHU



责任编辑 赵 静
封面设计 马 利

ISBN 7-113-04204-X

9 787113 042042 >

ISBN 7-113-04204-X/TP · 561
定 价: 31.10 元

高等学校教材

# 电磁场与电磁波理论基础

北方交通大学 陈乃云 魏东北 李一玫 编
北方交通大学 吴重庆 审

中 国 铁 道 出 版 社
2001年·北京

(京)新登字 063 号

**内 容 简 介**

本书对电磁场与电磁波的基本理论(包括狭义相对论)作了系统的介绍,推理严谨;特别针对学生感到疑难的问题作了详尽的讲解。书中反映了该领域的新进展,对电磁场基本方程的解法作了比较全面的介绍,并精心选编了一批习题,书末附有答案,便于所有具备高等数学基础的读者自学。取材跨度较大,以本科程度为主,并适用于函授生,部分内容适合研究生。

**图书在版编目(CIP)数据**

电磁场与电磁波理论基础/陈乃云等编. -北京:中国铁道出版社,2001.7
高等学校教材 ISBN 7-113-04204-X

Ⅰ.电… Ⅱ.陈… Ⅲ.①电磁场-高等学校-教材②电磁波-高等学校-教材 Ⅳ.0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 039040 号

书　　名:电磁场与电磁波理论基础
作　　者:北方交通大学　陈乃云　魏东北　李　玫
出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑:赵　静
特邀编辑:刘颖荪
封面设计:马　利
印　　刷:中国铁道出版社印刷厂
开　　本:787×1092　1/16　印张:23.25　字数:572 千
版　　本:2001 年 8 月第 1 版　　2001 年 8 月第 1 次印刷
印　　数:1~3 000 册
书　　号:ISBN 7-113-04204-X/TP·561
定　　价:31.10 元

# 前　言

本书是北方交通大学"十五"教材出版计划要出版的教材之一，也是教学改革的产物。为了把国内外的技术和学术进展、精辟的见解和分析传播给学生，需要一本新的适用于电子、通信类专业的电磁理论基础课教材，以便使经典理论联系现代的实际。同时，我们也希望通过本书表达出我们在教学实践中所产生的新想法，在理论的探讨和本校重点研究的领域中所获得的新认识，并贯彻学校的教改精神。

本书的编写，一方面特别注重理论的严密和完整，另一方面也注重讲清概念的物理本质，联系工程实际；通过打好理论基础，增强学生的广泛适应性。编写的思路和所做的工作主要如下：

"场"的部分首先是加强了场论的阐述，使之更加严密、条理化（例如关于矢量场无旋或有势的充分必要条件等问题的讨论），特别是深入浅出、形象化地讲明了学生往往感到抽象的概念和定理的物理含义；注重基本概念，强调了矢量微分算子这一工具的使用，并在附录中对正文里未证明的矢量积分恒等式都作了证明。

静态场的讲法是以场论为纲从数学上概括物理的场，而电、磁场则作为场论的物理实例；同时在场论的亥姆霍兹定理一节便提出了麦克斯韦方程组，强调指出了电、磁场的不可分割，因而每种静态场又是统一的时变电磁场的特例，同时也把静态场同准静态场的模型作了比较。而为了便于学习，减少困难，仍然按静电场（第 2 章）、恒定电场（第 3 章）、恒定磁场（第 4 章）的顺序分别介绍，并把第 3、4 章与第 2 章对应地介绍；其中也包括了一些较深入的讨论，例如关于电（磁）多极矩，关于矢量位和标量位，恒定电场分布的确定，电荷弛豫，内自感，场的能量和力等，并收入了图解法等工程上实用的解法，这样来达到对"场"的部分既浓缩又提高的目的。

第 5 章边值问题中包括了很有工程用途的施瓦尔兹变换，并详细讲解和演示了格林函数法这一对求解非齐次偏微分方程和建立积分方程有广泛用途的解析方法。

第 6 章在总结静态场基本方程的基础上进而导出了时变场的基本方程——麦克斯韦方程组，并对其限定形式做了深入的阐述；在介绍时变场的同时也介绍了电磁波的一般概念；在分别介绍了场量的、动态位的波动方程之后，随即详细讨论了齐次、非齐次标量波动方程的基本解法。对于非齐次波动方程，除了用格林函数求解，还采用了求解时域非齐次波动方程的克希霍夫积分法的思路来求解时谐场。最后，简单介绍了在时域直接求解麦克斯韦方程组的时域有限差分法这一适合于处理各种复杂的时变场的数值方法，以便有进一步兴趣的读者对电磁场的基本方程和解法有一个较全面的了解，并为第 7、8、9 章的分析作好数学准备。

作为第 6 章介绍的齐次波动方程在一维（也包括三维）、直角坐标、无界空间条件下的解，第 7 章专门介绍了平面波。为了加强"波"的基本知识，提供了较充分的例题、习题，并对"群速"的概念作了新的阐述。

第 8 章则在各种波导的媒质和边界条件下，从第 6 章齐次波动方程的通解中进一步导出该种波导中的模式场。本章对波导装置的分类和介绍主要着眼于物理现象和数学解法上的不同，不侧重于具体的波导管设备，而是对光纤技术所带来的新知识和概念作了较详细的讨论，也介绍了一些其他的新进展。

第 9 章在第 6 章得到的非齐次波动方程的积分解式的基础上导出了滞后位和克希霍夫公式，就稳态简谐波的情形对天线辐射场作了清晰的讲解。

在国内外有关论述的基础上，第 10 章对狭义相对论作了深入浅出的介绍。

本书还对教学中遇到的一些问题给出了一种明确的看法或解释，例如亥姆霍兹定理所说的唯一性与静电场唯一性定理的关系，静电场的唯一性定理与时变场唯一性定理的比较；场论中的矢量恒等式对时变场的适用性；关于多导体系统的电容，静电比拟的条件等等，并对一些公式、定律和结论给出了自己的证明；分析和论述中专门针对了学习本课程时可能出现的疑问。

本书精心选择和自编了较充足的例、习题，对没有解答的题目都作了解答，且尽可能联系这些题目的物理、工程背景。

本书第 1、2、3、4、6、8 章、5.7 节等以及附录由陈乃云编写，第 5(5.1～5.6,5.8 节)7、10 章由魏东北编写，第 9 章由李一玫编写，全书由陈乃云统稿。

吴重庆教授对全书作了仔细的审阅和修改，还亲自写了 7.8 节“群速”以及限定形式的麦克斯韦方程组、“导行波”的前言、最低阶混合模式、关于波的极化等段落，并对旋度公式等作了新的证明。

最后，感谢北方交通大学谈振辉校长促成了本书的编写和出版，并对本书提出了明确的要求；感谢北方交通大学电子学院的有关领导以及支持和帮助过这项工作的各位老师。

受编者水平所限，不足之处必然存在，诚恳欢迎批评、指正。

编者

2001 年 2 月

# 目　　录

# 第1章　矢量分析　场论初步

场论是把各种物理的场在数学上抽象成矢量场和标量场来研究,它不仅可以使我们对电场、磁场的认识升华一步,也是进入连续媒质力学(流体、固体力学)、量子力学、热传导、质量传递等领域的数学基础。而矢量运算,特别是矢量微分算子的运用,是分析场的不可缺少的、有力的数学工具。

## 1.1　矢量场和标量场

场,顾名思义,要占据一个空间。如果在我们讨论的空间中的每一点都对应着某个物理量(叫作场量)的一个确定的值,就说在这个空间里确定了该物理量的一个场。

若场量为标量,该场为标量场。温度场 $T(x,y,z)$、密度场 $\rho(x,y,z)$、位(势)场 $u(x,y,z)$等等,都是标量场的例子。

若场量为矢量,该场为矢量场。速度场 $\boldsymbol{v}(x,y,z)$和力场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$(如引力场 $\boldsymbol{G}$,电场强度 $\boldsymbol{E}$,磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 等等)都是矢量场。

若场量仅仅是空间或点的函数,而与时间无关,则称为静态场或恒定场;

若场量不仅是点的函数,还是时间 $t$ 的函数,则称为动态场或时变场。

从数学的角度来说,场就是一个三(四)元函数,不过这三元特指的是点的空间坐标(第四元特指时间)。可以说,场就是代表场中每一点的某种物理性质的场量的无穷集合。并且,除开有限个点、线和面外,场量是处处连续、可微的。

一个矢量可以分解为沿着坐标轴的三个分量,例如在直角坐标系中:

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \boldsymbol{a}_x F_x(x,y,z) + \boldsymbol{a}_y F_y(x,y,z) + \boldsymbol{a}_z F_z(x,y,z)$$

所以,一个矢量场对应着三个标量场。同一个空间,可以认为是矢量场 $\boldsymbol{F}$,也可以认为是标量场 $F_x$,$F_y$ 或$F_z$,看我们感兴趣的是哪个量。注意,分量 $F_x$ 表示它是$x$ 方向的分量,但并不一定仅是 $x$ 的一元函数,而仍然是一个三元函数 $F_x(x,y,z)$,因为每个分量的大小一般是随空间点而变的。

本书中矢量均用黑体字表示,例如场量 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_A A$,其中 $\boldsymbol{a}_A$ 表示矢量$\boldsymbol{A}$ 方向上的单位矢量,$A$ 表示$\boldsymbol{A}$ 的模。

矢量场在空间的走向和分布可以用矢线(也叫力线或流线)来描述,矢线上每一点处的切线应当恰是该点处场量的方向,如图 1-1(a)所示。

由于三(二)维空间只能画出二(一)元函数的图像,所以作为三元函数的场量的大小只能用间接的办法表示。对于矢量场,$\boldsymbol{A}$ 的大小用矢线的疏密来间接表示(这一点将在1.3和2.7节详述);对于标量场 $u(x,y,z)$的值,是用等值面来间接表示。等值面就是函数值 $u(x,y,z)$相等的点所构成的曲面,如图 1-1(b)所示。等值面画在二维平面上就是等值线。例如我们在地图册上常见到的等温线、等压线、等高线[图 1-1(c)],等等。

需要指出,场论所涉及的是场作为空间的、而不是时间的函数的性质(在无须考虑相对论

的时—空关系的通常场合，可认为这两方面互不影响)，场量在空间的分布、变化规律与场源的关系，场量对空间坐标的微分(各种体积导数)、积分及其有关的矢量恒等式、积分定理；但这些矢量恒等式、积分定理对于时变场的每一瞬间也是成立的。

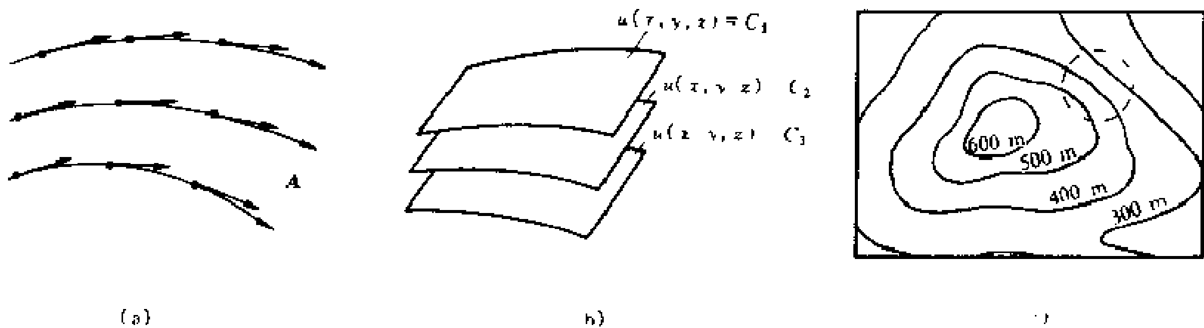



图 1-1　矢量场与标量场

(a)矢量场的矢线；(b)标量场的等值面；(c)等高线

## 1.2　正交曲线坐标系

场是空间中的点的函数，因而我们首先要描述三维空间中点的位置。下面介绍几种常用的空间坐标系。正如两条(族)正交曲线可以定位平面上的(任)一点，三张(族)正交曲面则可定位空间中的(任)一点。

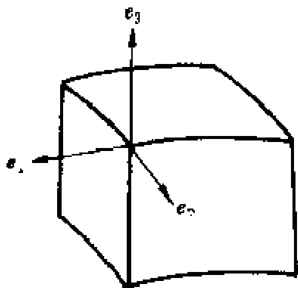



图 1-2　正交曲线坐标系

由于三张正交曲面必定交出三条正交曲线，如同直角坐标系的三条轴那样，故而统称正交曲线坐标系，如图 1-2 所示。目前实际应用中有直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系、椭圆柱坐标系、抛物柱坐标系、抛物面坐标系、旋转抛物面坐标系、长旋转椭球坐标系、扁旋转椭球坐标系、圆锥坐标系、椭球坐标系、双球坐标系、环坐标系等 13 种正交曲线坐标系。其中前三种是最简单的特例，也是本书中用到的三种坐标系。由于直角坐标系是大家最为熟悉的，下面仅介绍其余的两种坐标系。

### 一、圆柱坐标系

圆柱坐标系如图 1-3 所示，由我们熟悉的平面极坐标$(\rho,\varphi)$在平面的垂直方向增加一个自由度 $z$ 而构成：

$\rho\in[0,+\infty)$　　表示点到 $z$ 轴的垂直距离；

$\varphi\in[0,2\pi)$　　表示任一子午面(以 $z$ 轴为边界的半平面)与正 $x$ 轴所在的子午面的夹角，与 $z$ 轴正向成右手螺旋关系[见图 A1-3(b)]时为正角；

$z\in(-\infty,+\infty)$　同直角坐标。

$\rho$ 的等值面如同“圆筒壁”，$\varphi$ 的等值面为子午面，$z$ 的等值面为 $xy$ 面的平行平面。这三张面交出的三条“轴”上的单位矢量为 $\boldsymbol{a}_\rho$、$\boldsymbol{a}_\varphi$、$\boldsymbol{a}_z$。显然，除了 $\boldsymbol{a}_z$、$\boldsymbol{a}_\rho$ 和 $\boldsymbol{a}_\varphi$ 的方向都是随点而变

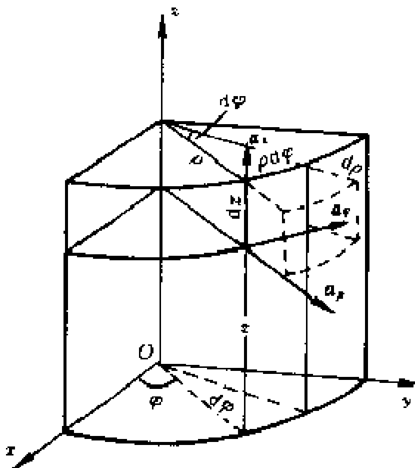



图 1-3　圆柱坐标系

的，因而形成"活动三角架"。这三条"轴"的正方向之间应构成右旋系统，也称右旋关系（即右手螺旋关系）：

$$\boldsymbol{a}_\rho\times\boldsymbol{a}_\varphi=\boldsymbol{a}_z,\quad \boldsymbol{a}_\varphi\times\boldsymbol{a}_z=\boldsymbol{a}_\rho,\quad \boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{a}_\rho=\boldsymbol{a}_\varphi$$

且在同一点处的 $\boldsymbol{a}_\rho$、$\boldsymbol{a}_\varphi$、$\boldsymbol{a}_z$ 构成正交矢量组：

$$\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\rho=\boldsymbol{a}_\varphi\cdot\boldsymbol{a}_\varphi=\boldsymbol{a}_z\cdot\boldsymbol{a}_z=1$$

$$\boldsymbol{a}_\rho\cdot\boldsymbol{a}_\varphi=\boldsymbol{a}_\varphi\cdot\boldsymbol{a}_z=\boldsymbol{a}_z\cdot\boldsymbol{a}_\rho=0$$

一般，每一种正交曲线坐标系的坐标轴 $e_1,e_2,e_3$ 的正向之间都应构成右旋系统（见图 1-2）：

$$\boldsymbol{a}_{e_1}\times\boldsymbol{a}_{e_2}=\boldsymbol{a}_{e_3},\quad \boldsymbol{a}_{e_2}\times\boldsymbol{a}_{e_3}=\boldsymbol{a}_{e_1},\quad \boldsymbol{a}_{e_3}\times\boldsymbol{a}_{e_1}=\boldsymbol{a}_{e_2}$$

例如，在直角坐标系中，$x,y,z$ 轴的正向之间应构成右旋系统：

$$\boldsymbol{a}_x\times\boldsymbol{a}_y=\boldsymbol{a}_z,\quad \boldsymbol{a}_y\times\boldsymbol{a}_z=\boldsymbol{a}_x,\quad \boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{a}_x=\boldsymbol{a}_y$$

圆柱坐标与直角坐标间的换算关系为

$$\begin{aligned} x&=\rho\cos\varphi & \rho&=\sqrt{x^2+y^2}\\ y&=\rho\sin\varphi & \tan\varphi&=y/x \end{aligned}\tag{1.2.1}$$

单位矢量间的换算，即方向的换算关系为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_\rho&=\boldsymbol{a}_x\cos\varphi+\boldsymbol{a}_y\sin\varphi\\ \boldsymbol{a}_\varphi&=-\boldsymbol{a}_x\sin\varphi+\boldsymbol{a}_y\cos\varphi \end{aligned}\right\}\quad \left\{\begin{aligned} \boldsymbol{a}_x&=\boldsymbol{a}_\rho\cos\varphi-\boldsymbol{a}_\varphi\sin\varphi\\ \boldsymbol{a}_y&=\boldsymbol{a}_\rho\sin\varphi+\boldsymbol{a}_\varphi\cos\varphi \end{aligned}\right.\tag{1.2.2}$$

这些换算式不难通过解代数方程组或几何作图得到。

从(1.2.2)式也可看出，$\boldsymbol{a}_\rho$、$\boldsymbol{a}_\varphi$ 虽然模恒为 1，是定模矢量，但都不是常矢量（因为它们的方向随 $\varphi$ 变化），而是 $\varphi$ 的函数，从而可以对 $\varphi$ 求导而得到

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\boldsymbol{a}_\rho}{\partial\varphi}&=-\boldsymbol{a}_x\sin\varphi+\boldsymbol{a}_y\cos\varphi=\boldsymbol{a}_\varphi\\ \frac{\partial\boldsymbol{a}_\varphi}{\partial\varphi}&=-\boldsymbol{a}_x\cos\varphi-\boldsymbol{a}_y\sin\varphi=-\boldsymbol{a}_\rho \end{aligned}\right\}\tag{1.2.3}$$

任一点$(\rho,\varphi,z)$处的场矢量 $\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z)$可以分解到该点处的三条圆柱坐标"轴"上去：

$$\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z)=\boldsymbol{a}_\rho A_\rho(\rho,\varphi,z)+\boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi(\rho,\varphi,z)+\boldsymbol{a}_z A_z(\rho,\varphi,z)$$

也可以分解到非圆柱坐标轴上去。描述场量的坐标系和描述点的位置的坐标系不一定要相同，如习题 1.9。还需要指出，在非直角坐标系中，由于空间不同点处坐标"轴"的方向不同（直线坐标轴除外），故而场矢量之间相加、相乘有时需要先转换到直角坐标系去。

场的许多公式、定理是与坐标系无关的，因而常常需要把空间点表示成与坐标系无关的形式，这就是点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$。它定义为从原点指向某点的矢量，其模等于该点到坐标原点的距离。显然，空间点的集合是与 $\boldsymbol{r}$ 的集合一一对应的，于是点的函数——场量就可表示为 $\boldsymbol{r}$ 的函数：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，$u(\boldsymbol{r})\cdots$，在需要的时候再将其展开为具体坐标系下的形式。显然，在直角坐标下 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\boldsymbol{a}_z z$，在圆柱坐标下 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_\rho\rho+\boldsymbol{a}_z z$。可见，除了在直角坐标下，位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的表达式中并不直接反映出某点的所有位置坐标，例如 $\boldsymbol{r}$ 的 $\varphi$ 坐标隐含在 $\boldsymbol{a}_\rho$ 的方向中。

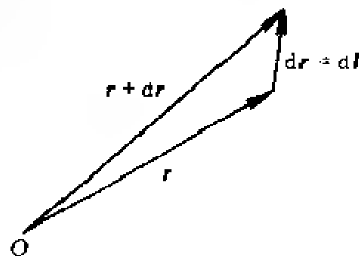


图 1-4 位移矢量或线元矢量

此外，线元矢量或点在空间的位移矢量 $d\boldsymbol{l}$ 也可用位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的微分，即 $\boldsymbol{r}$ 的微增量 $d\boldsymbol{r}$ 来表示，见图 1-4。由上所述，圆柱坐标系中 $\boldsymbol{r}$ 是 $\rho$，$z$ 和 $\varphi$ 的三元函数，因为 $\boldsymbol{a}_\rho$ 是 $\varphi$ 的函数。利用复合函数微分法及(1.2.3)式求 $\boldsymbol{r}$ 的全微分，可得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \mathrm{d}(\boldsymbol{a}_{\rho}\rho + \boldsymbol{a}_z z) \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\mathrm{d}z \\
&= \boldsymbol{a}_{\rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_{\rho}}{\mathrm{d}\varphi}\rho\mathrm{d}\varphi + \boldsymbol{a}_z\mathrm{d}z \\
&= \boldsymbol{a}_{\rho}\mathrm{d}\rho + \boldsymbol{a}_{\varphi}\rho\mathrm{d}\varphi + \boldsymbol{a}_z\mathrm{d}z = \mathrm{d}\boldsymbol{l}
\end{aligned}
\tag{1.2.4}
$$

上式表明,一个空间的线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在圆柱坐标系的三条“轴”上的投影(分量)分别是 $\mathrm{d}\rho$,$\rho\mathrm{d}\varphi$,$\mathrm{d}z$,它们是每一维上的长度元。有了这些“边长”,再计算三个圆柱坐标面上的面积元和圆柱坐标系中的体积元就很方便了。分别与 $\boldsymbol{a}_{\rho}$,$\boldsymbol{a}_{\varphi}$,$\boldsymbol{a}_z$ 垂直的三个面元为

$$
\mathrm{d}S_{\rho} = \rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \qquad \mathrm{d}S_{\varphi} = \mathrm{d}\rho\mathrm{d}z \qquad \mathrm{d}S_z = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \tag{1.2.5}
$$

体积元为

$$
\mathrm{d}\tau = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z
$$

在非直角坐标系中,每个坐标的微分并不都是线度(长度),每一维上的长度元与坐标的微分之比称为度量系数,它也就是坐标的微分(如 $\mathrm{d}\varphi$)换算成长度元($\rho\mathrm{d}\varphi$)时应乘的系数($\rho$)。由(1.2.4)式,圆柱坐标系的度量系数应为

$$
h_1 = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\rho} = 1 \qquad h_2 = \frac{\rho\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = \rho \qquad h_3 = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} = 1 \tag{1.2.6}
$$

各种不同坐标系是以其度量系数为特征的,并可以由三个度量系数来完整地描述。只要将 $h_1$,$h_2$,$h_3$ 具体化为各种特殊形式,就可引出各种特殊的正交坐标系。一般,对任一个正交曲线坐标系,有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{l} &= \boldsymbol{a}_{e_1}h_1\mathrm{d}e_1 + \boldsymbol{a}_{e_2}h_2\mathrm{d}e_2 + \boldsymbol{a}_{e_3}h_3\mathrm{d}e_3 \\
\mathrm{d}S_{e_1} &= h_2h_3\mathrm{d}e_2\mathrm{d}e_3 \\
\mathrm{d}S_{e_2} &= h_3h_1\mathrm{d}e_3\mathrm{d}e_1 \\
\mathrm{d}S_{e_3} &= h_1h_2\mathrm{d}e_1\mathrm{d}e_2 \\
\mathrm{d}\tau &= h_1h_2h_3\mathrm{d}e_1\mathrm{d}e_2\mathrm{d}e_3
\end{aligned}
\tag{1.2.7}
$$

当场量的大小只与场点到 $z$ 轴的垂直距离有关,即场的分布呈圆柱面对称时,如果采用圆柱坐标来表示场量,就只需 $\rho$ 一个坐标,这显然比在直角坐标下处理多元变量要简便。

### 二、球坐标系

球坐标的构成为:

$r\in[0,+\infty)$ 表示点到球心的距离;

$\theta\in[0,\pi]$ 是任一射线与 $z$ 轴(极轴)正方向的夹角,起“纬度”的作用;

$\varphi\in[0,2\pi]$ 同圆柱坐标,起“经度”的作用。

$r$ 的等值面为同心球面,$\theta$ 的等值面是以极轴为轴线的圆锥面,$\varphi$ 的等值面为子午面。这三张正交曲面交出的三条轴的正方向之间应构成右旋系统:

$$
\boldsymbol{a}_r \times \boldsymbol{a}_{\theta} = \boldsymbol{a}_{\varphi}, \quad \boldsymbol{a}_{\theta} \times \boldsymbol{a}_{\varphi} = \boldsymbol{a}_r, \quad \boldsymbol{a}_{\varphi} \times \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_{\theta}
$$

作为正交矢量组,在同一点处有:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{a}_{\theta} \cdot \boldsymbol{a}_{\theta} = \boldsymbol{a}_{\varphi} \cdot \boldsymbol{a}_{\varphi} = 1 \\
\boldsymbol{a}_r \cdot \boldsymbol{a}_{\theta} = \boldsymbol{a}_{\theta} \cdot \boldsymbol{a}_{\varphi} = \boldsymbol{a}_{\varphi} \cdot \boldsymbol{a}_r = 0
\end{aligned}
$$

如图 1-5 所示，球坐标与直角坐标之间的换算式为

$$\left.\begin{aligned} x&=r\sin\theta\cos\varphi & r&=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ y&=r\sin\theta\sin\varphi & \tan\theta&=\sqrt{x^2+y^2}/z\\ z&=r\cos\theta & \tan\varphi&=y/x \end{aligned}\right\} \tag{1.2.8}$$

单位矢量之间的换算关系为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_r&=\boldsymbol{a}_x\sin\theta\cos\varphi+\boldsymbol{a}_y\sin\theta\sin\varphi+\boldsymbol{a}_z\cos\theta\\ \boldsymbol{a}_\theta&=\boldsymbol{a}_x\cos\theta\cos\varphi+\boldsymbol{a}_y\cos\theta\sin\varphi-\boldsymbol{a}_z\sin\theta\\ \boldsymbol{a}_\varphi&=-\boldsymbol{a}_x\sin\varphi+\boldsymbol{a}_y\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{1.2.9}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_x&=\boldsymbol{a}_r\sin\theta\cos\varphi+\boldsymbol{a}_\theta\cos\theta\cos\varphi-\boldsymbol{a}_\varphi\sin\varphi\\ \boldsymbol{a}_y&=\boldsymbol{a}_r\sin\theta\sin\varphi+\boldsymbol{a}_\theta\cos\theta\sin\varphi+\boldsymbol{a}_\varphi\cos\varphi\\ \boldsymbol{a}_z&=\boldsymbol{a}_r\cos\theta-\boldsymbol{a}_\theta\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.2.10}$$

球坐标系中的单位矢量也都不是常矢量，其方向是随点而变的，是$\theta$和$\varphi$的函数。我们对(1.2.9)式求导，得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\boldsymbol{a}_r}{\partial\theta}&=\boldsymbol{a}_\theta & \frac{\partial\boldsymbol{a}_r}{\partial\varphi}&=\boldsymbol{a}_\varphi\sin\theta\\ \frac{\partial\boldsymbol{a}_\theta}{\partial\theta}&=-\boldsymbol{a}_r & \frac{\partial\boldsymbol{a}_\theta}{\partial\varphi}&=\boldsymbol{a}_\varphi\cos\theta\\ \frac{\partial\boldsymbol{a}_\varphi}{\partial\theta}&=0 & \frac{\partial\boldsymbol{a}_\varphi}{\partial\varphi}&=-\boldsymbol{a}_r\sin\theta-\boldsymbol{a}_\theta\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.2.11}$$

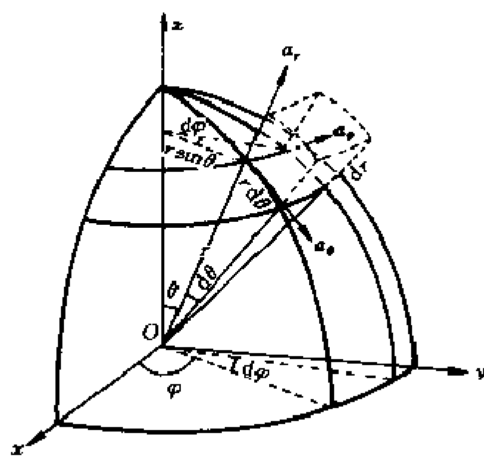


图 1-5　球坐标系

任一点$(r,\theta,\varphi)$处的场矢量$\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)$可分解到该点处的三条球坐标“轴”上去：

$$\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)=\boldsymbol{a}_rA_r(r,\theta,\varphi)+\boldsymbol{a}_\theta A_\theta(r,\theta,\varphi)+\boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi(r,\theta,\varphi) \tag{1.2.12}$$

位置矢量在球坐标下具有最简的形式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_r r$$

由于$\boldsymbol{a}_r=\boldsymbol{a}_r(\theta,\varphi)$，故$\boldsymbol{r}$实为$r,\theta,\varphi$的三元函数。其全微分为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi\\ &=\boldsymbol{a}_r\mathrm{d}r+\boldsymbol{a}_\theta r\mathrm{d}\theta+\boldsymbol{a}_\varphi r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\\ &=\mathrm{d}\boldsymbol{l} \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

可见球坐标中每一维的长度元（空间线元$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$在三个轴上的投影）分别为$\mathrm{d}r$、$r\mathrm{d}\theta$、$r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$。度量系数为

$$h_1=1\qquad h_2=r\qquad h_3=r\sin\theta \tag{1.2.14}$$

在球坐标的三个坐标面即$r$、$\theta$、$\varphi$的等值面上的面元（它们分别垂直于$\boldsymbol{a}_r$、$\boldsymbol{a}_\theta$、$\boldsymbol{a}_\varphi$）分别为

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}S_r&=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\ \mathrm{d}S_\theta&=r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\\ \mathrm{d}S_\varphi&=r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \end{aligned}\right\} \tag{1.2.15}$$

体积元为　　$\mathrm{d}\tau=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$

如果场的分布呈球面对称，即场量大小只与场点到球心的距离有关时，采用球坐标将使得场量

的表示只需用 $r$ 一元坐标。

## 1.3 矢量场的通量和散度　散度定理

### 1. 矢量场的通量

描述矢量场的性质的一个重要的量是矢量的通量(flux)。一个最熟悉的例子就是水流过其截面上任一块面积的流量,它就是水的流速场 $\boldsymbol{v}$(m/s)穿过曲面 $S(\mathrm{m}^2)$的通量($\mathrm{m}^3$/s)。这个通量的大小显然是同 $S$ 的法线 $\boldsymbol{n}$ 相对于 $\boldsymbol{v}$ 的倾角 $\theta$ 有关的(图 1-6)。面元的法线指垂直于该面元的一单位长的矢量。

为了严格地定义矢量的通量,我们作如下一系列的定义:

(1)面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 指大小为面元面积 $\mathrm{d}S$,方向为面元法线 $\boldsymbol{n}$ 的矢量。

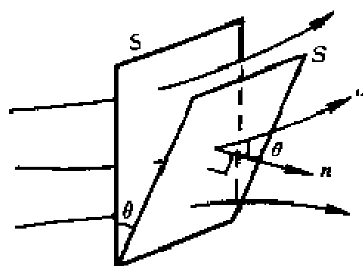
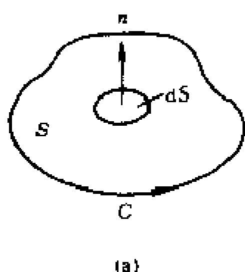



图 1-6　流速场 $\boldsymbol{v}$ 穿过曲面 $S$ 的通量



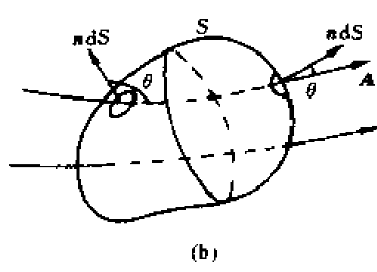




图 1-7　面元法线 $\boldsymbol{n}$
(a)开表面的面元法线;
(b)闭合面的外法线,穿过闭合面的通量。

对于开表面,规定 $\boldsymbol{n}$ 的正方向与面元边界线 $C$ 的绕向成右旋关系[图 1-7(a)]。

对于闭合面,规定 $\boldsymbol{n}$ 的正方向指向闭合面外[图 1-7(b)]。作为一个矢量,$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 同样可分解为所采用的坐标系下的三个分量,它们恰是 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 在三个坐标平面上的投影(图 1-8)。以直角坐标系为例,根据 $\boldsymbol{n}$ 与 $x,y,z$ 轴正向夹锐角或钝角,$\mathrm{d}S_x,\mathrm{d}S_y,\mathrm{d}S_z$ 或正或负。这是因为 $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,故

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\{\mathrm{d}S\cos\alpha,\mathrm{d}S\cos\beta,\mathrm{d}S\cos\gamma\}$$
$$=\{\mathrm{d}S_x,\mathrm{d}S_y,\mathrm{d}S_z\}$$

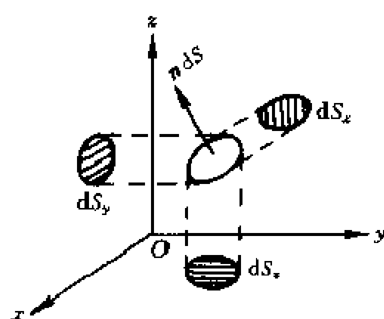



图 1-8　直角坐标系中面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的三个分量

(2)场量 $\boldsymbol{A}$ 穿过面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的通量为

$$\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=A\cos\theta\mathrm{d}S$$

(3)场量 $\boldsymbol{A}$ 穿过开曲面 $S$ 的通量为

$$\begin{aligned}\int_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S A\cos\theta\mathrm{d}S&=\int_{S_x}A_x\mathrm{d}S_x+\int_{S_y}A_y\mathrm{d}S_y+\int_{S_z}A_z\mathrm{d}S_z\\&=\int_{S_\rho}A_\rho\mathrm{d}S_\rho+\int_{S_\varphi}A_\varphi\mathrm{d}S_\varphi+\int_{S_z}A_z\mathrm{d}S_z\\&=\int_{S_r}A_r\mathrm{d}S_r+\int_{S_\theta}A_\theta\mathrm{d}S_\theta+\int_{S_\varphi}A_\varphi\mathrm{d}S_\varphi\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

(4)场量 $\boldsymbol{A}$ 穿过闭合面 $S$ 的通量为

$$\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S A\cos\theta\mathrm{d}S\tag{1.3.2}$$

一般来说，在每种坐标系下，$\int_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 都对应着三个沿坐标面的积分(第二型曲面积分)，如(1.3.1)式所示。

(1.3.2)式表示 $\boldsymbol{A}$ 穿出包面 $S$ 的净通量。给面元设置法线如同给空间曲面规定了“正反面”，意味着矢量由反面流向正面的通量为正，反之为负。(面对面积的曲面积分—第一型曲面积分则没有正反面之分。)由于闭合面 $S$ 法线正向朝外，$S$ 的外(内)侧面就是“正面”(“反面”)，流出(入)包面的通量就应为正(负)，这是因为矢线流出(入)时 $\theta$ 必为锐(钝)角，见图 1-7(b)。以液体流速场为例，(1.3.2)式为正时，表明流出多于流入，净流量为正，因而包面 $S$ 内必有“喷泉”(正的源)。反之，(1.3.2)式为负，表明闭合面内必有“漏口”(负的源也称“汇”)。如果(1.3.2)式为零，则表明 $S$ 内无源。这种源也被称为散度源或通量源。

矢量场中规定矢线的画法是每根代表一单位的通量，因面穿过某曲面 $S$ 的矢线越多表示通量越大。因此，若包面内有“喷泉”，则从包面内会增发出矢线；若有“漏口”，则会有矢线终止在包面内；若包面内无源、有矢线穿过时，其根数不变。

另外，由上面的定义 2，若某点处 $A$ 越大，穿过 $\mathrm{d}S$ 的通量就越大，于是同样的面积 $\mathrm{d}S$ 上穿过的矢线根数就越多。故而矢线的上述规定画法使得矢线的密集程度与场 $\boldsymbol{A}$ 的强度或大小($A$)成正比。

**例 1.1** 有一个与场点到原点的距离成正比的辐射状矢量场 $k\boldsymbol{r}$($k$ 为常数)，计算它穿过一个以原点为球心，半径为 $a$ 的上半球面与 $z=0$ 的平面构成的闭合面 $S$ 的通量。

**解** 由于“底面”$z=0$ 上的外法线 $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{a}_z$，故“底面”上处处有 $\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-kr\boldsymbol{a}_r\cdot \boldsymbol{a}_z \mathrm{d}S=0$，因而只须计算半球面 $S_r$ 上的通量。因为球面是 $k\boldsymbol{r}$ 的等值面 $ka$，$k\boldsymbol{r}$ 的方向又处处垂直于球面元而与球面元的法线 $\boldsymbol{n}$ 同方向，故有

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{S_r} k\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=ka\int_{S_r}\mathrm{d}S=ka2\pi a^2=2\pi ka^3$$

这说明球面内必有源。

**例 1.2** 已知矢量场 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_\rho(\mathrm{e}^{-\alpha\rho}/\rho)+\boldsymbol{a}_z\cos\pi z$，$\alpha$ 为常数。有一个以 $z$ 轴为轴线、半径为 2 的单位长度的圆柱面与 $z=0$、$z=1$ 的平面构成的闭合面 $S$，求 $\boldsymbol{A}$ 穿过 $S$ 的通量。

**解** 根据(1.2.5)式，柱面元为 $\mathrm{d}S_\rho=\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$，故穿过圆柱侧面 $S_\rho$ 的通量为

$$\int_{S_\rho}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{S_\rho}A_\rho \mathrm{d}S_\rho=\int_{S_\rho}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha\rho}}{\rho}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\mathrm{e}^{-2\alpha}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{e}^{-2\alpha}$$

穿过上底面 $z=1$ 的通量为

$$\int_{S_1}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{S_1}A_z\boldsymbol{a}_z\cdot \boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S=\int_{S_1}\cos\pi\mathrm{d}S=-\int_{S_1}\mathrm{d}S=-\pi\times 2^2=-4\pi$$

穿过下底面 $z=0$ 的通量为

$$\int_{S_0}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{S_0}A_z\boldsymbol{a}_z\cdot(-\boldsymbol{a}_z)\mathrm{d}S=-\int_{S_0}\cos 0\mathrm{d}S=-\int_{S_0}\mathrm{d}S=-4\pi$$

故

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{S_\rho}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{S_1}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{S_0}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=2\pi(\mathrm{e}^{-2\alpha}-4)$$

**2. 矢量场的散度**

通量是宏观概念、积分量，不能描述闭合面包围的体积内每一点的性质，不能确定源在 $S$

内是如何分布的。若想得知具体到某点的情况，就需要向某点处收拢包面，使包含这点在内的体积 $\Delta\tau\to 0$。由此而引入一个微观概念或微分量—矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度(divergence)，记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$。它的定义式是

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta\tau} \tag{1.3.3}$$

该式右边表示某点处发出的体平均净通量或净通量密度，因而散度也是通量[函数]对空间或对体积的变化率(参见下面对计算公式的推导)，是一种体积导数。正像 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 仍然是 $x$ 的函数，$\boldsymbol{A}$ 对体积(空间)的导数 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 仍然是空间点的分布函数。

下面我们根据定义式(1.3.3)推导散度在直角坐标下的计算公式。

既然 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ 与 $\Delta\tau$ 的形状无关(只要 $\Delta\tau\to 0$)，我们不妨取 $\Delta\tau$ 为包含某点 $(x,y,z)$ 在内的平行六面体，该点也不妨置于顶点处，如图 1-9 所示。

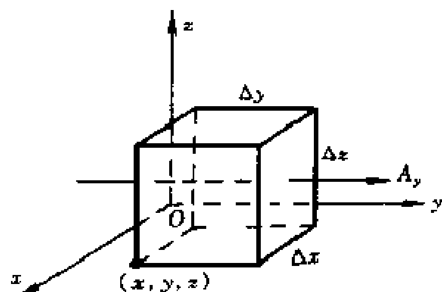


图 1-9　在直角坐标系中计算 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A}$ 从前、后一对面元发出的净通量等于从前面穿出的减去从后面穿入的通量，也就是等于通量函数 $\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{S}_x$，即 $A_x\Delta y\Delta z$ 沿 $x$ 方向的微增量：

$$-A_x\Delta y\Delta z+\left(A_x+\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z=\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

同理，$\boldsymbol{A}$ 从左、右一对面元发出的净通量等于通量函数 $\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{S}_y$，即 $A_y\Delta z\Delta x$ 沿 $y$ 方向的微增量：

$$-A_y\Delta z\Delta x+\left(A_y+\frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta y\right)\Delta z\Delta x=\frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$$

$\boldsymbol{A}$ 从上、下一对面元发出的净通量等于通量函数 $\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{S}_z$，即 $A_z\Delta x\Delta y$ 沿 $z$ 方向的微增量：

$$-A_z\Delta x\Delta y+\left(A_z+\frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta z\right)\Delta x\Delta y=\frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

把这三个式子相加，便得到 $\boldsymbol{A}$ 从整个闭合面 $S$ 发出的净通量：

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

而

$$\Delta\tau=\Delta x\Delta y\Delta z$$

故

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta\tau}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

显然，某点处 $\boldsymbol{A}$ 的散度值取决于该点 $A_x$ 沿 $x$ 方向、$A_y$ 沿 $y$ 方向和 $A_z$ 沿 $z$ 方向的变化率，因而散度描述的是某点处场量的各分量沿着它自身的方向，或说场量在其平行方向上的变化情况。这种变化的结果是可能导致包围该点的小闭合面有 $\boldsymbol{A}$ 的净通量被发出或吸收。实际的场中净通量都是由正(负)的源发出(吸收)的，因而(1.3.3)式定义的散度值也应代表某点处有无散度源以及源的强弱：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}(x,y,z)\begin{cases}>0 & \text{表示}(x,y,z)\text{点有“喷泉”，即正的源}\\<0 & \text{表示}(x,y,z)\text{点有“漏口”，即负的源}\\=0 & \text{表示}(x,y,z)\text{点无源}\end{cases}$$

（前两种情况：有源）

矢量场的散度的定义式与散度值与采用的坐标系无关，但在不同的坐标系下有不同的计算公式。

为了计算和表达上的便捷，我们引入矢量微分算子$\nabla$，也叫汉密尔顿算符（读作 del 或 Nabla）它在三种坐标系下的定义式分别为

直角坐标系
$$\nabla = \boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.3.4}$$

圆柱坐标系
$$\nabla = \boldsymbol{a}_\rho\frac{\partial}{\partial \rho}+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.3.5}$$

球坐标系
$$\nabla = \boldsymbol{a}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{a}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{1.3.6}$$

$\nabla$可视为一种特殊的矢量，它的每个“分量”为微分符号，因而又对“乘”到的项起求导的作用，这就是“矢量微分算子”这一名称的含义。这一算子的引入，可使对矢量的微分运算变为与$\nabla$之间的矢量代数运算，可利用各种矢量恒等式把复杂的矢量运算转化为简单的矢量或标量运算，简化分析，简化表达式，导出许多有用的结果。

根据点乘的定义，我们可以把散度重新写成$\nabla$算符(1.3.4)与$\boldsymbol{A}$点乘的形式：

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\\ &=\left(\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{a}_xA_x+\boldsymbol{a}_yA_y+\boldsymbol{a}_zA_z)\\ &=\nabla\cdot\boldsymbol{A}\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

在圆柱坐标系中，则取(1.3.5)式与$\boldsymbol{A}$的点积。与直角坐标下不同的是，此时单位矢量$\boldsymbol{a}_\rho$、$\boldsymbol{a}_\varphi$也要对$\varphi$求导：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \left(\boldsymbol{a}_\rho\frac{\partial}{\partial \rho}+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{a}_\rho A_\rho+\boldsymbol{a}_\varphi A_\varphi+\boldsymbol{a}_z A_z)\\ &= \boldsymbol{a}_\rho\cdot\left(\boldsymbol{a}_\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho}+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\\ &\quad+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{1}{\rho}\left(\boldsymbol{a}_\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}+A_\rho\frac{\partial \boldsymbol{a}_\rho}{\partial \varphi}+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}+A_\varphi\frac{\partial \boldsymbol{a}_\varphi}{\partial \varphi}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial A_z}{\partial \varphi}\right)\\ &\quad+\boldsymbol{a}_z\cdot\left(\boldsymbol{a}_\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial z}+\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\\ &= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho}+\frac{A_\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

在球坐标系中，应取(1.3.6)式与$\boldsymbol{A}$的点积。按照与(1.3.8)式相似的计算方法，可导出

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, A_\varphi)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{1.3.9}$$

对于散度所能表达的物理含义，还可举一个气体流速场中的例子。

**例 1.3** 考虑一个气筒，突然打开气门，被压缩的空气的流速将是越靠近气门越大，如图 1-10(a)、(b)所示。设$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}_x kx$，求$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$。

**解** 根据(1.3.7)式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}=k$$

表明各点都存在着大小为常数 $k$ 的源。这是朝一个方向放气的例子。更一般的例子是下面的向“四面八方”放气的情形〔在图 1-10(b)、(c)中,为了形象起见,特以箭矢的长短来表示 $\boldsymbol{v}$ 的大小。以矢线疏密表示 $\boldsymbol{v}$ 大小的正规画法示于图 1-10(a)〕。

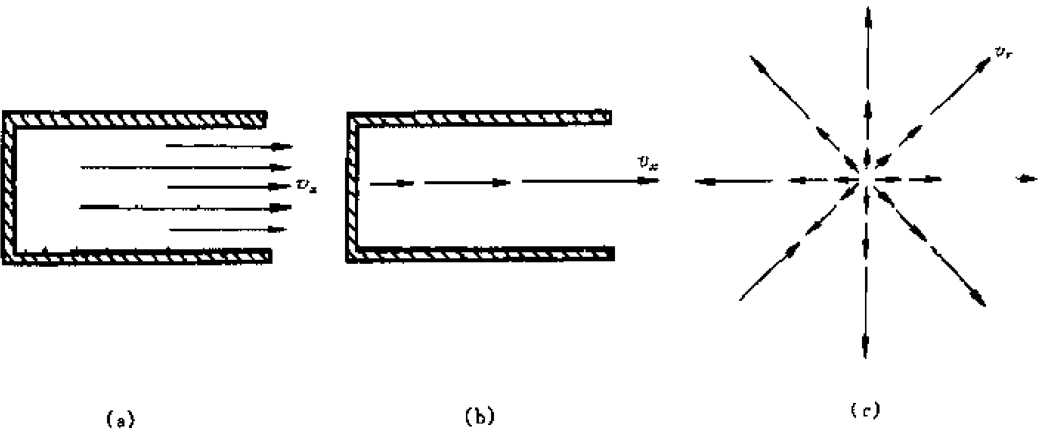



图 1-10 压缩气体的流速场

(a)矢量场 $\boldsymbol{a}_x kx$ 的正规画法示意图;(b)气筒中流出的压缩空气的流速场 $\boldsymbol{a}_x kx$ 的形象表示;

(c)球状压缩气体的流速场 $k\boldsymbol{r}$ 的形象表示。

**例 1.4** 想像一个爆炸的气球,设某点处气体的流速同该点与原点的距离成正比,其流速分布如图 1-10c 所示为 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = k\boldsymbol{r}$,求 $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$。

**解** 在例 1.1 中我们已计算过矢量场 $k\boldsymbol{r}$ 穿过半径为 $a$ 的半个球的表面的通量是 $2k\pi a^3$,表明了球面内有源存在。现在我们可以利用散度概念来详细考查场源在每点的分布情况。依(1.3.9)式,$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$的散度为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 kr) = 3k$$

这个结果表示空间各点都连续存在着其值为常数 $3k$ 的源。它是由压缩的气体形成的。因此,$\nabla \cdot \boldsymbol{v} \neq 0$( 0)也表明流体可(不可)压缩的性质。

总之,矢量的散度为零或不为零,反映了场的不同特点,反映了矢量场是否有“喷泉”或“漏口”,是否可压缩等基本物理特性。

如果一个矢量场中散度处处为零,就是无散场。

3. *散度定理*

关于散度,有一个重要的矢量恒等式或积分定理——散度定理。它表明了矢量场穿出边界面的净通量这一积分量与体积中的散度这一微分量之间的关系,也即通量和散发(吸收)通量的源(散度源)之间的关系:

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\tau \qquad (1.3.10)$$

这个定理表明:矢量穿过任意闭合面的净通量等于闭合面内所包围的所有源的体积分。也就是说,有多少通量(正的或负的)能从闭合面发出,取决于它里面有多少源(正的或负的)。这个结论是符合直觉的,但还需加以证明。

将闭合面 $S$ 与包围的体积 $\tau$ 分割成许多小体积元 $\Delta\tau_i$,如同将一个未削皮($S$)的苹果($\tau$)切成许多小丁($\Delta\tau_i$),计算每个小丁的外表面 $S_i$ 上场量 $\boldsymbol{A}$ 的净通量 $\oint_{S_i} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_i$,然后将其全部

迭加起来。可以想见，一个小丁的某个"刀切面"上若有流线流入(通量为负数)，它必定是从相邻的小丁的那个相邻的刀切面上流出来的(通量为正数)；反之亦然。因此，迭加的结果，所有小丁的刀切面上的通量全部成对抵消，只剩下带有苹果皮的小面上的通量未被抵消。它们"拼"在一起，恰构成一张完整的苹果皮 $S$ 上的通量：

$$\sum_{i=1}^{n}\oint_{S_i}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}_i=\oint_{S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

而由散度的定义式(1.3.3)，有

$$\oint_{S_1}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}_1=\mathrm{div}\boldsymbol{A}\Delta\tau_1$$

$$\oint_{S_2}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}_2=\mathrm{div}\boldsymbol{A}\Delta\tau_2$$

$$\vdots$$

$$\oint_{S_n}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}_n=\mathrm{div}\boldsymbol{A}\Delta\tau_n$$

从而有

$$\oint_{S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\sum_{i=1}^{n}\oint_{S_i}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}_i=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{div}\boldsymbol{A}\Delta\tau_i\to\int_{\tau}\mathrm{div}\boldsymbol{A}d\tau\quad(n\to\infty)$$

## 1.4 矢量场的环量和旋度 斯托克斯定理

矢量场的通量和散度只描述了矢量场特征的一个方面。以流速场为例，仅仅知道有无"喷泉"、"漏口"，能否压缩，还不能知道流速场的全貌，流速场中有无旋涡也是流速场的重要现象之一。因此，还需要引入环量和旋度的概念才能对矢量场的这一面貌特点加以描述。

1. 矢量场的环量(环流)

矢量场往往是力场。从力沿着曲线路径作功的熟悉的物理概念出发，就不难理解环量。下面我们就一步步地引出环量的定义。

在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中任取一条闭合路径 $C$ 并选定绕行方向。显然，$C$ 是有向曲线。$C$ 上的一小段线元(一小段曲线无限缩短就可视为直线段)当然也就是有方向的，因而是线元矢量或位移矢量 $d\boldsymbol{l}$。$P_1$、$P_2$ 是 $C$ 上的任意两点，如图 1-11 示。易知：

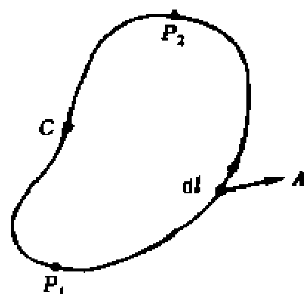



图 1-11 矢量 A 沿曲线路径作功

场量 $\boldsymbol{A}$ 沿线元 $d\boldsymbol{l}$ 做的功为

$$\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$

场量 $\boldsymbol{A}$ 沿曲线路径 $P_1P_2$ 做的功为

$$\begin{aligned}\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}&=\int_{P_1}^{P_2}A\cos\theta dl=\int_{P_1}^{P_2}(A_x dx+A_y dy+A_z dz)\\&=\int_{P_1}^{P_2}(A_\rho d\rho+A_\varphi\rho d\varphi+A_z dz)\\&=\int_{P_1}^{P_2}(A_r dr+A_\theta r d\theta+A_\varphi r\sin\theta d\varphi)\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

场量 $\boldsymbol{A}$ 沿闭合路径 $C$(即曲线路径 $P_1P_2+P_2P_1$)做的功

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \oint_C A\cos\theta\, dl \tag{1.4.2}$$

就称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿环路 $C$ 的环量，也称环流。

在每种坐标系下(1.4.1)或(1.4.2)式一般都代表着三个沿坐标轴的积分。沿有向曲线的积分是第二型曲线积分(也称对坐标的曲线积分)，积分的正负与曲线路径的走向有关；这反映出在力场中场力作功为正值，外力克服场力作功为负值的物理事实。

矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿闭合环路的积分值即矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的环量有两种相反的情况。

第一种情况。试想，在水的旋涡或龙卷风的旋涡处围绕旋涡中心取一个闭合路径 $C$。如果 $C$ 的绕向是顺着流速 $\boldsymbol{v}$ 的方向，也就是顺着水力或风力 $\boldsymbol{F}$ 的方向，由于 $C$ 上的 $d\boldsymbol{l}$ 与场量 $\boldsymbol{F}$ 的方向总是大体一致，因此必有 $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}>0$，$\boldsymbol{F}$ 做正功。每转一圈，$\boldsymbol{F}$ 就使物体获得大小为 $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}$ 的动能。不断积累下去，物体的动能越来越大，故而房屋、车辆都会旋走。反之，若路径 $C$ 的取向是逆着旋涡的转向，则是外力克服 $\boldsymbol{F}$ 作功，环量 $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}<0$。总而言之，不会是零。前面曾提到过的磁力线也是闭合曲线，因而沿着磁力线绕行一周也必定有 $\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}\neq 0$。

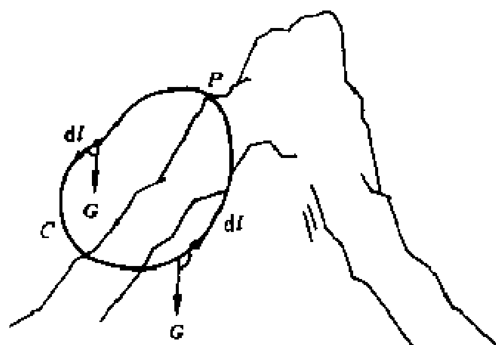



图1-12　地球引力场 $G$ 的环量为零

再看另一种相反的情况。如图1-12所示。若我们在地球引力场中任取一个环路 $C$，物体在下降(上升)的半圈中，重力 $\boldsymbol{G}$ 与 $d\boldsymbol{l}$ 大体上总夹锐(钝)角，$\boldsymbol{G}$ 作正(负)功。于是，从 $P$ 点绕行一圈回来，必有 $\oint_C \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{l}=0$，物体回到出发点 $P$ 时势能不增不减。这是熟知的事实，说明地球引力场中没有旋涡，事实上，任何引力场中都没有旋涡。例如静电场。总之，有

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}\begin{cases}\neq 0 & \text{表明 } C \text{ 包围着涡旋源}\\ 0 & \text{表明 } C \text{ 不包围涡旋源}\end{cases}$$

因为实际的场中旋涡总是由涡旋源引起的。

2. 矢量场的旋度

环量是积分量，不能说明以环路 $C$ 为边界线的曲面上每一点的情况。若 $C$ 包围有涡旋源，也不能知道是在哪些点。欲知某点处有无涡旋源以及源的强度，只有把环路 $C$ 向着该点(例如图1-13中的点 $M$)无限收小，使 $C$ 所张的曲面的面积 $\Delta S\to 0$。由此引出一个微分量——旋度(rotation 或 curl)的概念。矢量场的旋度记为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$。下面介绍旋度的定义、计算公式和物理含义。

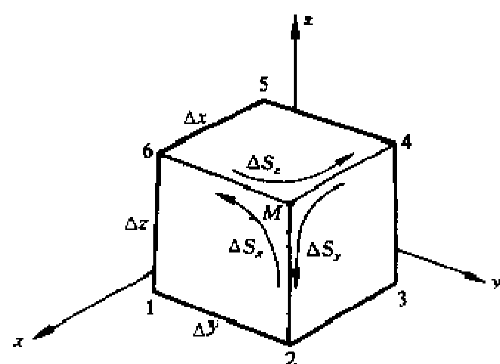



图1-13　在直角坐标系中计算 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$

一般来说，若某点处有旋转趋势，场量的实际旋涡面 $\Delta S$ 不会简单地平行于某坐标平面，而是在三个坐标平面都有投影：$\Delta S_x$、$\Delta S_y$、$\Delta S_z$。计算 $\Delta S$ 面上场量的旋转趋势可以分解成计算 $\Delta S_x$、$\Delta S_y$、$\Delta S_z$ 坐标面上场量的旋转趋势。

我们考虑如图1-13所示的小立方体的棱构成的空间环路 $C$，它是 $\Delta S_x$，$\Delta S_y$ 和 $\Delta S_z$ 三个面元的总边界线1-2

3-4-5-6-1。环路 $C$ 随着小立方体的无限缩小而向着 $M$ 点无限收紧。沿 $C$ 的环流 $\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$ 可看成由分别环绕 $\Delta S_x$、$\Delta S_y$、$\Delta S_z$ 的三个小环流 $\oint_{C_x}$、$\oint_{C_y}$、$\oint_{C_z}$ 构成。$C_x$ 为 1-2-$M$-6-1，$C_y$ 为 2-3-4-$M$-2，$C_z$ 为 6-$M$-4-5-6。其中在 $M$-2，$M$-4，$M$-6 这三条棱上可看成各有两个反方向的线积分相抵消而为零。这三个小环流都与它们各自的面元大小有关。就同一点 $M$ 处而言，显然面元的面积越大，一般环量就会越大，所以可定义

$$\mathrm{rot}_i \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta S_i \to 0} \frac{\oint_{C_i} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S_i} \quad (i \text{ 表示 } x、y、z) \tag{1.4.3}$$

作为场量 $\boldsymbol{A}$ 在面元 $\Delta S_i$ 的旋转强度（也称环流强度、环量密度）。三个面是相互正交的，因此这三个极限值(1.4.3)不能进行数量相加，而只能按矢量来合成。因此，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中某点 $M$ 处的旋度应定义为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x \lim_{\Delta S_x \to 0} \frac{\oint_{C_x} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S_x} + \boldsymbol{a}_y \lim_{\Delta S_y \to 0} \frac{\oint_{C_y} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S_y} + \boldsymbol{a}_z \lim_{\Delta S_z \to 0} \frac{\oint_{C_z} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S_z}$$

$$= \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S} \tag{1.4.4}$$

上述极限值与 $C$ 的形状无关，故而我们取了如图 1-13 的最易计算的形状（而一个任意的三维闭合曲线及面元可能如图 1-8 或图 1-14c 所示）。先计算(1.4.4)式中的第一项。沿小环路 $C_x$ 的环量为

$$\oint_{C_x} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \oint_{12M61} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$= A_y\Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\Delta y\right)\Delta z - \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\Delta z\right)\Delta y - A_z\Delta z$$

$$= \frac{\partial A_z}{\partial y}\Delta y\Delta z - \frac{\partial A_y}{\partial z}\Delta y\Delta z$$

而 $\Delta y\Delta z = \Delta S_x$，故由上式得 $\Delta S_x$ 面上的旋转强度为

$$\lim_{\Delta S_x \to 0} \frac{\oint_{C_x} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S_x} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

用同样的方法，可以算出(1.4.4)式的第二、三项，即

$\Delta S_y$ 面上的旋转强度为 $$\lim_{\Delta S_y \to 0} \frac{\oint_{C_y} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S_y} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$\Delta S_z$ 面上的旋转强度为 $$\lim_{\Delta S_z \to 0} \frac{\oint_{C_z} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S_z} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

把以上三个分量按矢量相加，即得到三维空间中的旋[转强]度矢量：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{a}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{a}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$=\left(\boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \times\left(\boldsymbol{a}_x A_x+\boldsymbol{a}_y A_y+\boldsymbol{a}_z A_z\right)$$

$$=\nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.4.5}$$

上式亦可写成

$$\nabla \times \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{1.4.5*}$$

这就是矢量场的旋度在直角坐标系下的计算公式。

再根据(1.3.5)和(1.3.6)式以及(1.2.3)和(1.2.11)式,就可算出:

在圆柱坐标系中

$$\nabla \times \boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_\rho\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)+\boldsymbol{a}_\varphi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)+\boldsymbol{a}_z\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\varphi\right)-\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right]$$

或简捷地写成

$$\nabla \times \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \dfrac{\boldsymbol{a}_\rho}{\rho} & \boldsymbol{a}_\varphi & \dfrac{\boldsymbol{a}_z}{\rho} \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \tag{1.4.6}$$

在球坐标系中

$$\nabla \times \boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{a}_r}{r \sin \theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin \theta A_\varphi\right)-\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]+\frac{\boldsymbol{a}_\theta}{r}\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}-\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\varphi\right)\right]+\frac{\boldsymbol{a}_\varphi}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\theta\right)-\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]$$

或写成

$$\nabla \times \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \dfrac{\boldsymbol{a}_r}{r^2 \sin \theta} & \dfrac{\boldsymbol{a}_\theta}{r \sin \theta} & \dfrac{\boldsymbol{a}_\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix} \tag{1.4.7}$$

下面我们以(1.4.5)式中的第三项

$$\boldsymbol{a}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{1.4.8}$$

为例(前两项同此),用实例来进一步表明旋度公式确实表示了每一点处的实际旋转趋势。为了形象起见,在图1-14中我们以箭矢的长短表示矢量的大小。

如图1-14(a)中某点处的河水流速 $v_x$ 沿 $y$ 方向有变化时,置于该点的小翼轮就会转动。由于 $\frac{\partial v_x}{\partial y}>0, v_y=0$,(1.4.8)式为负值,轮的转向将与 $z$ 轴负方向成右旋关系(简称"反转")。

又如图1-14(b)中的十字转柄处于力场 $\boldsymbol{A}$ 中的某点,以该点为中心,$A_y$ 值沿 $x$ 轴的变化为 $\frac{\partial A_y}{\partial x}>0$,它使转柄"正转",$A_x$ 分量沿 $y$ 轴的变化为 $\frac{\partial A_x}{\partial y}>0$,它使转柄反转,故表现在(1.4.8)式中为两转矩相减,总的转矩使转柄正转、反转还是不转,取决于(1.4.8)式大于、小于还是等于零。显然,若 $A_x$ 沿 $y$ 方向、$A_y$ 沿 $x$ 方向无变化(偏导数为零),置于该点处的转柄或

翼轮就不会转动。

当矢线呈弯转状时，并不意味着此处旋度一定不为零。例如弯管子中的流速场，若内、外侧的流速大小与管子的弯度配合得好而使(1.4.8)式为0，置于转弯处的翼轮也不一定就旋转。

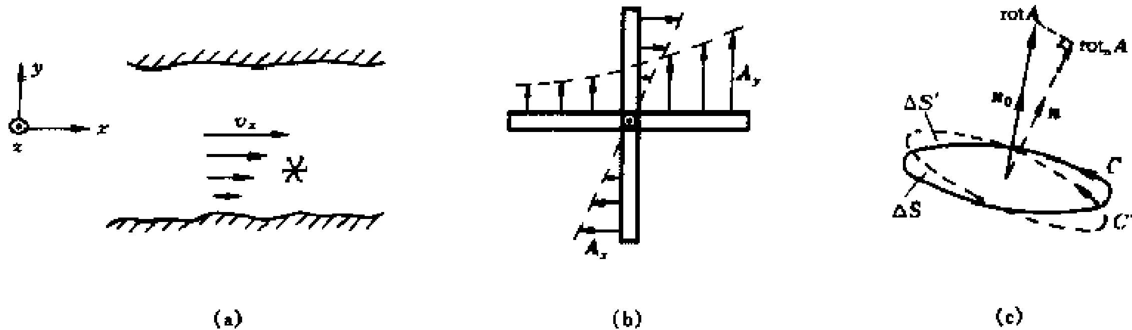



图 1-14 旋度公式的物理解释

(a)用河中的翼轮解释旋度的含义；(b)用十字转柄解释旋度公式；(c)旋度代表最大的环流强度。

总之，在各种情况下，旋度的计算公式都反映了某点处的实际旋转趋势。由这些公式看出，旋度矢量反映的是场量沿其垂直方向上的变化情况，例如 $A_x$ 沿 $y$、$z$ 方向的变化率，$A_y$ 沿 $x$、$z$ 方向的变化率，$A_\rho$ 沿 $\varphi$、$z$ 方向的变化率，等等。场量这种沿垂直方向变化的效果是可能引起旋转、旋涡(这一点从旋度计算公式(1.4.5)的推导过程就可以看出)，旋度不等于零是产生旋涡的基本条件。旋度处处为零的矢量场就是无旋场。

这种导致旋转的场量变化，在实际的场中，都是由涡旋源引起的(例如磁力线的旋涡就是由电流引起的)。故

$$\nabla\times\boldsymbol{A}\begin{cases}\neq 0 & \text{表明该点有涡旋源}\\ =0 & \text{表示该点无涡旋源}\end{cases}$$

由附录A2中(A2.13)式和(A2.16)式的证明，旋度也是一种体积导数：

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{-\oint_S \boldsymbol{A}\times \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta\tau}$$

因而$\nabla\times\boldsymbol{A}$ 仍然是点的函数，$\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的分布就是涡旋源的分布。我们可以用这样的文字来描述旋度矢量：它的模表示某点旋转力度的强弱，同时也反映了涡旋源的强弱(二者应是因果关系)；它的方向也是涡旋源(矢量)的方向，这个方向垂直于实际的旋涡面(即沿着转轴)，并与旋转方向成右旋关系。如图 1-14(c)所示。

旋度矢量垂直于旋涡面并不意味着它就一定垂直于场量。例如，由 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{a}_\varphi\dfrac{\mu_0 J\rho}{2}$ 和恒定场 $\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{a}_z B_0$($\mu_0$、$J$、$B_0$ 为常数)迭加而成的矢量场 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{B}$ 线是围绕 $z$ 轴的螺旋线。易知 $\nabla\times\boldsymbol{B}$ 并不垂直于 $\boldsymbol{B}$。这是因为$\nabla\times\boldsymbol{B}_2=0$，故 $\nabla\times\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{B}_1+\nabla\times\boldsymbol{B}_2=\nabla\times\boldsymbol{B}_1$，它垂直于 $\boldsymbol{B}_1$。

还需指出，如果我们在某点任取一个回路 $C'$，它包围的 $\Delta S'$(法线为 $\boldsymbol{n}$)与场量的实际的旋涡面不重合，而是夹角 $\theta$，如图 1-14(c)所示，显然将导致环量下降。故而沿 $C'$的环流强度

$\mathrm{rot}_n\boldsymbol{A}=\lim\limits_{\Delta S'\to 0}\dfrac{\oint_{C'}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S'}$ 只会小于 rot$\boldsymbol{A}$，且

$$\text{rot}_n \boldsymbol{A} = (\text{rot}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n} \tag{1.4.9}$$

换言之，$|\text{rot}\boldsymbol{A}|$是某点处最大的环流强度或旋转强度。

总之，有了旋度的概念，再配合散度的概念，我们就对矢量沿空间各个方向上的变化情况、对矢量场的性质，得到了一个全面的认识。

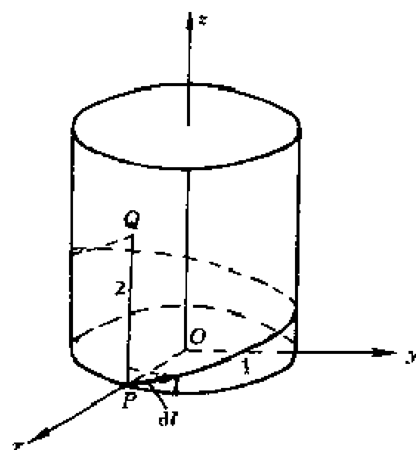



图1-15 例1.5题图

**例1.5** 在$\rho=2$的圆柱面上取两点$P(2,0,0)$和$Q(2,2\pi,2.5)$。计算场量$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_\rho(e^{-\alpha\varphi}/\rho)+\boldsymbol{a}_z\cos\pi z$沿着螺转线1由$P$到$Q$，再由$Q$沿直线2下降到$P$的闭合路径的环量，并求矢量场$\boldsymbol{A}$的旋度。

**解** 具有$\boldsymbol{a}_\varphi$和$\boldsymbol{a}_z$方向初速度的电子在恒定磁场$\boldsymbol{a}_z B$中的运动轨迹就是形如图1-15所示的螺旋线。由1.2节知柱坐标系中的位移矢量为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{a}_\rho\mathrm{d}\rho+\boldsymbol{a}_\varphi\rho\mathrm{d}\varphi+\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}z\\&=0+\boldsymbol{a}_\varphi 2\mathrm{d}\varphi+\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}z\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_{P1Q}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}&=\int_{P1Q}\left(\boldsymbol{a}_\rho\frac{e^{-\alpha\varphi}}{\rho}\mathrm{d}\rho+\boldsymbol{a}_z\cos\pi z\right)\cdot(\boldsymbol{a}_\varphi 2\mathrm{d}\varphi+\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}z)\\&=\int_0^{2.5}\cos\pi z\mathrm{d}z=1/\pi\end{aligned}$$

这恰与$\boldsymbol{A}$沿直线2由$P$到$Q$的积分值$\int_{P2Q}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$相等，从而

$$\oint_{P1Q2P}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{P1Q}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{Q2P}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{P1Q}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}-\int_{P2Q}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

上式表明，$\int_P^Q\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$值与路径无关就意味着$\boldsymbol{A}$沿任意过$P$、$Q$点的闭合路径的积分为零。再由(1.4.6)式，可得

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\dfrac{\boldsymbol{a}_\rho}{\rho} & \boldsymbol{a}_\varphi & \dfrac{\boldsymbol{a}_z}{\rho}\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{e^{-\alpha\varphi}}{\rho} & 0 & \cos\pi z\end{vmatrix}=0$$

可见$\boldsymbol{A}$是无旋场。由下面的定理我们还可知$\boldsymbol{A}$沿任一闭合曲线的积分都会是零。

3. *斯托克斯定理*

正如关于矢量的通量和散度有一个散度定理，关于矢量的环量和旋度也有一个“旋度定理”，这就是以它的证明人英国物理学家和数学家斯托克斯(Stokes)命名的定理。斯托克斯定理表明了环量这一积分量与旋度这一微分量之间的关系，也即环流和造成环流的涡旋源之间的关系：

$$\oint_C\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.4.10}$$

这个定理的含义是：场量沿着场中任一回路$C$的环量大小取决于$C$所包围的曲面上涡旋源的多少。这个矢量恒等式显然也是与我们的直觉相符的，但还须作如下的证明：

设 $C$ 是矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中的任一条闭合曲线(如图 1-16),$S$ 是 $C$ 所张的任一张曲面。我们把 $S$ 划分成许多小网格,则每一个网眼都是一个小闭合曲线 $C_1,C_2,\cdots,C_N$。规定所有 $C_i$ 的绕向都统一,并与 $C$ 的绕向一致。我们先计算出场量沿每个小回路 $C_i$ 的环量,再将它们全部加起来。我们注意到:每一条两个相邻网眼的公共边上的线积分 $\int \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 都被计算了两次,例如放大画出来的 $PQ$ 边,在计算 $\oint_{C_i}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 时是按 $\int_P^Q \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 计算的,而在求 $\oint_{C_{i+1}}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 又是按 $\int_Q^P \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 计算的,二者等值反号。这样,所有的小环量全部相加时必然成对抵消,只剩下构成宏观环路 $C$ 的那些小边上的线积分抵消不掉而构成沿 $C$ 的宏观环流:

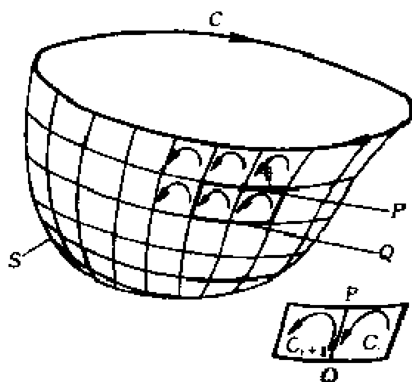



图 1-16 斯托克斯定理的证明示意图

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_{i=1}^{N}\oint_{C_i}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

而根据(1.4.9)式有

$$\oint_{C_i}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{rot}_n\boldsymbol{A}\Delta S_i=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i\quad(i=1,2,\cdots,N)$$

故而

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}&=\sum_{i=1}^{N}\oint_{C_i}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i\rightarrow\int_S\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\quad(N\rightarrow\infty)\end{aligned}$$

**例 1.6** 求 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x x^2+\boldsymbol{a}_y y^2+\boldsymbol{a}_z z^2$ 沿着 $xy$ 面上的一个闭合路径 $C$ 以及任意闭合路径的曲线积分,$C$ 由$(0,0)$和$(2,\sqrt{2})$之间的一段抛物线 $y^2=x$ 和两段平行于坐标轴的直线段组成,如图 1-17 所示。

**解** 因为回路在 $xy$ 平面上,$\mathrm{d}z=0$,故有

$$\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y=x^2\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y$$

在计算沿抛物线一段的积分时,可以分别计算两个积分

$$\int_P^0\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_2^0 x^2\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^0 y^2\mathrm{d}y$$

也可以利用 $y^2=x$ 消去一元,只计算一个(关于 $x$ 或 $y$ 的)积分:

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}x/(2\sqrt{x})\qquad y^2\mathrm{d}y=\sqrt{x}\,\mathrm{d}x/2$$

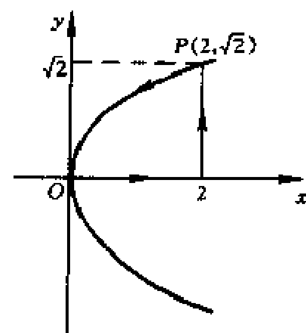



图 1-17 计算沿闭合路径 $C$ 的环量

于是

$$\begin{aligned}\oint_C\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}&=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{2}}y^2\mathrm{d}y+\int_2^0\left(x^2+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2+\frac{y^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}}+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^{3/2}}{3}\right)\Big|_2^0=0\end{aligned}$$

注意:在计算沿有向曲线的积分时,不管绕行的方向如何,被积函数 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z$ 中的 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 总取正值,曲线绕行方向所导致的积分值的正负是由对坐标积分时的

上下积分限来控制的。

再由(1.4.5)式,可得

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = 0$$

根据斯托克斯定理可知,$\boldsymbol{A}$ 沿任意闭合路径的线积分都应是零。

若换成球坐标来表示例 1.6 中的场量 $\boldsymbol{A}$,可得到

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x x^2 + \boldsymbol{a}_y y^2 + \boldsymbol{a}_z z^2 = \boldsymbol{a}_r r^2$$

这是球对称辐射状的矢量场。本节前面曾提到过的地球引力场 $\boldsymbol{G} = -\boldsymbol{a}_r \frac{mM}{r^2}$ 以及 $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{r}$ 也是此种形状的场,$\boldsymbol{G}$, $k\boldsymbol{r}$ 沿任意闭合路径的环量也恒为零。对此,我们可以证明一个普遍性的结论。

**例 1.7** 试证明凡形如 $f(r)\boldsymbol{a}_r$ 的矢量场必定是无旋场,其中 $f(r)$ 连续。

**证** 因为 $f(r)$ 连续,必存在原函数,设为 $\Phi(r)$,则 $\mathrm{d}[\Phi(r)] = f(r)\mathrm{d}r$,故

$$\int_P^Q f(r)\boldsymbol{a}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{r_P}^{r_Q} f(r)\mathrm{d}r = \int_{r_P}^{r_Q} \mathrm{d}[\Phi(r)] = \Phi(r_Q) - \Phi(r_P)$$

从图 1-18 上看,无论走哪条路径,“有效”的位移只是 $\mathrm{d}r$,而在 $r$ 的等值面上的位移是“无效”的[因 $f(r)\boldsymbol{a}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$]。这样,上述线积分值就与 $P$ 和 $Q$ 之间的路径无关,而只取决于积分的始点($r_P$)终点($r_Q$)(引力场和静电场就是这样的场)。按照例 1.5 中的推导,这就意味着场量 $f(r)\boldsymbol{a}_r$ 沿任意闭合路径的积分都为零。根据斯托克斯定理,必有 $\nabla \times [f(r)\boldsymbol{a}_r]$ 处处为零,表明球(柱)面对称、辐射状的矢量场必定是无旋场。但其逆不真。譬如例 1.5 中的矢量场 $\boldsymbol{a}_\rho \frac{e^{-\varphi}}{\rho} + \boldsymbol{a}_z \cos \pi z$ 和后面例 1.8 中的矢量场 $\frac{V}{a_2}(\boldsymbol{a}_x y + \boldsymbol{a}_y x)$ 都不是 $f(r)\boldsymbol{a}_r$ 形的场。也就是说,并非只有“球(柱)面对称、辐射状”的矢量场是无旋场。下一节我们将找到更广泛的矢性函数类是无旋的。

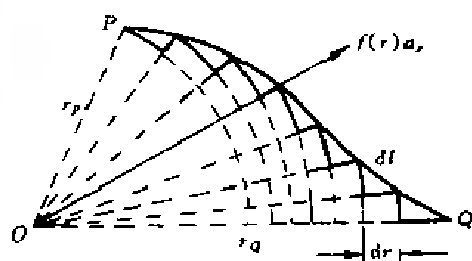



图 1-18 积分 $f(r)\boldsymbol{a}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与路径无关

4. 旋度和矢量位

矢量场的旋度有一个重要的性质:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{1.4.11}$$

这是一个矢量恒等式,与坐标系无关。这里,我们仅在直角坐标系下作一个证明。把 $\nabla$ 当作矢量,利用矢量混合积计算公式(A1.2),可得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

也可利用斯托克斯定理和散度定理对上述矢量恒等式作出与坐标系无关的证明，请读者自证。

这个性质说明矢量场的旋度场（也是一个矢量场）一定是无散的。而且，其逆命题也成立：一个无散场一定可以表示为某个矢量场的旋度场：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.4.12}$$

“↔”表示“等价”。$\boldsymbol{A}$ 通常称作矢量场$\boldsymbol{B}$ 的矢量位。也就是说，无散场 $\boldsymbol{B}$ 一定对应着一个矢量位场 $\boldsymbol{A}$（但 $\boldsymbol{A}$ 并不唯一）。在复杂的问题中，有时必须借助矢量位 $\boldsymbol{A}$ 来间接求出$\boldsymbol{B}$ 的解式。

## 1.5 标量场的梯度 标量位

### 1. 梯度的定义和计算公式

前面两节介绍了如何描述矢量场，本节讨论如何描述标量场。这是我们更为熟悉的事物。正像描述一元函数 $y(x)$是利用其导数 $y'(x)$来描述 $y$ 如何随它的一维变元 $\mathrm{d}x$ 变化，对于三元函数 $u(x,y,z)$，我们将利用 $u$ 的体积导数即梯度来描述它如何随三维变元——点的位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 而变化。

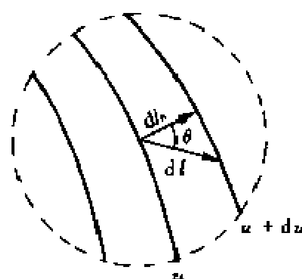



图1-19 $u$沿不同方向的变化率

我们在等值线图1-1(c)中取一个局部，放大为图1-19。当点在空间有一个微小位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$（即 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$），点的函数 $u(x,y,z)$就会有一个微增量 $\mathrm{d}u$。以直角坐标系为例：

$u$ 的全微分为
$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

位移矢量为
$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_x \mathrm{d}x + \boldsymbol{a}_y \mathrm{d}y + \boldsymbol{a}_z \mathrm{d}z = \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

由
$$\nabla = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

得
$$\nabla u = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.5.1}$$

从而 $u$ 的全微分又可写成如下形式

$$\mathrm{d}u = \nabla u \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \nabla u \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.5.2}$$

这正如一元函数的微分 $\mathrm{d}y = y'_x \mathrm{d}x$

(1.5.2)就是梯度(gradient)的定义式。梯度简写为 grad $u$ 或 $\nabla u$，这个定义式与坐标系无关。(1.5.1)就是梯度在直角标系中的计算公式。

把矢量微分算子 $\nabla$ 在不同坐标系下的表达式(1.3.5)、(1.3.6)与 $u$ 相乘，即得出

圆柱坐标系中
$$\nabla u = \boldsymbol{a}_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \boldsymbol{a}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.5.3}$$

球坐标系中
$$\nabla u = \boldsymbol{a}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \boldsymbol{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \boldsymbol{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \tag{1.5.4}$$

下面我们来探讨一下梯度矢量的性质和含义。

(1) 当点沿着 $u$ 的等值面移动时，函数值 $u$ 不变，$\mathrm{d}u = \nabla u \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$。这表明梯度矢量是垂直于等值面的，即梯度平行于等值面的法线；

(2) 当点沿着垂直于等值面的方向到达相邻的等值面 $u + \mathrm{d}u$ 时，路径 $\mathrm{d}l_n$ 最短（见图1-19），故而 $u$ 变化最快即方向导数的模 $\left|\dfrac{\partial u}{\partial l_n}\right|$ 最大，而且有

$$du = \frac{\partial u}{\partial l_n} dl_n$$

假设矢量 $\nabla u$ 的指向与 $d\boldsymbol{l}_n$ 一致而不是相反，由(1.5.2)式和点积的定义式(见附录)就得到

$$du = \nabla u \cdot d\boldsymbol{l}_n = |\nabla u| dl_n$$

比较此二式，可知

$$\frac{\partial u}{\partial l_n} = |\nabla u| > 0 \rightarrow du > 0$$

表明梯度矢量指向 $u$ 增大而非减小的方向。

综合(1)、(2)两点，可知梯度是这样一个矢量：标量场 $u$ 某点的梯度的模是该点处 $u$ 的最大增加率即某点处方向导数的最大值；梯度的方向是该点处 $u$ 增加最快的方向，与该点处 $u$ 的等值面的法线方向平行。

我们观察一下水从山坡上流下的路径，或弹丸从高坡上滚下的路径，它们总是走“捷径”，沿坡度最陡的方向下落的，这就是每一点处山的高度 $h(x,y)$的梯度的负方向。而每一点处山坡的最大坡度就是梯度的模$|\nabla h|$[参看图 1-20(b)]。

可以证明[见附录 A2(A2.14)式和(A2.17)式的证明]，梯度也是一种体积导数：

$$\nabla u = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\oint_S u\, d\boldsymbol{S}}{\Delta\tau}$$

梯度、散度、旋度的定义式可统一地表示为

$$\nabla \begin{bmatrix} u \\ \cdot \boldsymbol{A} \\ \times \boldsymbol{A} \end{bmatrix} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oint_S d\boldsymbol{S} \begin{bmatrix} u \\ \cdot \boldsymbol{A} \\ \times \boldsymbol{A} \end{bmatrix}$$

2. *梯度和方向导数的关系*

由梯度的定义式(1.5.2)，有

$$du = \nabla u \cdot d\boldsymbol{l} = |\nabla u| \cos\theta dl = |\nabla u|_l dl$$

其中$|\nabla u|_l$ 表示 $\nabla u$ 在 $\boldsymbol{l}$ 方向的投影。而由方向导数的定义，又有

$$du = \frac{\partial u}{\partial l} dl$$

比较上两式，得出

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\nabla u|_l = |\nabla u| \cos\theta = \nabla u \cdot \frac{d\boldsymbol{l}}{dl} = \nabla u \cdot \boldsymbol{a}_l \tag{1.5.5}$$

也就是说，$u$ 沿某个方向的方向导数等于 $u$ 的梯度矢量在这个方向的投影。

显然，当 $\boldsymbol{l}$ 就取为 $\nabla u$ 的方向时，$\cos\theta = 1$，方向导数的值最大。由此也可见梯度的模就是最大的方向导数，梯度的方向就是取得最大方向导数的那个方向。

3. *梯度和标量位*

梯度也有一个重要的性质：

$$\nabla \times \nabla u = 0 \tag{1.5.6}$$

这是一个矢量恒等式，与坐标系无关。我们仅在直角坐标系中证明。根据(1.4.6)式，可得

$$\nabla\times(\nabla u)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=0$$

矢量恒等式(1.5.6)表明梯度场都是无旋场。不仅如此，其逆命题也成立：无旋场都可以表示成某个标量场的梯度场，即

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \longleftrightarrow \boldsymbol{E}=\nabla u$$

现在证明如下：

从例1.7我们已知以下三个命题等价：

(1)矢量场 $\boldsymbol{E}$ 是一个无旋场( $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$)；

(2)矢量场 $\boldsymbol{E}$ 沿任意闭合路径的积分为零( $\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$)；

(3)矢量场 $\boldsymbol{E}$ 的线积分与路径无关。

这样，

$$\int_P^Q \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=u(Q)-u(P)$$

在固定 $P$ 点、选定 $u(P)$值的情况下就是场点 $Q$ 的一个唯一确定的函数。实际问题中 $u(Q)$都是连续、可微的，故上式中的被积函数应为 $\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}u$；再由(1.5.2)式，可知

$$\boldsymbol{E}=\nabla u$$

逆命题得证，且上式与命题1、2、3等价。

这样，我们又得到了一个比例1.7更加普遍的结果：能表为 $\nabla u$ 才是矢量场"无旋"(或说有势)的充分必要条件。包括例1.7中的 $f(r)\boldsymbol{a}_r$ 形式的矢量场在内，它们一定也是标量位场的梯度场。总而言之，一个无旋场 $\boldsymbol{E}$ 一定对应着一个标量场 $u$；$\boldsymbol{E}$ 可表为 $u$ 的梯度(体积导数)，而 $u$ 可表为 $\boldsymbol{E}$ 的线积分并称作 $E$ 的[标量]位或势；这种场则称作位场、有势场或保守场。

"保守"(conservative)的意思是"守恒"，指任一点 $Q$ 处对应的上述线积分值都不会因积分路径$PQ$ 而变，只要参考点 $P$ 及其位值取定了，这个线积分值就被 $Q$ 点的位置唯一确定。所以这个线积分值才称作"位"。在不计相差任一常数 $u(P)$的前提下，梯度场(无旋场)与它的标量位场是一一对应的。

现在考虑一个二维标量场

$$\Phi=V\frac{xy}{a^2}$$

其中 $V$、$a$ 为常数。$\Phi$ 的梯度场为

$$\nabla\Phi=\frac{V}{a^2}(\boldsymbol{a}_x y+\boldsymbol{a}_y x) \tag{1.5.7}$$

图1 20(a)为三维物理空间中标量场 $\Phi(x,y)$的等值面(它是在 $z$ 方向无限长的柱面)的横截面图。如果在三维空间画出 $\Phi(x,y)$的函数图像[如图1 20(b)所示]，可更清楚、形象地看到 $\Phi$ 值的大小随$(x,y)$的分布以及 $\nabla\Phi$ 的含义。从图(b)中可见：等 $\Phi$ 线如同等高线，$\Phi(a,a)$，$\Phi(-a,-a)$位于高处的等值线 $\Phi=V$ 上，$\Phi(-a,a)$，$\Phi(a,-a)$位于低处的等值线 $\Phi=-V$ 上。矢量场 $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$ 的矢线如同水流线，如果高处有水，它必是沿着 $-\nabla\Phi$ 的矢线即坡度最大的路线向下流。越陡处表明 $|\nabla\Phi|$越大。

**例 1.8** 对于图 1-20 所示的标量场 $\Phi(x,y)=V\dfrac{xy}{a^2}$

①求点$(a,a)$处 $\Phi$ 的等值面的法线矢量$\boldsymbol{n}$(假设 $\boldsymbol{n}$ 指向 $\Phi$ 增大的方向)。

②易知点 $A\left(-\dfrac{2}{3}a,-\dfrac{1}{6}a\right)$和$B\left(-\dfrac{1}{6}a,-\dfrac{3}{2}a\right)$位于$\Phi=-V/4$ 的等值线上。计算矢量场 $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$ 分别沿路径 $C_1$ 和 $C_2$ 由 $A$ 点至 $B$ 点的线积分。$C_1$ 为连接 $A$、$B$ 点的直线段,$C_2$ 为 $A$、$B$ 点所在的 $\Phi=-V/4$ 的等值线[见图 1-20(a)]。

③计算 $\nabla\times\boldsymbol{E}$。

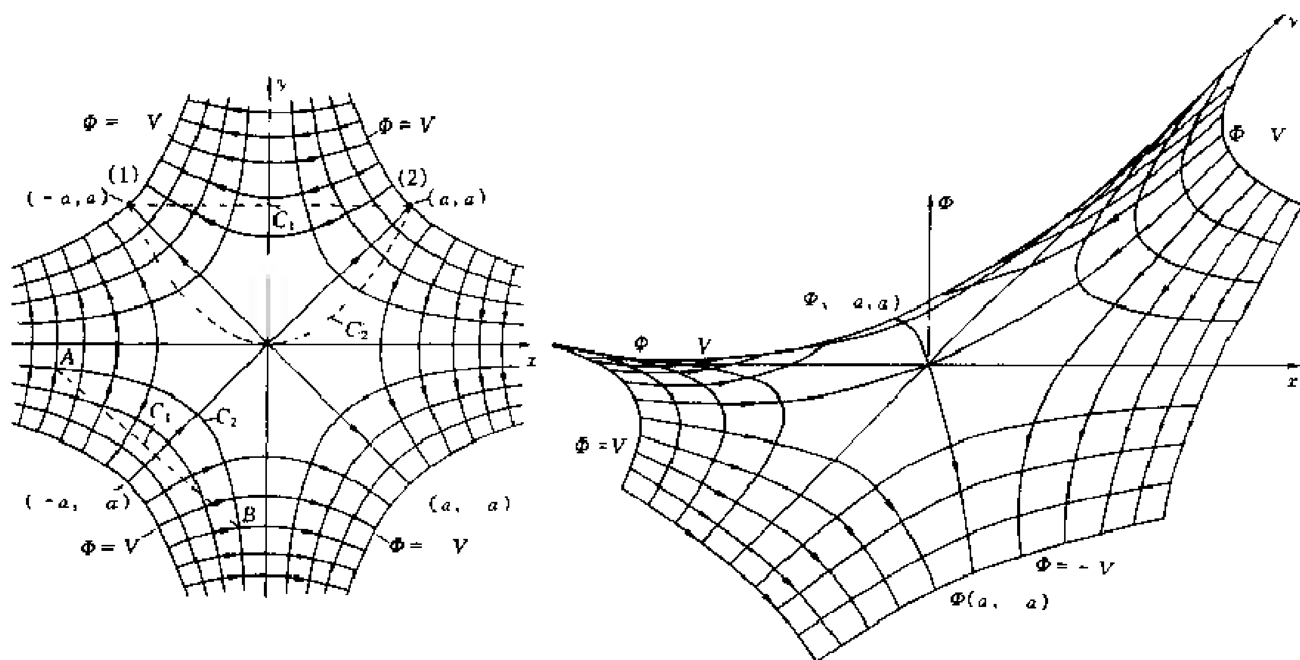



图 1-20 标量场 $\Phi=V\dfrac{xy}{a^2}$ 及其负梯度场的分布

(a)平行平面场 $\Phi(x,y)$的等值线和负梯度线;(b)$\Phi(x,y)$的函数图像。

**解** ①把 $x=a,y=a$ 代入(1.5.6)式可得点$(a,a)$的法线矢量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}=\frac{V}{a^2}(\boldsymbol{a}_x a+\boldsymbol{a}_y a)\Big/\left(\frac{V}{a^2}\sqrt{a^2+a^2}\right)=\frac{\boldsymbol{a}_x}{\sqrt{2}}+\frac{\boldsymbol{a}_y}{\sqrt{2}}$$

②路径 $C_1$ 的方程,即经过点 $A$、$B$ 的直线方程为

$$\frac{y+\dfrac{a}{6}}{x+\dfrac{3}{2}a}=-1$$

$$y=-x-\frac{5}{3}a$$

$$\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x$$

利用在路径 $C_1$ 上 $y\sim x$ 间的上述关系,沿 $C_1$ 的线积分就可化为只对某一元坐标的积分:

$$\int_{C_1}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int E_x\mathrm{d}x+\int E_y\mathrm{d}y=-\frac{V}{a^2}\left[\int\left(-x-\frac{5}{3}a\right)\mathrm{d}x+\int x(-\mathrm{d}x)\right]$$

$$=\frac{V}{a^2}\int_{-3a/2}^{a/6}\left(2x+\frac{5}{3}a\right)\mathrm{d}x=0$$

再看沿 $C_2$ 的线积分。由于在 $A$、$B$ 之间的 $\Phi=V/4$ 的等值线上处处有 $\nabla\Phi\perp \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，故 $\int_{C_2}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$。可见 $\boldsymbol{E}$ 的线积分与路径无关。

③
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & x & 0\end{vmatrix}=0$$

**例 1.9** 如图 1-21 所示，$\boldsymbol{r}'(x',y',z')$ 一般用来表示场源即源点的位置矢量和坐标，而 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ 则用来表示场点的位置矢量和坐标。$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 为场点相对于源点的相对位置矢量，而$(x-x',y-y',z-z')$叫作相对坐标，意为它是场点相对于源点（而不是坐标原点）的坐标。

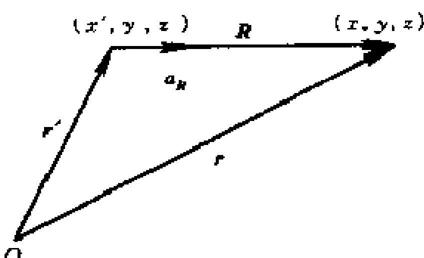



图 1-21 源点、场点和相对位置矢量 $\boldsymbol{R}$

实际问题中，场量往往是相对位置矢量 $\boldsymbol{R}$ 的函数，表示成 $\boldsymbol{R}$ 或相对坐标的函数较为方便。

设有标量场 $f(R)$，求证：以$(x',y',z')$为动点（即以 $x'$，$y'$，$z'$或$\boldsymbol{r}'$为变量）时的梯度 $\nabla' f(R)$ 与以$(x,y,z)$为动点（即以 $x,y,z$ 或 $\boldsymbol{r}$ 为变量）时的梯度 $\nabla f(R)$之间有如下关系：

$$\nabla' f(R)=-\nabla f(R)$$

**证**

$$\nabla f=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial f}{\partial z}\qquad \nabla' f=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial f}{\partial x'}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial f}{\partial y'}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial f}{\partial z'}$$

$$R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

故有
$$\frac{\partial f(R)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial R}\cdot\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial R}\cdot\frac{x-x'}{R}$$

而
$$\frac{\partial f(R)}{\partial x'}=\frac{\partial f}{\partial R}\cdot\frac{\partial R}{\partial x'}=\frac{\partial f}{\partial R}\left(-\frac{x-x'}{R}\right)=-\frac{\partial f(R)}{\partial x}$$

同理
$$\frac{\partial f(R)}{\partial y'}=-\frac{\partial f(R)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f(R)}{\partial z'}=-\frac{\partial f(R)}{\partial z}$$

故
$$\nabla' f(R)=-\boldsymbol{a}_x\frac{\partial f}{\partial x}-\boldsymbol{a}_y\frac{\partial f}{\partial y}-\boldsymbol{a}_z\frac{\partial f}{\partial z}=-\nabla f(R)$$

## 1.6 亥姆霍兹定理 宏观电磁场的基本方程

1. 亥姆霍兹(Helmholtz)定理

从 1.4 节和 1.5 节我们看到，场的分布有两种相反的情形。一种是散度处处为零的场——无散场，它等价于一个矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度场 $\nabla\times\boldsymbol{A}$。这种场的矢线永远没有始点和终点（因为始、终点处必有散度源），从而只能都是闭合曲线。又因为沿闭合矢线的环量必不为零，从而闭合矢线中必包围有涡旋源。也就是说，无散场一定有旋，故也称旋转场。磁场就是这样的矢量场。

另外一种则是旋度处处为零的场——无旋场，它等价于一个标量场 $u$ 的梯度场 $\nabla u$。它的矢线永远不可能闭合(因为闭合的矢线中必包围有涡旋源)，因而必然是有始有终的。而始点与终点处散度必不为零，必是源点，所以无旋场中必有散度源——“喷泉”(“漏口”)，而矢线则起于正的源，止于负的源。静电场就是这样的矢量场。

可见，从整体上说，一种矢量场不可能既无散，又无旋。事实上，任何一种物理的场都必须有某种源，因为场是由源引起、同源一起出现的。一般的矢量场可能既有散，又有旋。亥姆霍兹定理指出：任何一个矢量场 $\boldsymbol{F}$ 都可以表示为一个无旋场分量 $\boldsymbol{F}_l$ 和无散场分量 $\boldsymbol{F}_c$ 之迭加：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_l + \boldsymbol{F}_c \quad (\nabla \times \boldsymbol{F}_l = 0,\ \nabla \cdot \boldsymbol{F}_c = 0) \tag{1.6.1}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 的无旋场分量由它的散度源 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ 及边界面上的等效散度源 $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ 唯一确定，$\boldsymbol{F}$ 的无散场分量由它的涡旋源 $\nabla \times \boldsymbol{F}$ 及边界面上的等效涡旋源 $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{n}$ 唯一确定。简而言之，就是一个矢量场由它的散度和旋度唯一确定。这个定理的严格证明见附录 A3。

事实上，我们从本章前面几节已看到：散度描述了矢量场沿场量本身的方向上的变化率，旋度描述了与场量垂直的方向上的变化率，因而一个矢量场各分量的偏导数的许多可能的组合中的这两种特定的组合(指 $\nabla \cdot$ 和 $\nabla \times$)能够共同确定一个矢量场的全貌。从场和源的关系上看，散度和旋度分别对应着矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的两种源的分布，而源的分布决定着场的分布，当然也就决定了场量沿各个方向如何变化。因此，散度和旋度理应是已给出了有关 $\boldsymbol{F}$ 的全部信息，亥姆霍兹定理正是总结了矢量场的这一根本性质，是对矢量场与其源的关系的全面总结。

如果已知 $\qquad \nabla \cdot \boldsymbol{F}_l = \rho \qquad \nabla \times \boldsymbol{F}_c = \boldsymbol{J}$

根据(1.6.1)式，就有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F}_l = \rho \tag{1.6.2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F}_c = \boldsymbol{J} \tag{1.6.3}$$

(1.6.2)和(1.6.3)式就是矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的基本方程。按照亥姆霍兹定理，求解上述基本方程就应能得到场 $\boldsymbol{F}$ 的解式。但在实际问题中，并不一定总能直接求解基本方程，边界条件在形式上也不完全与亥姆霍兹定理(A3.8)式中的相同。在关于唯一性定理和边值问题的讨论中将对此作进一步的讨论。

根据亥姆霍兹定理，本书中每研究一种矢量场，都是从它的散度和旋度两方面去研究，并得出象(1.6.2)和(1.6.3)式那样的基本方程的微分形式；或者从矢量穿过闭合面的通量和沿着闭合路径的环量两方面去研究，得出基本方程的积分形式。

还应该指出，散度和旋度都包含着对空间坐标的导数，因此只有在 $\boldsymbol{F}$ 连续的区域才有意义。而在 $\boldsymbol{F}$ 发生突变的一些表面，只能用关于通量和环量的积分形式的基本方程去分析。

*2. 宏观电磁场的基本方程*

本书中要讨论的矢量场是电磁场，它就是用散度和旋度来全面描述的。宏观电磁场的基本方程的微分形式为

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}) \\
&\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\
&\nabla \cdot (\mu \boldsymbol{H}) = 0 \\
&\nabla \cdot (\varepsilon \boldsymbol{E}) = \rho
\end{aligned}\right\} \tag{1.6.4}$$

这就是著名的麦克斯韦方程组的限定形式(将在第 6 章详述)。

我们称它是宏观电磁场的基本方程，是因为它适用于宏观电磁现象，而不适用于原子范围内的电磁效应、发光过程等微观现象。

我们在这个方程组中看到，电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 都各有它们的散度方程和旋度方程。按照亥姆霍兹定理，散度和旋度分别代表着矢量场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的场源，决定着场的分布。事实上，电磁场的解归根结底都是从解麦克斯韦方程组得到的。

这个方程组中的一个特殊之处是：场矢量不只是空间的函数，还是时间的函数。于是，在时变的情况下就不只需要场论的知识，还需要数学物理方程（例如关于波动方程）的知识才能求解。解的唯一确定，不仅需要亥姆霍兹定理所指出的散度和旋度，还需要时间上的初始条件以及时变电磁场的边界条件。

另一个特殊之处是：两种矢量场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在方程中是互相交叉的。当然，可以从数学上将二者分离而解之；然而，作为物理的场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是无法分割开的，电效应和磁效应是同时交错在一起出现而无法加以孤立的。麦克斯韦方程组在反映了电磁场受场源（电荷 $\rho$——散度源，电流 $\boldsymbol{J}$——涡旋源）的制约的同时，也客观地反映了电场和磁场本身之间的相互联系、相互制约、统一而不可分的物理本质。只有在电荷、电流不随时间而变，即场是恒定的特殊情况下，才能分别呈现出电磁场的电效应一面和磁效应一面。而在实际上，恒定不变的电场和磁场是并不存在的——电荷不会长期静止不动，电流强度也经常会有小的波动，不会绝对不变。恒定场只是实际情况的一种近似。正如我们在现代的日常生活、工作中时时处处所感受到的，真正存在的是变化的电场和变化的磁场，而且电场和磁场总是并存的。电场和磁场实际上是同一个场的两个侧面。这一看法的正确性还可以由下面的事实说明：静止的电荷产生电场，运动的电荷除了产生电场还产生磁场，但是静止和运动是相对的。相对于某一个参照系是静止的电荷，相对于另一个参照系则可能是在运动。因此，从前一个参照系看只有电场，从后一个参照系看则同时有电场和磁场。由此可见，电场和磁场确有其相对性质。

*虽然 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 同时并存，但在实际问题中，当所讨论的系统尺寸相对够小（例如远小于电磁波的波长），或换言之，电磁波通过系统的时间相对够短，例如远小于电磁波的一个周期（实际使用的时间尺度是特征时间 $\tau$，$\tau=\frac{T}{2\pi}=\frac{1}{\omega}$）时，就可用准静态的近似模型把 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 分开来研究：

当 $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\to 0$，电场可视为不受磁场的影响或感应$\left(\text{但}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\neq 0\text{，磁场仍受电场的感应}\right)$，称为电准静态（EQS：Electroquasistatic）场。由方程组（1.6.4），此时电场的散度和旋度分别为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=0\\ \nabla\cdot\varepsilon\boldsymbol{E}&=\rho\end{aligned}\right\}\tag{1.6.5}$$

电场只产生于电荷 $\rho$；而当 $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\to 0$ 时，磁场视为不受电场的感应（但 $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\neq 0$，电场仍受磁场的感应），称为磁准静态（MQS：Magnetoquasistatic）场。由方程组（1.6.4），此时磁场的散度和旋度分别为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}&=\boldsymbol{J}\\ \nabla\cdot\mu\boldsymbol{H}&=0\end{aligned}\right\}\tag{1.6.6}$$

磁场仅产生于真实电流 $\boldsymbol{J}$。

准静态场不是静态场，因为 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 之间存在“单向”的影响，且场随时间而变。但这种场的每一瞬间的分布像静态场一样，仅由那一时刻的源（散度和旋度）决定而与前一时刻无关〔若无

静态或准静态的假设，则 $t$ 时刻的 $\boldsymbol{E}$ 会与 $t \quad \Delta t$ 时刻的 $\boldsymbol{H}$ 有关。这是因为按照方程组(1.6.4)，$\boldsymbol{E}$ 的涡旋源取决于$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \quad \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{H}(t) \quad \boldsymbol{H}(t-\Delta t)}{\Delta t}$。同理，$t$ 时刻的 $\boldsymbol{H}$ 会与 $t \quad \Delta t$ 时刻的 $\boldsymbol{E}$ 有关。而归根结底，各点的场量都与 $t-\frac{R}{c}$ 时刻的源 $\rho$、$\boldsymbol{J}$ 的分布有关。$R$ 是场点至源点的距离，c 为光速]。把 EQS(MQS)场的任 -瞬间“拍照”、保留下来的电(磁)场侧面就是静态的电(磁)场。

当方程组(1.6.4)中的时间导数项$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$和$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$同时近似为零，它就退化成分别关于静态的电场和磁场的基本方程[分别和式(1.6.5)、(1.6.6)]相同。

为了认识上的循序渐进，本书将首先在场论的指导下，在$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \boldsymbol{0}$ 的假设下，分别介绍静态的电场和磁场这种最简单、基本的模型(而对准静态场这一更接近实际但更复杂的模型，请参阅文献[3])，在此基础上再讨论统 -的时变电磁场，对每一种场的基本现象、基本规律、基本问题、基本解法作系统的介绍。

## 习 题 1

1.1 已知矢量 $\boldsymbol{A} \quad 2\boldsymbol{a}_x - 3\boldsymbol{a}_y + 4\boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{a}_x + 2\boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z$，求矢量 $\boldsymbol{C} \ \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ 的模，方向余弦(即 $\boldsymbol{C}$ 与 $x$、$y$、$z$ 轴的夹角余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$)及单位矢量 $\boldsymbol{a}_C$。

1.2 已知矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的矢端分别为 $A$、$B$ 点，起点为原点 $O$，求以 $A$、$B$ 连线的中点 $C$ 为矢端的矢量$\overline{OC}$。(即用已知矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示$\overline{OC}$)。

1.3 已知矢量 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{a}_r + b\boldsymbol{a}_y + c\boldsymbol{a}_z$，写出圆柱坐标和球坐标下 $\boldsymbol{D}$ 的表达式。

1.4 已知矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y 2 - \boldsymbol{a}_z 3$$
$$\boldsymbol{B} = \quad \boldsymbol{a}_y 4 + \boldsymbol{a}_z$$
$$\boldsymbol{C} - \boldsymbol{a}_x 5 - \boldsymbol{a}_z 2$$

①通过计算验证 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \quad \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$。三个矢量怎样轮换次序方能使混合积符号不变？

②计算$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 和$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$。双重叉积是否满足乘法结合律？

1.5 矢量 $\boldsymbol{a} \quad \{1,4,3\}$，$\boldsymbol{b} \quad \{4,2,-4\}$的起点均在坐标原点。用矢量运算解答：

①以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为边的三角形是否直角三角形？

②计算该三角形的面积。

1.6 给定两矢量 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{a}_x + 2\boldsymbol{a}_y + 3\boldsymbol{a}_z$ 和$\boldsymbol{B} \quad 4\boldsymbol{a}_x - 5\boldsymbol{a}_y + 6\boldsymbol{a}_z$，求它们之间的夹角余弦和 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量(投影)。

1.7 已知两矢量 $\boldsymbol{A} \quad 2\boldsymbol{a}_x + 3\boldsymbol{a}_y \ 4\boldsymbol{a}_z$ 和$\boldsymbol{B} - -6\boldsymbol{a}_x \quad 4\boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z$，求 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 在$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a}_x - \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z$ 上的分量。

1.8 证明：如果 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{B}$ 且$\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{B}$，则矢量 $\boldsymbol{A} \ \boldsymbol{B}$。

1.9 用球坐标表示的矢量场为 $\boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{a}_r 25/r^2$。

①求在点( 3,4,-5)(直角坐标)的 $\boldsymbol{E}$ 和 $E_x$；

②求 $\boldsymbol{E}$ 与矢量$\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{a}_x \quad 2\boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z$ 构成的夹角。

1.10 球坐标系中的两个位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的矢端坐标分别为$(r_1,\theta_1,\varphi_1)$和$(r_2,\theta_2,\varphi_2)$，求证 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 之间的夹角余弦为

$$\cos\gamma=\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2$$

1.11 在由等值面$\rho=5$，$z=0$，$z=2$围成的圆柱形区域中，对矢量$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_\rho\rho^2+\boldsymbol{a}_z 2z$验证散度定理。

*1.12 已知旋转抛物面 $S$ 为$z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant h)$，求流速场 $\boldsymbol{v}=(x+y+z)\boldsymbol{a}_z$ 在单位时间内向下(朝向$-\boldsymbol{a}_z$)穿过 $S$ 的流量$Q$。

1.13 在矢量场 $\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{a}_x+x\boldsymbol{a}_y$ 中有一矩形回路$C$:$(0,0)\to(3,0)\to(3,4)\to(0,4)\to(0,0)$。对回路$C$及其围成的矩形平面$S$验证斯托克斯定理成立。

1.14 利用斯托克斯定理计算矢量场 $\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{a}_x+x\boldsymbol{a}_y+C$($C$ 为常数)沿圆周

①$x^2+y^2=R^2$

②$(x-2)^2+y^2=R^2$

的环量。这个环量与半径为 $R$ 的圆在$xy$平面上的位置有无关系？

1.15 利用散度定理和斯托斯定理证明：

①对任意闭合面 $S$ 有

$$\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

②对任意闭合回路 $C$ 有

$$\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

[提示：在(1.3.10)和(1.4.10)式中令 $\boldsymbol{A}$ 为常矢量或利用(A2.14)、(A2.15)式。]

1.16 标量函数 $u=x^2yz^3$ 在点 $M(2,1,-1)$处沿哪个方向的方向导数最大？并计算该最大方向导数的值。

1.17 求双曲线族 $u=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$上任意点的单位法向矢量。

1.18 求 $u=3x^2y-xy+z^2$ 在$(1,-1,1)$点沿曲线 $C$ 的$x$增加一方的方向导数。已知 $C$ 的曲线方程为

$$\begin{cases}y=x^2\\ z=x^3\end{cases}$$

1.19 今有二维标量场 $u=y^2-x$：

①问 $u$ 的等值面是何种曲面？并在 $xy$ 平面上画出$u$ 的等值线族；

②求 $\nabla u$；

③任取一个回路 $C$，计算$\oint_C\nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$。例如，$C$ 如图 1-17 所示，由一段抛物线和二条直线段构成。

1.20 对于图 1-20 中的标量场 $\Phi=V\dfrac{xy}{a^2}$，求矢量场 $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$ 从点(1)分别沿路径 $C_1'$ 和$C_2'$至点(2)的线积分。这个场是否保守场？

1.21 相对位置矢量 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{a}_x(x-x')+\boldsymbol{a}_y(y-y')+\boldsymbol{a}_z(z-z')$，$\boldsymbol{k}$ 为常矢量，证明：①$\nabla\cdot\boldsymbol{R}=3$；②$\nabla\times\boldsymbol{R}=0$；③$\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R})=\boldsymbol{k}$。标量场 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}$ 的等值面是何种形状？它与常矢量 $\boldsymbol{k}$

的关系如何?

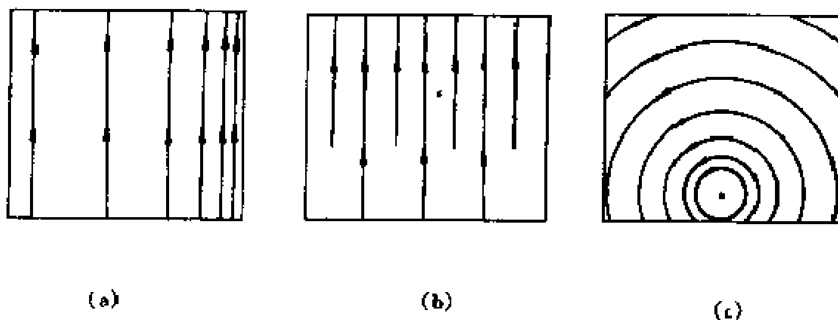
1.22　对于矢量场 $\boldsymbol{A}=f(x)\boldsymbol{a}_x+g(y)\boldsymbol{a}_y+h(z)\boldsymbol{a}_z$:

①求 $\boldsymbol{A}$ 沿着图 1-13 所示的回路 $C(1234561)$ 的环量;

②求 $\nabla\times\boldsymbol{A}$;

③如果 $f(x)$、$g(y)$、$h(z)$ 都存在原函数,$\boldsymbol{A}$ 是否一定为保守场?若是,写出矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的标量位函数 $\Phi$。

1.23　三个二维矢量场示于题 1.23 图中,矢线的疏密表示矢量场的强度。问:



(a)　　(b)　　(c)

题 1.23 图

①其中哪一个场是无旋的?

②哪些是无散的?

③图(c)中的矢量场为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_\varphi\dfrac{k}{\rho}$,$k$ 为常数,问除圆心(轴线)之外的区域是否无旋的?

1.24　今有三种矢量场:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_r\sin\theta\cos\varphi+\boldsymbol{a}_\theta\cos\theta\cos\varphi-\boldsymbol{a}_\varphi\sin\varphi$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_\rho z^2\sin\varphi+\boldsymbol{a}_\varphi z^2\cos\varphi+\boldsymbol{a}_z 2\rho z\sin\varphi$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}_x(3y^2-2x)+\boldsymbol{a}_y x^2+\boldsymbol{a}_z 2z$$

①其中哪些矢量场可表示为一个标量场的梯度场,哪些矢量场可表示为一个矢量场的旋度场?

②求出这些矢量场的源的分布。

1.25　在直角坐标下证明:

① $\nabla\cdot(u\boldsymbol{A})=u\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla u$

② $\nabla\times(u\boldsymbol{A})=u\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla u\times\boldsymbol{A}$

③ $(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)u=\boldsymbol{A}\cdot\nabla u$

1.26　证明:$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})$

1.27　位置矢量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\boldsymbol{a}_z z$,$r=|\boldsymbol{r}|$,求:

①使 $\nabla[f(r)\boldsymbol{a}_r]=0$ 的 $f(r)$;

②使 $\nabla\cdot[\nabla f(r)]=0$ 的 $f(r)$;

③使 $\nabla\cdot(r^n\boldsymbol{r})=0$ 的整数 $n$。

1.28　利用散度定理和斯托克斯定理对 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$ 和 $\nabla\times\nabla u=0$ 作不依赖于坐标系的证明。(提示:做一个闭合面。)

# 第2章 静 电 场

静态的电场是由分布恒定的电荷所产生的(而时变的电场则不仅以电荷为源)。其中最简单的是由静止的、电量恒定的电荷——静电荷产生的场,称为静电场。静止的电荷周围只存在静态的电场。当然,这是因为我们采用的参照系相对于电荷是静止的,因而能单独观察到统一的电磁场的电场这个侧面。此外,电荷的静止也只是在我们所关心的一段时间之内。

静电现象在自然界极为常见,且静电学的知识能够直接应用,例如用于石油、船舶、电子、航空、航天、纺织、塑料、造纸、印刷工业以及静电涂敷、静电除尘、静电分选、静电复印等等。静电场的理论也可用于解决电准静态场的问题以及恒定电场的问题,而且是学习时变电磁场的基础。本章将应用场论的知识于静电场,介绍其基本的物理量、基本定律和方程、介质特性、问题类型以及初步的求解方法。

## 2.1 电场强度 库仑定律

电场最基本的特征是对电荷有作用力,无论电荷是运动的还是静止的;而电场强度则是描述电场的最基本的物理量。一个电场的电场强度定义为单位电量的点电荷所受到的该电场的作用力(即不包括受力电荷本身产生的电场):

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q} \tag{2.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 的单位为 N(牛),$q$ 的单位为 C(库),$\boldsymbol{E}$ 的单位为 V/m(伏/米)。实际应用中也用 kV/cm(千伏/厘米)等单位。

(2.1.1)式的电场强度定义是普适的。式中的 $\boldsymbol{E}$ 泛指各种电场力,即不仅限于指静电力或库仑力,也指其他原因产生的电场力。而受力电荷 $q$ 可以是静止的,也可以是运动的。(相对论的研究还表明,电场对电荷 $q$ 的作用力与电荷 $q$ 的运动速度无关。)

矢量场 $\boldsymbol{E}$ 是一个分布函数。在实际问题中,描述点的位置的坐标系和点的函数 $\boldsymbol{E}$ 的坐标系有可能是不同的。例如,在单模圆光纤中的电场强度可表示为 $\boldsymbol{E}_x(\rho,\varphi,z)$,见图 2-1。

对于静电场而言,库仑于 1785 年从实验总结出真空中两个相距 $R$ 的静止电荷 $q_1$ 和 $q_2$ 之间的作用力 $\boldsymbol{F}_{12}$ 服从下述关系式:

$$\boldsymbol{F}_{12}=\boldsymbol{a}_R\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0R^2} \tag{2.1.2}$$

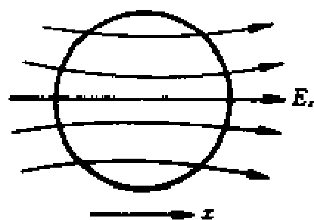



图 2-1 单模圆光纤中的电场分布

(2.1.2)式就是著名的库仑定律。其中 $\varepsilon_0=1/(4\pi\times9\times10^9)\approx8.854\times10^{-12}$ F/m(法/米),称为真空电容率或真空介电常数。本书中一律采用国际单位制(MKSA 制)。下标 1 表示场源电荷,2 代表受力电荷。显然,(2.1.2)式的形式与以哪一个点电荷为源没有关系。$q_1$ 与 $q_2$ 之间的作用力也是相互的,$\boldsymbol{F}_{12}$ 同 $\boldsymbol{F}_{21}$ 是一对作用力和反作用力。

综合(2.1.1)和(2.1.2)式,就得到静止的点电荷的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_R=\frac{q\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{1}{R}\right) \tag{2.1.3}$$

其中的 $\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{r}'$,$\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{a}_R$ 的含义参看图 1-21。注意,(2.1.2)、(2.1.3)式中的 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{a}_R$ 永远是由源点指向场点的,如图 1-21 所示。这样,电力线必然总是由正电荷发出而终止于负电荷。

(2.1.3)式中的最后一个等号是依据梯度的计算公式而得:

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=\boldsymbol{a}_R\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right)=-\boldsymbol{a}_R\frac{1}{R^2}$$

静电学的基本问题就是要确定带电系统周围的电场分布。

由(2.1.3)式可看出,对于点电荷的电场:

(1)$\boldsymbol{E}\propto\frac{\boldsymbol{a}_R}{R}$ 电场强度服从与距离的平方反比律,并呈球对称辐射状分布。这种函数形式决定了静电场的基本方程(见下节)。

(2)$\boldsymbol{E}\propto q$,电场强度与场源电荷的电量成线性关系;同时,实验又表明,多个点电荷产生的合成电场等于每个点电荷单独存在时产生的电场的矢量和,从而电场强度服从迭加原理。

迭加原理在电磁场以及各种力场中是一种普遍规律。同一个空间,同一点,可以同时被许多源产生的电场共同"占据"。这是场这种特殊的物质形态与实物的一个不同之处。而且,同一点处的多个场强按矢量迭加在一起,彼此独立,互不干扰。这一特性对于电磁波的发射、接收等诸方面都具有重要意义。

对于根据电荷的分布来计算电场的这类问题(也称为场源问题或分布型问题),场强服从迭加原理就意味着从原则上解决了任意分布电荷的电场强度的计算问题,因为它们都可以看成是点电荷的电场迭加而成的

电荷的分布从理论上可分为以下几种情况:

(1)$N$ 个离散分布的点电荷

此时场点的总场强为按(2.1.3)式计算的每个点电荷在该点产生的场强的矢量和:

$$\boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^2}\boldsymbol{a}_{R_i} \tag{2.1.4}$$

(2)电荷连续分布在一块体积 $\tau$、一个表面 $S$ 或一条线 $L$ 上(图 2-2,图 2-3)。

设电荷密度的分布分别为 $\rho(\boldsymbol{r}')$(C/m³),$\rho_S(\boldsymbol{r}')$(C/m²),$\rho_l(\boldsymbol{r}')$(C/m)。若把每个带电的小块体积元 $\rho\Delta\tau$,小片面元 $\rho_S\Delta S$,小段线元 $\rho_l\Delta l$ 视为一个点电荷 $\Delta q(\mathrm{d}q)$,则由它产生的电场为 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_R$。把这样的每个点电荷的电场对整个体积、整个表面、整条线积分起来,就得到所求的总电场:

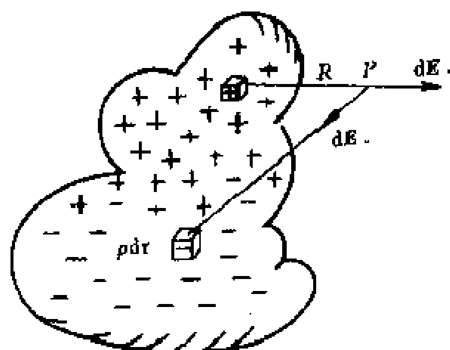



图 2-2 体电荷(如带电的云团)产生的电场

体电荷分布

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\int_\tau\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{a}_R\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\rho(\boldsymbol{r}')\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\tau \tag{2.1.5}$$

面电荷分布

$$E(r) = \int_S \frac{\rho_S(r')}{4\pi\varepsilon_0 R^2} a_R \mathrm{d}S = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \rho_S(r') \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}S \tag{2.1.6}$$

线电荷分布

$$E(r) = \int_l \frac{\rho_l(r')}{4\pi\varepsilon_0 R^2} a_R \mathrm{d}l = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \rho_l(r') \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}l \tag{2.1.7}$$

在对源点 $r'$ 的坐标积分的过程中，场点 $r$ 的坐标是常数，场点是定点，源点是动点。积分完成后，$E$ 就成为场点 $r$ 的坐标的函数。

**例 2.1** 一个半径为 $a$ 的孤立导体球，总电量为 $Q$。求球内、外的电场强度。

**解** 静电平衡时导体电荷总是分布在表面，孤立导体球的电荷则均匀分布于表面，故面密度为常数 $\rho_S = Q/4\pi a^2$，采用球坐标，令极轴通过球外任一场点 $P$，如图 2-3 所示。依(2.1.6)式，有

$$E = \int_S \frac{\rho_S R}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{Q}{4\pi a^2}\frac{R}{R^3}a^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

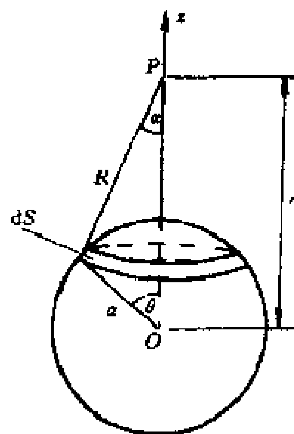


图 2-3 孤立导体球的电场

简便的办法是先对 $\varphi$ 积分，这样求得的是如图的环状带上的面电荷在 $P$ 点的合成电场，它是沿极轴方向的，故只取 $\mathrm{d}E$ 的 $z$ 分量 $\mathrm{d}E\cos\alpha$ 进行积分即可：

$$E = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\cos\alpha\sin\theta}{R^2}\mathrm{d}\theta \tag{2.1.8}$$

其中

$$\cos\alpha = \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2rR}$$

$$\cos\theta = \frac{a^2 + r^2 - R^2}{2ar}$$

所以

$$\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}(\cos\theta) = \frac{R}{ar}\mathrm{d}R$$

代入(2.1.8)式，得到

$$r \geqslant a, E = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 ar^2}\int_{r-a}^{r+a}\frac{R^2 + r^2 - a^2}{R^2}\mathrm{d}R = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 ar^2}\left(R - \frac{r^2 - a^2}{R}\right)\Bigg|_{r-a}^{r+a}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$r<a$，把上面的积分中的下限变为 $a-r$ 即可：

$$E = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 ar^2}\left(R - \frac{r^2 - a^2}{R}\right)\Bigg|_{a-r}^{a+r} = 0$$

可见导体球内部没有电场。这个特点是静电场与距离的平方成反比关系的直接结果，它也被用来从实验上验证平方反比律。早在库仑之前，开文迪什就用如下的静电实验作过验证：他将两个导体半球壳充电以后和一个内球相接触，然后再拿掉两个半球壳，检验内球，却未见带电，说明导体球内部没有电场。他因此得出了静电力服从平方反比律的结论。设库仑定律分母中 $R$ 的指数为 $2+\alpha$，开文迪什在 1771 年得到的数据是 $|\alpha|\leqslant 0.02$。现代量子电动力学的研究又发现 $R$ 的指数同光子的静止质量有关。如果这个质量为零，则 $\alpha$ 严格为零。目前实验给出光子的静止质量上限为 $10^{-48}$kg，这相当于 $|\alpha| \leqslant 10^{-16}$。

从上述计算过程也可看出，不仅是导体球，凡是一层球面对称分布的电荷，在这层电荷包围的球体积内产生的电场都为零，在球外产生的电场等效于位于球心的点电荷产生的电场。

# 2.2 静电场的基本方程

## 一、静电场的通量和散度　真空中的高斯定律

先建立一个预备概念——立体角(也称球面角)。

(1)球面元的立体角

在一个半径为 $R$ 的球面上取任意形状的一个面元 $dS_r$,就可构成以球心为顶点的一个锥体。这个锥体的空间角度就是立体角。它用$\dfrac{dS_r}{R^2}$来度量,记为 $d\Omega$,单位为球面度(sr)。

整个球面的立体角显然是 $4\pi$。

(2)非球面元 $d\boldsymbol{S}$ 对某一点 $P$ 所张的立体角

设 $\boldsymbol{R}$ 为 $d\boldsymbol{S}$ 对 $P$ 点(或 $P$ 点对 $d\boldsymbol{S}$)的相对位置矢量,$\boldsymbol{a}_R$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的单位矢量,则

$$d\Omega = \frac{d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{a}_R}{R^2}\quad(\text{sr}) \tag{2.2.1}$$

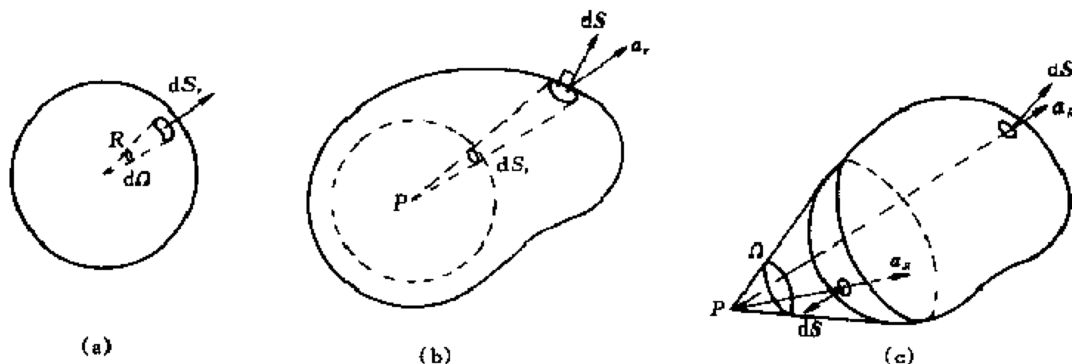



图 2-4　立体角

(a)球面元对球心的立体角;(b)闭合面对内部的点 $P$ 张的立体角;(c)闭合面对外部的点 $P$ 张的立体角。

如果以 $P$ 为球心,$r(r<R)$为半径作一个球面,则可看出 $d\Omega$ 也就是 $d\boldsymbol{S}$ 对 $P$ 点所构成的锥体在球面上割出的面元 $dS_r$ 的立体角〔图 2-4(a)〕。

一个形状任意的闭合面 $S$ 对某点 $P$ 所张的立体角有两种情况:

(1)点 $P$ 在 $S$ 之内。由图 2-4(b),显然有 $\Omega=4\pi$;

(2)点 $P$ 在 $S$ 之外,见图 2-4(c),由于 $S$ 的法线指向闭合面外,闭合面的两半(分别在锥口内外)的总球面度数恰好正负相抵消,从面必有 $\Omega=0$。

下面推导真空中的高斯定律。

如果我们在一个点电荷 $q$ 的静电场中任取一个闭合面 $S$,根据库仑定律,$\boldsymbol{E}$ 穿出 $S$ 的净通量应为

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_S \frac{q\boldsymbol{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{a}_R}{R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S d\Omega$$

根据上述关于立体角的知识,可立即得到

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \begin{cases} 0 & q\text{ 在 }S\text{ 面外} \\ q & q\text{ 在 }S\text{ 面内} \end{cases}$$

推广到多个点电荷的情形,则有

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \left(\sum_i \boldsymbol{E}_i\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_i \oint_S \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \tag{2.2.2}$$

(2.2.2)式就是真空中的高斯定律的积分形式。关于这个定律,应注意的是:

(1)等式右端的$\sum q_i$ 包括各种形式的电荷。自由电荷,在介质分子内的束缚电荷(称极化电荷),都应计人。

(2)电场强度 $\boldsymbol{E}$ 穿出 $S$ 的净通量取决于闭合面 $S$ 内的总电量,但 $\boldsymbol{E}$ 本身却不只取决于闭合面内的电荷,而是由电场中所有的电荷共同产生的。

矢量场 $\boldsymbol{E}$ 的矢线——电力线的画法见 1.3 节的规定,它是以每根电力线代表一单位的电通量。因此,从任一闭合面增发出或减少的电力线根数取决于闭合面内的总电量。并且,某点处电力线的密度越大,表明该点的电场越强;电力线上任一点处的切线方向表示该点 $\boldsymbol{E}$ 的方向。

根据(2.2.2)式,对于连续分布的体电荷则应当有

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\int_\tau \rho \mathrm{d}\tau}{\varepsilon_0}$$

而根据散度定理,又有

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}\tau$$

比较以上两个等式,得

$$\int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}\tau = \int_\tau \frac{\rho}{\varepsilon_0} \mathrm{d}\tau$$

由于空间 $\tau$ 的大小形状是任意的,因此必须有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.2.3}$$

这就是真空中高斯定律的微分形式,$\rho$ 为某点的各种形式的电荷密度之代数和。作为 $\boldsymbol{E}$ 的体积导数,$\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ 仍然是一个分布函数。$\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ 的分布就代表场源电荷的分布,(2.2.3)式比(2.2.2)式更为具体地给出了每一点处的电荷密度。注意:作为 $\boldsymbol{E}$ 的空间导数,$\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ 只存在于 $\boldsymbol{E}$ 连续分布的体积中;在 $\boldsymbol{E}$ 发生突变的边界面上,$\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ 没有意义。

从高斯定律可以看出,静电场的散度源就是电荷。正电荷相当于流速场中的"喷泉",发出电力线,而负电荷相当于"漏口",吸收电力线。只要没有电荷的空间就恒有 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$,表明在没有电荷的空间电力线不可能相交或中断,因而也被称为"电力管"。

静电场的基本方程之一就是高斯定律。但它仅反映了静电场特征的一个侧面。根据亥姆霍兹定理,还应该考察静电场特征的另一个侧面,即有无涡旋源。

### 二、静电场的环量和旋度

在例 1.7 中我们已经证明了凡是 $f(R)\boldsymbol{a}_R$ 状的矢量场都是无旋场。场强公式(2.1.3)式表明静电场正是这种场。虽然我们见到的电场图千变万化,但它们都是由点电荷的球对称辐射状场迭加而成的。由于 $\nabla \times \left(\sum_i \boldsymbol{E}_i\right) = \sum_i \left(\nabla \times \boldsymbol{E}_i\right)$,故总场的旋度仍然为零,故而静电场中不存在涡旋源,没有旋涡现象(表明静电场的电力线永远不会闭合):

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \quad (积分形式) \tag{2.2.4}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \quad (微分形式) \tag{2.2.5}$$

(2.2.4)和(2.2.5)就是静电场中关于环量和旋度的基本方程。

以上的推导清楚地表明:静电场的基本方程,静电场的有散无旋性,完全是库仑定律具有的函数形式(所反映的物理实质)所决定的,是这条实验定律在数学上的直接推论。因此,库仑定律是静电学中一条基本的定律。这个定律在后来又被科学界用大量实验反复验证过。现代高能粒子散射实验和人造卫星对地球磁场的研究证实库仑定律从 $R$ 小到$10^{-17}$m至 $R$ 大到$10^7$ m的范围都精确地成立。因而认为它在更大的范围会仍然有效。

但是,应该特别指出的是,虽然本书中高斯定律是从静电场的库仑定律导出的,但它却是电磁场中一条更为普遍的定律。即使在时变电磁场中,高斯定律在每一瞬间也成立;它不仅对静止电荷,而且对于运动电荷也成立。这已经为实验所间接证明。

例如,根据狭义相对论,以速度 $\boldsymbol{v}$ 作直线运动的点电荷的电场将如图 2-5 所示。在运动电荷 $Q$ 的前方或后方的电场将减小为

$$E_{0,\pi} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{1/2}$$

而在该运动电荷所在的垂直于运动方向的平面内,电场将增大为

$$E_{\frac{\pi}{2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{1}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{1/2}}$$

一般,在场点对点电荷 $Q$ 的相对位置矢量 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为 $\theta$ 时,场强为

$$E(\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{1-(v/c)^2}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin^2\theta\right]^{3/2}}\boldsymbol{a}_R \tag{2.2.6}$$

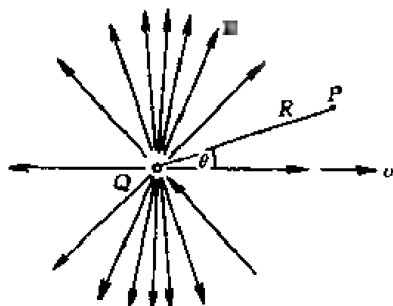


图 2-5 运动的点电荷的电场

这说明库仑定律仅适用于静止电荷,对于运动的电荷则需要修正。而作为场源电荷与其周围电场的总的关系的高斯定律却依然正确。所以,我们认为高斯定律是关于场源电荷与它的电场的关系的普遍规律。

当然,在静电场中,可以认为高斯定律和库仑定律是等价的,因为我们也可以在定义了电场强度之后由高斯定律导出库仑定律。库仑定律使我们在电荷分布已知的情况下求出场强分布,而高斯定律使我们在电场分布已知的情况下求出任一区域内、任一点处的电荷。二者是以不同的形式反映了静电场和场源电荷之间的关系的同一客观规律。

虽然高斯定律并不给出某一点的场强,但是当场的分布具有某种对称性(如球面对称、柱面对称或平面对称)时,用高斯定律求解将比用(2.1.5)~(2.1.7)式进行积分要大为简便。根据具体问题,可以采用高斯定律的积分形式(2.2.2),也可采用微分形式(2.2.3)来求解。根据亥姆霍兹定理,为了确定矢量场 $\boldsymbol{E}$ 应联立求解散度方程(2.2.3)和旋度方程(2.2.5)。但由于静电场总是自动满足旋度方程(2.2.5)的。故可单独求解散度方程(2.2.3)。(但对两维以上的场,求解 $\boldsymbol{E}$ 的散度方程并不简便。)

# 2.3 电 位

1. 电场强度和电位的关系

由于 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$,矢量场 $\boldsymbol{E}$ 必定对应着一个标量位场。我们这样来定义静电场的标量位——电位函数 $\Phi$:

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi=-\mathrm{grad}\Phi \tag{2.3.1}$$

加负号使得 $\boldsymbol{E}$ 指向电位降低的方向,从而恰是正电荷受力的方向。在直角坐标系中

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi=-\boldsymbol{a}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\boldsymbol{a}_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\boldsymbol{a}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

按照 1.5 节梯度与方向导数的关系,$\boldsymbol{E}$ 在任意方向 $t$ 上的分量为

$$E_t=-\nabla\Phi\cdot\boldsymbol{a}_t=-\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{2.3.2}$$

根据 1.5 节的论述,梯度是其标量位的空间导数,而标量位是它的梯度的线积分,故 $P$、$Q$ 两点间的电位差(电压)等于如下的线积分值:

$$U_{QP}=\Phi_Q-\Phi_P=\int_P^Q\mathrm{d}\Phi=-\int_Q^P\nabla\Phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_Q^P\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.3.3}$$

这个线积分与 $P$、$Q$ 之间的路径无关。特别,当 $P$ 点取为参考点,且参考电位 $\Phi(P)$ 取作零,则 $Q$ 点与参考点之间的电位差也就是 $Q$ 点的电位:

$$\Phi_Q=\int_Q^P\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.3.4}$$

即某点的电位等于把单位点电荷从该点位移到参考点的过程中电场力所做的功,也就是矢量场 $\boldsymbol{E}$ 从该点到参考点的第二型曲线积分值。

2. 电荷任意分布时电位的计算公式

根据(2.3.4)和库仑定律,一个点电荷 $q$ 的静电场中任一点的电位为

$$\int_Q^P\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_Q^P\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{a}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{r_Q}^{r_P}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_Q}-\frac{1}{r_P}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r_Q}+C$$

显然,把参考点 $P$ 取在无穷远(例如大地),并且取参考电位 $C=0$ 最为简便,故点电荷 $q$ 产生的电位场为

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\quad(R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \tag{2.3.5}$$

由(2.3.5)式,电位与场源电荷的电量成线性关系,从而也服从迭加原理,这就从原则上解决了任意分布的静电荷的位场的计算,从而有:

N 个点电荷 $$\Phi(\boldsymbol{r})=\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i}\quad(R_i=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|) \tag{2.3.6}$$

体电荷 $$\Phi(\boldsymbol{r})=\int_\tau\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0 R}\mathrm{d}\tau+C \tag{2.3.7}$$

面电荷 $$\Phi(\boldsymbol{r})=\int_S\frac{\rho_S(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0 R}\mathrm{d}S+C \tag{2.3.8}$$

线电荷 $$\Phi(\boldsymbol{r})=\int_l\frac{\rho_l(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0 R}\mathrm{d}l+C \tag{2.3.9}$$

对于分布在有限区域内的电荷(其总电量必然有限),都可将电位的参考点取在无穷远点,因为它们的场都是点电荷的位场的迭加,对无穷远点的电位仍然会是有界量。

由于电位的迭加是数量相加,比之矢量的迭加要简便,所以在一些电荷分布不够对称的场合,可以先通过数量迭加来计算电位。在不知道电荷分布的边值问题中,更必须借助求解关于电位的微分方程来间接求得场强。

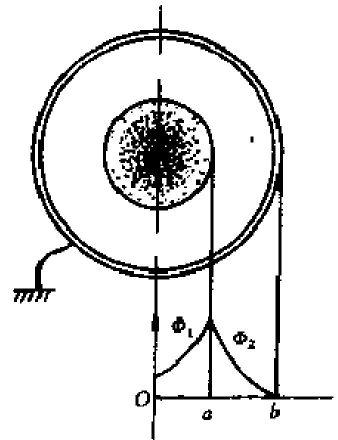


图 2-6　有屏蔽壳的带电球及电位分布

**例 2.2**　电荷按体密度 $\rho(r)=\rho_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$ 分布于一个半径为 $a$ 的球形区域内($\rho_0$ 为常数),且球体外有一层半径为 $b$ 的接地导体球壳,如图 2-6 所示。求空间各点的电场强度和电位函数。

**解**　因为电场呈球面对称分布,且方向沿径向,适合利用高斯定律求解;又因是由源求场,故宜采用其积分形式。

内球的总电量为

$$Q=\int_\tau \rho \mathrm{d}\tau=\int_0^a \rho_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)4\pi r^2 \mathrm{d}\tau=\frac{8}{15}\pi\rho_0 a^3$$

(1)当 $r\leqslant a$,作过该点的、以 $O$ 为球心、半径为 $r$ 的球面(高斯面),并应用高斯定律,得到

$$\oint_S \boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho(r)4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$4\pi r^2 E_1=\frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5a^2}\right)$$

$$\boldsymbol{E}_1(r)=\boldsymbol{a}_r\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3}-\frac{r^3}{5a^2}\right)$$

(2)当 $a<r\leqslant b$,通过该点作以 $O$ 为球心半径为 $r$ 的球面,得

$$\oint_S \boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=Q$$

$$\boldsymbol{E}_2(r)=\boldsymbol{a}_r\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

故 $a<r\leqslant b$ 时的电位为

$$\Phi_2(r)=\int_r^b E_2 \mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)$$

$r\leqslant a$ 时电位为

$$\Phi_1(r)=\int_r^a E_1 \mathrm{d}r+\int_a^b E_2 \mathrm{d}r=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{6}-\frac{r^4}{20a^2}\right)\Big|_r^a+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8\pi\rho_0 a^3}{15}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^4}{20a^2}-\frac{r^2}{6}+\frac{a^2}{4}-\frac{2a^3}{15b}\right)$$

(3)当 $r>b$ 时,由于屏蔽壳接地,作包围屏蔽壳的任意形状的闭合面 $S$ 都会有 $\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$,故必有

$$\boldsymbol{E}_3(r)=0\qquad \Phi_3(r)=\Phi(b)=0$$

如果没有屏蔽壳,并假设球离地无限远,则电位的参考点(面)不在 $r=b$ 处,而在无穷远

点。这相当于计算电位的积分限 $b\to\infty$ 的情形，在 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 的表达式中令 $b\to\infty$ 即可。

**例 2.3** 无限长同轴圆柱内、外导体半径分别为 $a$ 和 $b$，内外导体之间为空气，并加电压 $U$，如图 2-7 所示。求同轴柱间的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和单位长度的电容 $C$。

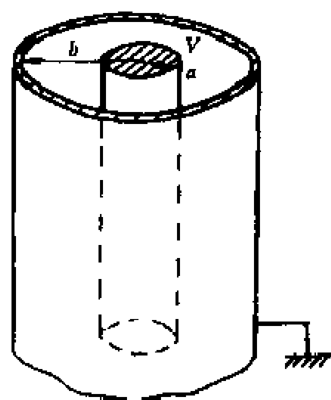


图 2-7 同轴圆柱导体

**解** 设内、外导体圆柱上单位长度的电量分别为 $\rho_l$ 及 $-\rho_l$。由于同轴线无限长，因而在 $z=C$ 的任意平面上场的分布都应相同；再由迭加原理，不难分析出这种场是径向分布、轴对称的，$\rho=C$ 为 $E$ 的等值面。基于上述分析，作单位长度的圆柱形高斯面，即可求得同轴圆柱之间的电场强度：

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E2\pi\rho = \frac{\rho_l}{\varepsilon_0}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_\rho \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho} \tag{2.3.10}$$

两圆柱间的电压为

$$U = \int_a^b \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathrm{d}\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

故

$$\rho_l = \frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln\dfrac{b}{a}} \tag{2.3.11}$$

$$E_\rho = \frac{U}{\rho\ln\dfrac{b}{a}} \tag{2.3.12}$$

单位长度的电容

$$C = \frac{\rho_l}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{b}{a}} \tag{2.3.13}$$

显然，(2.3.10)式也是无限长直线电荷(密度为 $\rho_l$)的场强公式。由于电荷的分布伸展到无穷远，这种场的电位参考点不可能取在无穷远点，一般取一个足够大的 $\rho_0$(使足以包括所关心的区域)为参考“点”，从而无限长直线(或圆柱)电荷的电位场为

$$\Phi(\rho) = \int_\rho^{\rho_0} \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho}\mathrm{d}\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_0}{\rho} \tag{2.3.14}$$

对于两根平行的、线密度分别为 $\rho_l$ 和 $-\rho_l$ 的无限长圆柱和直线电荷，也称线偶极子，其电位场应是每一根单独存在时的场的代数和：

$$\Phi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_0}{\rho_1} - \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_0}{\rho_2} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{2.3.15}$$

显然，$\Phi$ 的参考点应取在 $\rho_1=\rho_2$ 的平面上。这个场的等位面和电力线分布见图 5-17。

式(2.3.10)～(2.3.15)都是常用的结果。

## 2.4 电偶极子

一对等值异号的点电荷，相距一个相对小的距离 $l(l\ll r)$，就构成一个电偶极子。电偶

极子是一种重要的电荷系统，在分析电介质的极化和天线的辐射场等场合，都要利用这一模型。

电偶极子的电矩（简称电偶极矩）定义为

$$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$$

其中 $\boldsymbol{l}$ 的方向由 $-q$ 指向 $+q$，单位为 C·m。

图2-8表示一个电偶极子，由于我们关心的是远处的场，即 $r\gg l$ 的情形，此时偶极子已近乎一个点，故可采用球坐标，把原点置于偶极子中心，$z$ 轴与 $\boldsymbol{l}$ 相合。

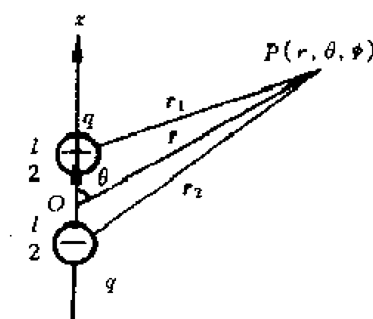



图2-8 电偶极子

一种方法是从计算电位着手来简化 $\boldsymbol{E}$ 的求解。远处任一点 $(r,\theta,\varphi)$ 处的电位为两个点电荷单独作用时的电位的迭加：

$$\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=\frac{q(r_2-r_1)}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2} \qquad (2.4.1)$$

根据余弦定理知

$$r_1=\left[r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2-rl\cos\theta\right]^{1/2}\approx r\left(1-\frac{l}{r}\cos\theta\right)^{1/2}$$

$$r_2=\left[r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2+rl\cos\theta\right]^{1/2}\approx r\left(1+\frac{l}{r}\cos\theta\right)^{1/2}$$

因为 $r\gg l$，可将 $r_1,r_2$ 用泰勒级数展开，并略去高阶项，得到

$$r_1\approx r-\frac{l}{2}\cos\theta \qquad r_2\approx r+\frac{l}{2}\cos\theta$$

故

$$r_2-r_1\approx l\cos\theta$$

$$r_1 r_2\approx r^2$$

从而

$$\Phi=\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (2.4.2)$$

也可写成

$$\Phi=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=-\frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla\frac{1}{r} \qquad (2.4.3)$$

由此得到偶极子的电场分布为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=-\nabla\Phi=-\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\\&=-\left(\boldsymbol{a}_r\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\boldsymbol{a}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\\&=\boldsymbol{a}_r\frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}+\boldsymbol{a}_\theta\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\end{aligned} \qquad (2.4.4)$$

也可表示为

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=\nabla\left[\frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] \qquad (2.4.5)$$

另一种方法是不通过电位而直接计算 $\boldsymbol{E}$，但须借助梯度算子才能将矢量叠加转化为标量叠加。把 $r_1^{-1}\approx\frac{1}{r}\left(1+\frac{l}{2r}\cos\theta\right)$，$r_2^{-1}\approx\frac{1}{r}\left(1-\frac{l}{2r}\cos\theta\right)$ 代入(2.1.3)式：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{1}{r_1}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{1}{r_2}\\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\nabla\frac{1}{r}-\nabla\left(\frac{l}{2r^2}\cos\theta\right)+\nabla\frac{1}{r}-\nabla\left(\frac{l}{2r^2}\cos\theta\right)\right]\\
&= -\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)
\end{aligned}
$$

也得到(2.4.4)式。

电偶极子场的一个特点是电场强度与 $r^3$ 成反比，比单个点电荷 $q$ 的场随距离减小得更快。这是因为从远处看 $+q$ 和 $-q$ 之间的距离近乎为零，因而二者的场近乎于相互抵消。

另一个特点是 $\Phi$、$\boldsymbol{E}$ 与 $\varphi$ 坐标无关，也就是电场具有轴对称性。这种场也叫作子午面场，意为在每个子午面（$\varphi$ 为任意常数的平面）上场的分布都相同。

某一子午面上电偶极子的电力线和等位线如图 2-9 所示。该等位线图是在直角坐标系中把坐标和电位归一化并编写计算机绘图程序而得到的：

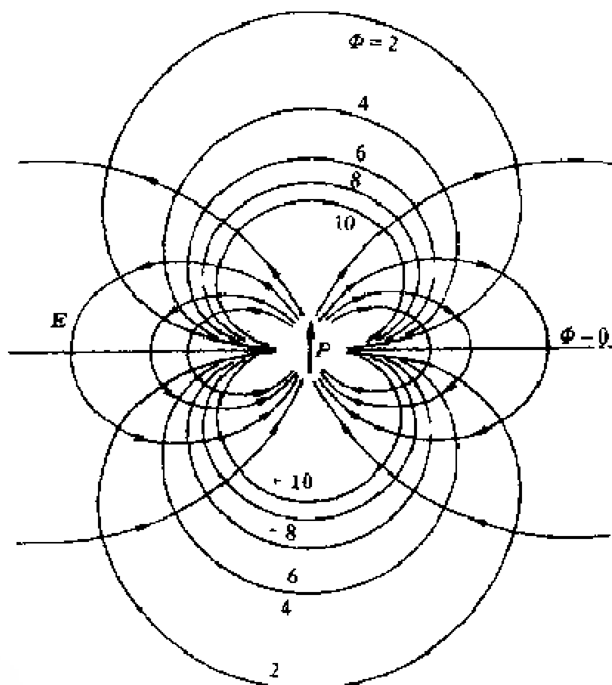



图2-9 电偶极子的电场

在直角坐标系中

$$r_1=[x^2+y^2+(z-l/2)^2]^{1/2}$$

$$r_2=[x^2+y^2+(z+l/2)^2]^{1/2}$$

令归一化值 $x=x/l$，$y=y/l$，$z=z/l$，$\Phi=\Phi\Big/\left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\right)$，(2.4.1)式就变成为

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\dfrac{l}{2}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z+\dfrac{l}{2}\right)^2}}$$

然后在 $x=0$(或 $y=0$)的子午面上，在该等位线方程中令 $\Phi$ 为一系列的常数，就可得到一个 $z\sim y$(或 $z\sim x$)曲线族——等位线族。

我们也可以在球坐标下画出 $\Phi$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的分布，见下例。

**例 2.4** 导出球坐标下电偶极子的等位线和电力线方程。

**解** 先看等位线方程。它可由(2.4.2)式得到：

$$r=\sqrt{\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\Phi}}=C\sqrt{\cos\theta}\quad\left(C=\sqrt{\frac{p}{4\pi\varepsilon_0\Phi}}\right)\tag{2.4.6a}$$

取 $C$ 为一系列不同的常数（相应于 $\Phi$ 取一系列电位值），就可画出一族 $r$ 对 $\theta$ 的曲线（等位线）。

下面推导电力线方程。某点电场强度的方向就是该点电力线的切线方向，而切线方向可以看成是矢线上该点处的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的极限方向，从而有 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=k\boldsymbol{E}$。因此，也应有 $\boldsymbol{E}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{0}$。二者都是电力线的矢量形式的微分方程。比较简单的办法是把前者在球坐标系中展开：

$$\boldsymbol{a}_r \mathrm{d}r + \boldsymbol{a}_\theta r\mathrm{d}\theta + \boldsymbol{a}_\varphi r\sin\theta\mathrm{d}\varphi = k(\boldsymbol{a}_r E_r + \boldsymbol{a}_\theta E_\theta + \boldsymbol{a}_\varphi E_\varphi)$$

两个矢量相等时每个对应分量都相等，从而得到两个等式

$$\frac{\mathrm{d}r}{E_r} = \frac{r\mathrm{d}\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta\mathrm{d}\varphi}{E_\varphi}$$

考虑到电偶极子的场没有 $E_\varphi$ 分量，并利用(2.4.4)式，就可得到

$$\frac{\mathrm{d}r}{2\cos\theta} = \frac{r\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{2\mathrm{d}(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

积分得

$$\ln r = 2\ln(\sin\theta) + \ln C'$$

$$r = C'\sin^2\theta \tag{2.4.6b}$$

(2.4.6b)式就是所求的电力线方程。取一系列的 $C'$ 值，就可得到 $r$ 对 $\theta$ 的一族电力线。

如果定义点电荷的电矩是其位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 与电量 $q$ 的乘积 $q\boldsymbol{r}$，则电偶极子的偶极矩恰是两个点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的电矩的矢量和：$q\boldsymbol{l} = q\boldsymbol{r}_+ - q\boldsymbol{r}_-$。

推广到分布电荷的情形，则总的电矩为每个点电荷或单元电荷对原点的电矩的矢量合成(迭加或积分)。

**例 2.5** 一个半径为 $a$ 的带电球壳如图 2-10 所示，其电荷面密度为 $\rho_S = \rho_0\cos\theta$($\theta$ 是极角)，计算它的偶极矩。

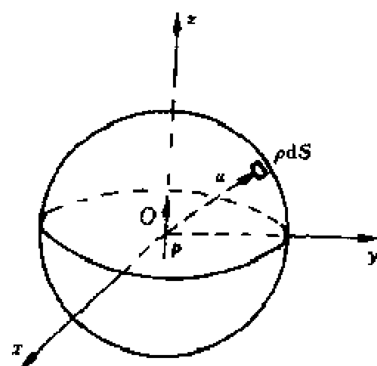


图 2-10 带电球壳的电矩

**解** 把每个球面元 $\rho_S\mathrm{d}S$ 看成一个点电荷，则该点电荷的电矩为 $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \rho_S\mathrm{d}S\,\boldsymbol{r}$。积分时应把它分解为直角坐标分量，然后各分量分别积分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \rho_S\mathrm{d}S\,\boldsymbol{r} = \rho_0\cos\theta(\boldsymbol{a}_x a\sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{a}_y a\sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{a}_z a\cos\theta)a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\boldsymbol{a}_x a\sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{a}_y a\sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{a}_z a\cos\theta)a^2\rho_0\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \rho_0 a^3\boldsymbol{a}_z\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= -\boldsymbol{a}_z 2\pi\rho_0 a^3\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi} = \boldsymbol{a}_z\frac{4\pi a^3}{3}\rho_0\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

它恰好相当于一个位于球心的电偶极子。利用(2.4.3)式，它在球外一点的电位应为

$$\Phi = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{a^3}{r^2}\cos\theta \tag{2.4.8}$$

*例 2.5 是一个正负电量恰好相等、分布又对称的例子。对于一般的、在空间区域 $\tau$ 中任意分布的电荷系统，正负电量未必相等，分布也不一定对称。我们先讨论 $\tau$ 中有 $N$ 个离散分布的点电荷的情形，如图 2-11 所示。此时空间任一点 $\boldsymbol{r}$ 的电位为

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i} \tag{2.4.9}$$

其中

$$R_i = [r^2 + r_i^2 - 2rr_i\cos\theta_i]^{1/2} = r[1 + t_i]^{1/2} \tag{2.4.10}$$

$$t_i = -2(r_i/r)\cos\theta_i + (r_i/r)^2 \tag{2.4.11}$$

假设 $P$ 点足够远，以致 $r > r_i\ (i=1,2,\cdots,N)$，根据幂级数展开式，就有

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{r}(1+t_i)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2}t_i+\frac{3}{8}t_i^2-\frac{5}{16}t_i^3+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left[1+\frac{r_i}{r}\cos\theta_i+\frac{1}{2}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2(3\cos^2\theta_i-1)+\cdots\right] \tag{2.4.12}$$

故
$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{i=1}^{N} q_i + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum_{i=1}^{N} q_i r_i \cos\theta_i + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i r_i^2}{2}(3\cos^2\theta_i-1)+\cdots \tag{2.4.13}$$

(2.4.13)式称作该电荷系统的标量位的多极展开式或多极子位。式中第一、二、三项分别是单极项 $\Phi_M$、偶极项 $\Phi_D$ 和四极项 $\Phi_Q$。当电荷为连续分布时，把上式中对离散电荷的求和相应地改为对连续电荷的积分即可。

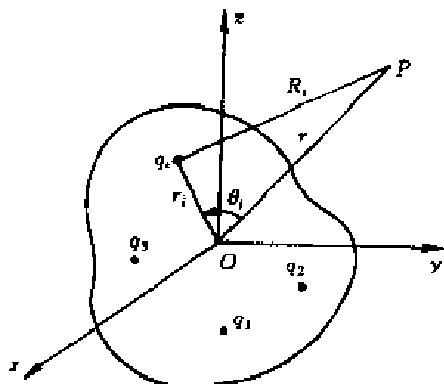



图2-11　电荷系统产生的电位的计算

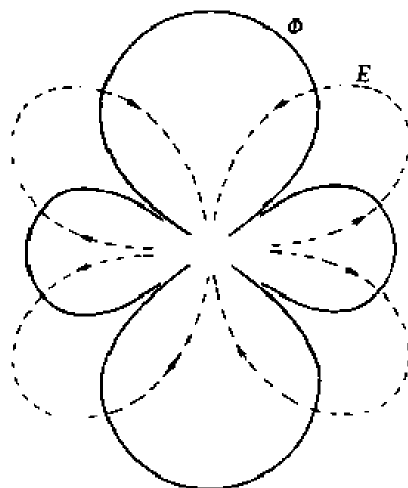



图2-12　电四极子的电力线和等位线

当整个电荷系统的净电量 $\sum q_i \neq 0$ 时，初级的、最粗略的近似，是把整个电荷系统等效为一个点电荷，也就是只取(2.4.13)式的第一项 $\Phi_M$。如果要提高精度，就应把整个系统等效为一个点电荷和一个电偶极子的场的迭加，也就是只取(2.4.13)式的前两项。当 $\Sigma q_i = 0$，则单极项为零，整个系统就可近似地等效成一个偶极子。本节前面讨论的电偶极子以及例2.5就是多极展开式中仅含偶极项的简单特例。并且，容易证明 $N=2$ 时的 $\Phi_D$ 项与表达式(2.4.2)式是一致的。

如若需要进一步提高精度，就要把多极子位的第三项——四极子位 $\Phi_Q$ 考虑进来了。电四极子或四极电矩的场分布如图2-12所示。

有趣的是，关于 $\cos\theta_i$ 的函数(2.4.13)，正符合勒让德(Legendre)多项式的形式。由

$$\frac{1}{(1-2xy+y^2)^{1/2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{P}_k(x)y^k \quad (|x|\leqslant 1, y<1) \tag{2.4.14}$$

定义的勒让德多项式 $\mathrm{P}_k(x)$ 中

$$\mathrm{P}_0(x)=1 \qquad \mathrm{P}_1(x)=x \qquad \mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \quad \cdots \tag{2.4.15}$$

若令
$$x_i = \cos\theta_i$$
则(2.4.13)式也可用勒让德多项式的形式表达出来：

$$\Phi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^{k+1}}\left[\sum_{i=1}^{N}q_i r_i^{k}\mathrm{P}_k(\cos\theta_i)\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{i=1}^{N}q_i+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum_{i=1}^{N}q_i r_i \mathrm{P}_1(\cos\theta_i)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sum_{i=1}^{N}q_i r_i^{2}\mathrm{P}_2(\cos\theta_i)+\cdots \tag{2.4.16}$$

电荷系统的原点位置取在区域 $\tau$ 内或 $\tau$ 的附近皆可。一般习惯于把原点设在正负电荷的对称中心。可以证明,电位的多极展开式(2.4.13)或(2.4.16)中的单极项只取决于电荷系统本身,与坐标原点位置的选择无关。并且可以证明,当单极项为零即系统的正负电量相等时,偶极项也不会受坐标平移的影响。

## 2.5 介质的极化　介质中的高斯定律　电位移

电介质(dielectric)就是通常所说的绝缘体。与处在电场中的导体内有大量自由电子的情况相反,理想的电介质中是无自由电子的。电子虽然不能脱离分子成为自由电子,而是束缚在分子内,但在外电场的作用下介质分子会被极化而出现极化电荷,也称束缚电荷,被极化的分子可等效为电偶极子(见图 2-16)。

在外加电场的激励下介质分子的极化可分为两类不同的机制:①无极分子的位移极化。单原子分子(如金属)、$H_2$、$N_2$ 以及 $CH_4$(甲烷)、$CCl_4$、$CO_2$ 等正、负电荷均呈对称分布的分子,在无外加电场时,正负电荷中心重合,不存在固有电矩。在有外加电场作用时,正、负电荷的中心产生微小距离,形成一个电偶极子(见图 2-13)。②有极分子的取向极化。分子具有固有电矩,但在无外电场时凌乱排列而合成电矩为零。有外加电场作用时,分子固有电矩会多少转动一个角度,使取向趋于一致而形成与外电场方向一致的合成电矩。

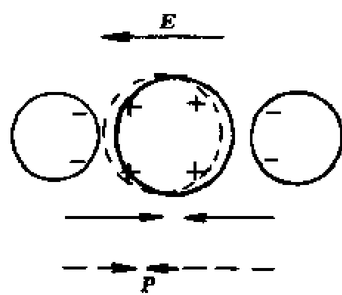



图 2-13　$CO_2$ 分子在外电场中极化产生电矩

无论上述哪一种情况,在各向同性介质中,由这些束缚电荷(或说由这些电偶极子)产生的二次电场总是与外电场反方向的,其效果是削弱原电场。所以,理想电介质中虽无自由电子而不导电,但介质中却存在着电场(比原外加电场弱)。这与理想导体中有自由电子而导电却不存在电场的情况正相反。

为了表征和度量介质极化的程度,引入极化强度这一物理量。某点 $\boldsymbol{r}$ 处的极化强度定义为

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\sum_i \boldsymbol{P}_i}{\Delta\tau}\quad(\mathrm{C/m^2}) \tag{2.5.1}$$

其中 $\sum_i \boldsymbol{P}_i$ 是 $\Delta\tau$ 体积内所有电偶极子的电矩 $\boldsymbol{P}_i$ 的矢量和,故而极化强度 $\boldsymbol{P}$ 表示某点处单位体积中的总电矩,它也是一个分布函数。若某点处的分子密度为 $N$、分子平均电矩为 $\boldsymbol{P}_{av}$,显然有

$$\boldsymbol{P}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\boldsymbol{P}_{av}N\Delta\tau}{\Delta\tau}=N\boldsymbol{P}_{av} \tag{2.5.2}$$

如果已知介质中极化强度 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ 的分布,则 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau$ 就相当于一个小电矩。于是,根据电偶极子的电位公式(2.4.3),就可写出这块介质在空间任一点产生的电位(不包括使介质极化

的外电场的电位)：

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\int_{\tau}\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau\cdot\boldsymbol{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau}\boldsymbol{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\tau \tag{2.5.3}$$

上式第二个等号后没有负号是因为 $\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)=-\nabla\left(\frac{1}{R}\right)$，见例1.9。(2.5.3)式表明：极化介质所产生的电场可以作为真空中电偶极子的电场来计算。事实上，由于分子中的电子、原子核等带电粒子的大小远比它们相互之间的距离要小得多，故可把极化电荷或束缚电荷看成真空中的电荷对。

我们也可以不利用关于电偶极子的公式，而是考虑束缚电荷的作用来求解仅由极化介质产生的电场(也称二次电场)。利用矢量恒等式

$$\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\Phi+\Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

(2.5.3)式可进一步写成为

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{\tau}\left(\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{P}}{R}\right)\mathrm{d}\tau-\int_{\tau}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}}{R}\mathrm{d}\tau\right] \tag{2.5.4}$$

其中 $\nabla'$ 表示对源点坐标求导，而不是对场点坐标求导。再由散度定理，就可得到

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S}\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}}{R}\mathrm{d}S-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}}{R}\mathrm{d}\tau \tag{2.5.5}$$

把上式的第二项和第一项分别与电位公式(2.3.7)和(2.3.8)式相比照，可看出 $-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$ 分别相当于体电荷密度和面电荷密度，只是这种电荷束缚在分子内部，不是自由电荷。因此有：

束缚电荷的体密度 $$\rho_{\mathrm{P}}=-\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{2.5.6}$$

束缚电荷的面密度 $$\rho_{\mathrm{PS}}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} \tag{2.5.7}$$

$\boldsymbol{n}$ 为该介质表面的外法线。

(2.5.5)式表明，极化介质的效应可以用介质体内出现体束缚电荷 $\rho_{\mathrm{P}}=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$ 和介质表面出现面束缚电荷 $\rho_{\mathrm{PS}}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$ 来解释。这样，极化介质产生的电场的电位除了用(2.5.3)式，也可利用已知的极化强度分布 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')$ 或束缚电荷分布 $\rho_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{r}')$ 和 $\rho_{\mathrm{PS}}(\boldsymbol{r}')$ 按(2.5.5)式来计算。

例如，一个极化强度为 $\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{a}_z\rho_0\,(r<a)$ 的均匀永久极化介质球的束缚面电荷会形成一个例2.5中的带电球壳，因为 $\rho_{\mathrm{PS}}$ 的分布恰是

$$\rho_{\mathrm{PS}}=\boldsymbol{P}_0\cdot\boldsymbol{n}=P_0\boldsymbol{a}_z\cdot\boldsymbol{a}_r=\rho_0\cos\theta$$

如果我们利用(2.5.5)式的面积分再次计算，可得到球外的电位分布恰是(2.4.8)式；还可算出球内 $z$ 轴上的电位分布：

$$\Phi=\frac{P_0 z}{3\varepsilon_0}\quad(r\leqslant a)$$

上式实际上是球内任一点的电位表达式(这需要使用5.3节的分离变量法来求解)，因而球内为匀强电场

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{a}_z=-\frac{\boldsymbol{P}_0}{3\varepsilon_0}$$

从(2.5.5)式出发可以进一步导出介质中的高斯定律。

根据电位的迭加原理，把极化介质产生的场迭加到使它产生极化的外电场上，也即把(2.5.5)式同(2.3.7)式和(2.3.8)式的两端分别相加，就可得到

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\rho_S + \rho_{PS}}{R}\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho + \rho_P}{R}\mathrm{d}\tau \tag{2.5.8}$$

上式中 $\rho_P$ 与 $\rho$ 的地位是完全相同的，因此我们应用真空中的高斯定律时应把束缚电荷 $\rho_P$ 也计入。这是比真空的情形更为复杂的一点。此时，高斯定律的微分形式应为

$$\frac{\rho + \rho_P}{\varepsilon_0} = \nabla \cdot \boldsymbol{E}$$

但是，束缚在分子内的电荷是无法测量的。为了消除实用上的不便，可把上式同(2.5.6)式两端分别相加而得到

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho$$

若引入一个辅助矢量——电位移或称电通密度(其单位为 C/m²)：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{2.5.9}$$

就可得到一个更简洁的等式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{2.5.10}$$

再利用散度定理，就可导出

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q \tag{2.5.11}$$

(2.5.10)和(2.5.11)式就是介质中高斯定律的微分形式和积分形式。该定律表明：穿过任意闭合面的电位移净通量等于闭合面内所包围的自由电荷总电量。而且，电通量的单位就是电量的单位。在不需要计算束缚电荷的问题中，使用(2.5.10)和(2.5.11)式是很方便的。

一般来说，介质的极化强度与电场强度之间的关系是很复杂的。但是，对于线性、各向同性介质来说，实验表明 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间的关系可以简单地表达为一种正比例关系：

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{2.5.12}$$

其中介质的极化率 $\chi_e$ 是一个表明介质极化程度的量，无量纲。对每种电介质而言，在场强的一定范围(不太大时)是一个常数。把(2.5.12)代入(2.5.9)，可得到电介质的本构关系或组成关系

$$\boldsymbol{D} = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{2.5.13}$$

其中的 $\varepsilon_r$ 叫作相对电容率或相对介电常数

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \tag{2.5.14}$$

$\varepsilon_r$ 是一个因介质而异的无量纲的常数，是比较各种电介质的重要参数。一些常见材料的相对电容率列于表 2.1。

**表 2.1　常见材料的相对电容率**

| 材　料 | $\varepsilon_r$ | 材　料 | $\varepsilon_r$ | 材　料 | $\varepsilon_r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 空气 | 1 | 尼龙 | 3.5 | 橡胶 | 2.3～4.0 |
| 蒸馏水 | 80 | 有机玻璃 | 3.4 | 瓷 | 5.7 |
| 海水 | 4 | 玻璃 | 4～10 | 二氧化硅 | 3.8 |
| 冰 | 4.2 | 纸 | 2～4 | 食盐 | 5.9 |
| 干土壤 | 3～4 | 云母 | 6.0 | 聚乙烯 | 2.3 |
| 酒精 | 25 | 胶木 | 5.0 | 聚四氟乙烯 | 2.1 |

$\varepsilon$ 是电介质的介电常数或电容率，单位为 F/m。

各向同性介质的 $\varepsilon$ 是标量，意味着介质的电性质与外加电场的方向无关。

各向异性介质的 $\varepsilon$ 是二阶张量，即矩阵。这类介质的性质与外加电场的方向有关。

线性介质的 $\varepsilon$ 不是场强的函数，即 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 成正比。有些介质 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间不成正比，称为非线性介质。各向异性和非线性介质的例子有石英及酒石酸钾钠、钛酸钡等铁电体材料。

均匀介质的 $\varepsilon$ 对于介质中点的坐标而言是个常数。

真空中的高斯定律(2.2.2)、(2.2.3)可以看成是介质中的高斯定律(2.5.10)、(2.5.11)在 $\varepsilon=\varepsilon_0$ 时的特例。所以，后者是比前者更为普遍适用的形式。但是当我们想计算束缚电荷时，则可能会需要真空中的高斯定律，因为在介质中的高斯定律公式里不出现束缚电荷。

关于电位移通量只与自由电荷有关这一点，我们可以作这样的定性解释：$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ 式中，$\boldsymbol{E}$ 是原电场被介质的束缚电荷的场削弱后的总电场，故而再加上与 $\boldsymbol{E}$ 同方向的 $\boldsymbol{P}$ 以后，就弥补了束缚电荷的负影响，因而使得 $\boldsymbol{D}$ 就只取决于自由电荷了。

图 2-14 显示了平行板电极之间有介质板时的 $\boldsymbol{D}$ 线、$\boldsymbol{E}$ 线和 $\boldsymbol{P}$ 线的关系。

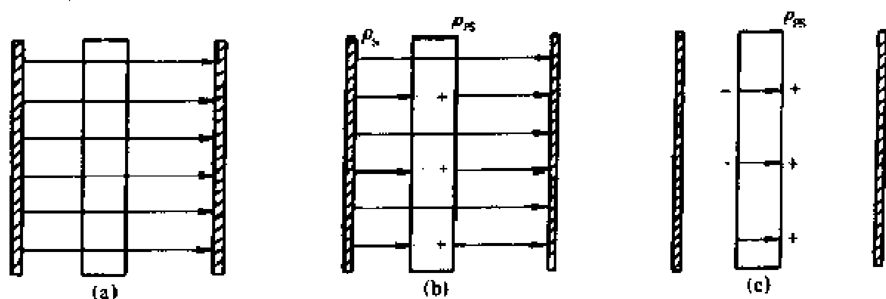



图 2-14 $\boldsymbol{D}$ 线、$\boldsymbol{E}$ 线和 $\boldsymbol{P}$ 线对照图

(a)$D$ 线；(b)$E$ 线，(c)$P$ 线。

$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$ 与 $-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$ 分别出现在(2.5.5)式中电荷面密度和体密度的位置上并非偶然。事实上，我们还可以用物理的"计数"的办法来证明它们确实表示束缚电荷的面密度和体密度。

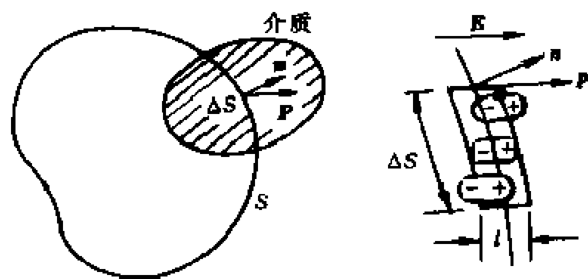



图 2-15 束缚面电荷密度的计算

如图 2-15 所示，假设我们作的高斯面 $S$ 穿过一块电介质。考虑 $S$ 上的一个以面元 $\Delta S$ 为底面，以极化分子——电偶极子的平均长度 $l$ 为斜高的小体积 $\Delta\tau=\Delta\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{l}$。如果介质分子的位置按正、负束缚电荷的距离 $l$ 的中点所在的位置而论，则可看出，凡是位于这个小体积内的偶极子，其正、负电荷都是分跨在 $\Delta S$ 的两侧的(因为高斯面是没有几何厚度的数学曲面)。反之，凡是正、负电荷分跨在 $dS$ 两侧的分子都在这个小体积内了。这个小体积中的偶极子数目为

$$n=N\Delta\tau=N\boldsymbol{l}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$$

从而伸出 $\Delta\boldsymbol{S}$ 面元的正电荷电量为

$$nq=Nq\boldsymbol{l}\cdot\Delta\boldsymbol{S}=N\boldsymbol{P}_{av}\cdot\Delta\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\Delta S$$

故束缚电荷的面密度为

$$\rho_{PS}=\frac{nq}{\Delta S}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$$

因此，穿出整个闭合面 $S$ 的束缚电荷总电量应为 $\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$，它应与 $S$ 面内包围的束缚电量等值异号(因为整个介质是中性的)。再利用散度定理，就有

$$\oint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_\tau \rho_{\mathrm{P}}\mathrm{d}\tau=\int_\tau \nabla\cdot\boldsymbol{P}\mathrm{d}\tau$$

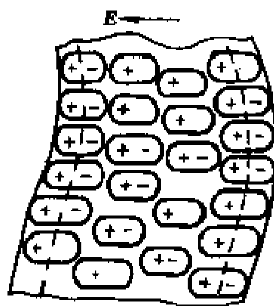


图 2 16　介质中的束缚电荷

由于 $S$ 的大小形状是任意的，故而必有体束缚电荷密度为 $\rho_{\mathrm{P}}=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$。

由束缚电荷的密度公式(2.5.7)式也可以看出，在电介质的表面上，总会有束缚面电荷的；但在介质体积中，如果介质是均匀的($\varepsilon$ 为常数)，又无自由体电荷，是不会有束缚体电荷的。图 2 16 画的是一块被极化的介质，介质体积中处处都有正、负电荷相抵消，而在介质的一侧表面上都是正电荷，相反的一侧表面上都是负电荷，无以抵消。

如若介质不均匀或介质内存在自由电荷，则介质内部会出现体束缚电荷。证明如下：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varepsilon+\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}$$

$$\rho=\boldsymbol{E}\cdot\nabla\varepsilon+\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}(\rho+\rho_{\mathrm{P}})$$

$$\rho_{\mathrm{P}}=-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\rho-\varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\frac{\nabla\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\qquad(2.5.15)$$

对于线性均匀介质，有 $\nabla\varepsilon_r=0$，故而

$$\rho_{\mathrm{P}}=-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\rho,\qquad \rho_{\mathrm{T}}=\rho+\rho_{\mathrm{P}}=\frac{\rho}{\varepsilon_r}=-\frac{\rho_{\mathrm{P}}}{\varepsilon_r-1}\qquad(2.5.16)$$

即仅当 $\rho$ 存在时才会有 $\rho_{\mathrm{P}}$ 存在，二者同时存在或同时不存在，而且异性。由(2.5.16)式，还可推知穿出任意闭合面的面束缚电荷总量 $Q_{\mathrm{PS}}$、面内包围的体束缚电荷总量 $Q_{\mathrm{P}}$ 及自由电荷量 $Q$ 之间应有类似的数量关系

$$Q_{\mathrm{PS}}=-Q_{\mathrm{P}}=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}Q,\qquad Q_{\mathrm{T}}=Q+Q_{\mathrm{P}}=\frac{Q}{\varepsilon_r}=-\frac{Q_{\mathrm{P}}}{\varepsilon_r-1}$$

对于非均匀介质，$\nabla\varepsilon\neq0$。由(2.5.15)式，即使介质内并无自由电荷，也会有

$$\rho_{\mathrm{P}}=\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}(\nabla\varepsilon)\cdot\boldsymbol{E}\neq0$$

这正是发生在不均匀的介质波导(包括光纤)中的情形。在 $\boldsymbol{E}$ 的作用下，介质的任何不均匀将导致极化的不均匀而出现微观电荷，表现为有源场。

综上所述，静电场的基本方程为：

| | (积分形式) | | (微分形式) | |
|---|---|---|---|---|
| 高斯定律 | $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=Q$ | (2.5.11) | $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ | (2.5.10) |
| 保守性 | $\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$ | (2.2.4) | $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ $(\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi)$ | (2.2.5) |
| 本构关系 | | | $D=\varepsilon E$(各向同性介质) | (2.5.13) |

## 2.6　静电场的边界条件

实际情况中，空间并非都充满同一种介质。例如，同轴电缆中会有不只一层绝缘物；所讨论的场也总是存在于各种形状和材料的界面所限定的空间中。在外加电场的作用下，介质表面上总是有束缚面电荷的，其所产生的场迭加在原电场上，使场量 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 在越过界面时发生突变。但是，这种变化也应服从静电场的基本方程。由于微分形式的基本方程要求场量连续、可微，所以在边界处只能利用积分形式的基本方程去进行分析。

图2-17描绘了场量在介质分界面处是如何变化的。介质界面处的束缚电荷会发出(终止)$\boldsymbol{E}$ 线。由于 $\boldsymbol{D}$ 线只会起止于自由电荷，故 $\boldsymbol{D}$ 线的数目不会增减。根据 $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=0$（$S$ 由界面两侧的垂直截面 $S_1$、$S_2$ 和与 $\boldsymbol{D}$ 线平行的侧面构成），穿过 $S_1$ 和 $S_2$ 的电位移通量（$\boldsymbol{D}$ 线根数）必须相等；由于 $\boldsymbol{D}$ 线发生屈折（详见下文），必有 $S_1 \neq S_2$，故分界面两侧的通量密度（表现为 $\boldsymbol{D}$ 线的密度）必不相等，也就是 $\boldsymbol{D}$ 的模一定会随着屈折而突变。

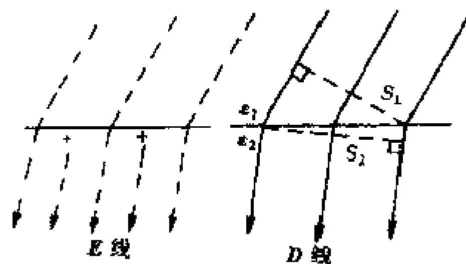



图2-17　电介质分界面处 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$ 的突变

设界面的法线由介质2指向介质1，并把分界面处的场量分解为与界面垂直的分量（法向分量）和与界面相切的分量（切向分量），分别研究两种分量各自服从何种变化规律。

1. 不同介质分界面上的法向边界条件

如图2-18所示，在分界面上取一个扁柱形闭合面。上、下底面 $\Delta S$ 与分界面平行，并跨在界面的两侧，柱高 $\Delta h\to 0$，即柱体将无限压扁成为面。对这个扁柱形闭合面应用高斯定律，得到

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=D_{1n}\Delta S-D_{2n}\Delta S=\rho_S\Delta S$$

$$D_{1n}-D_{2n}=\rho_S \quad 或 \quad \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_S \tag{2.6.1}$$

(2.6.1)式就是电介质分界面上的法向边界条件，$\rho_S$ 是分界面上的自由电荷密度。当分界面上没有自由电荷时（静电场中介质分界面上没有自由电荷），则 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量连续：

$$D_{1n}=D_{2n} \quad 或 \quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_2 \tag{2.6.2}$$

根据(2.3.2)式，应有 $D_i=\varepsilon_i E_{in}=-\varepsilon_i\dfrac{\partial\Phi_i}{\partial n}(i=1,2)$，故(2.6.1)和(2.6.2)还可分别写为如下形式

$$-\varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}+\varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}=\rho_S \tag{2.6.3}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \tag{2.6.4}$$

这就是用电位表示的法向边界条件。

2. 不同介质分界面上的切向边界条件

在分界面上取一个如图2-19的矩形闭合路径 $C$。两个长边 $\Delta l$ 与分界面平行，分别位于分界面的两侧。两个短边 $\Delta h\to 0$，从而 $C$ 所包围的矩形面将无限压缩成为线。$C$ 所围成的矩形面垂直于介质分界面，因而它的法线 $\boldsymbol{s}$ 也垂直于 $\boldsymbol{n}$。环路 $C$ 的绕行方向如箭头所示，则电场强度沿 $C$ 的环量为

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{E}_1 \cdot \Delta \boldsymbol{l} - \boldsymbol{E}_2 \cdot \Delta \boldsymbol{l} = 0$$

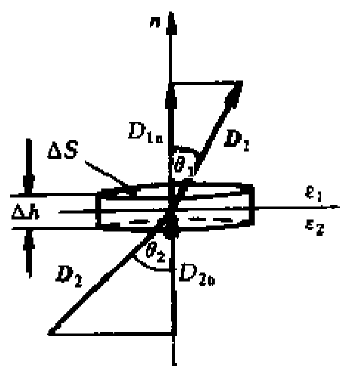
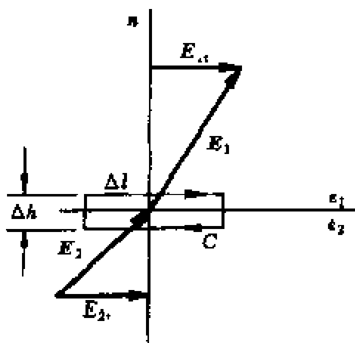



图2-18 静电场介质分界面的法向边界条件



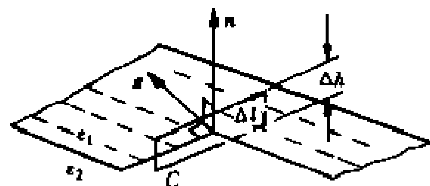




图2-19 静电场介质分界面的切向边界条件

把 $\Delta \boldsymbol{l} = \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n}\Delta l$ 代入上式得

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n})\Delta l - \boldsymbol{E}_2 \cdot (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n})\Delta l = 0$$

再利用矢量混合积的轮换性，上式可变为

$$\boldsymbol{s} \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1) - \boldsymbol{s} \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_2) = 0$$

由于环路 $C$ 是任取的，意味着其法线 $\boldsymbol{s}$ 的方向是任意的，因而必须有

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_2$$

即
$$E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta$$

或
$$E_{1t} = E_{2t} \tag{2.6.5}$$

用电位表示的切向边界条件为

$$\Phi_1 = \Phi_2 \tag{2.6.6}$$

(2.6.6)式可简单证明如下：根据(2.3.2)，可把(2.6.5)式改写为

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}$$

在界面的两侧沿着分界面的切向进行积分，得

$$\int \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \mathrm{d}t = \int \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \mathrm{d}t$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 + C$$

从数学上说，如果 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 沿着边界面上的同一条切向路径变化率相同，则可相差一个任意常数。但是从物理概念上，这个常数必须为0，否则，根据 $E\Delta h = \Delta\Phi$ 和 $\Delta h \to 0$（分界面无几何厚度），就必须有 $E \to \infty$。换言之，有限的场强在一个零距离上是积累不出电位差的，所以介质分界面两侧的电位必须相等。由此也可见，分界面上一层面电荷的存在会导致场强突变，但并不会导致电位突变。而电偶层（等密度异性的两层面电荷，相距 $l \to 0$）会导致电位突变。

由以上的分析可看出，静电场的边界条件实质上就是静电场积分形式的基本方程在介质分界面上的特殊形式或极限形式（体积压缩成面，面压缩成线时的极限形式）。

3. 折射关系

根据法向和切向边界条件(2.6.2)和(2.6.5)，很容易推出场强在界面处发生屈折时的入

射角 $\theta_2$ 和折射角 $\theta_1$ 之间的关系(参看图 2 18)：

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{D_{1t}/D_{1n}}{D_{2t}/D_{2n}}=\frac{\varepsilon_1 E_{1t}}{\varepsilon_2 E_{2t}}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{2.6.7}$$

**4. 导体表面的边界条件**

用完全类同的分析方法，只须把上述的介质 2 换成导体，就可推论出导体表面的边界条件。由于静电平衡时 $\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{E}_2=0$，当然 $D_{2n}$、$E_{2t}$ 也都为零，再把公式(2.6.1)、(2.6.5)中的下标 1 也去掉，就可得出导体表面的边界条件：

$$D_n=\rho_S \tag{2.6.8}$$

$$E_t=0 \tag{2.6.9}$$

与(2.6.8)和(2.6.9)对应的、用电位表示的边界条件分别为

$$\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}=-\rho_S \tag{2.6.10}$$

$$\Phi=\text{const}. \tag{2.6.11}$$

值得注意的是：所有的边界条件等式仅对于场量在界面处的值成立，决不能把分界面处的相等关系扩展到分界面两侧的空间中去。

在求解静电场的微分方程时，以上边界条件(也称衔接条件)用来起到定解的作用。

**例 2.6** 如图 2-20 所示的平行板电容器板极面积为 $S$，带电量分别为 $Q$ 与 $-Q$。电容器的一部分用电容率为 $\varepsilon$ 的介质填充，另一部分为空气。求电容器的电容量，空气与介质的分界面上的束缚面电荷密度及自由电荷面密度。

**解** 极板的自由电荷面密度为

$$\rho_S=Q/S$$

根据导体表面的边界条件，平行板电容器中两层介质的 $D$ 相同：

$$D_1=D_2=D=\rho_S=Q/S$$

而两层介质中的 $E$ 不相同：

$$E_1=D/\varepsilon_0=\frac{Q}{\varepsilon_0 S},\qquad E_2=D/\varepsilon=\frac{Q}{\varepsilon S}$$

极板间的电压为

$$U=E_1(h-d)+E_2 d=\frac{D(h-d)}{\varepsilon_0}+\frac{Dd}{\varepsilon}=\frac{Q}{S}\left(\frac{h-d}{\varepsilon_0}+\frac{d}{\varepsilon}\right)$$

平行板电容器的电容量为

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{\varepsilon(h-d)+\varepsilon_0 d}$$

分界面上的束缚面电荷密度可以在图 2-20 中的闭合面 $S$ 上用真空中的高斯定律算出：

$$\rho_{PS}=\varepsilon_0 E_{1n}-\varepsilon_0 E_{2n}=D_n-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}D_n=\rho_S\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{S}$$

也可利用(2.5.7)和(2.5.9)式求得

$$\rho_{PS}=P_n=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}D_n=\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\rho_S=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{S}$$

介质分界面上 $D$ 法向分量连续，没有自由面电荷：

$$\rho_S=D_1-D_2=D_{1n}-D_{2n}=0$$

**例 2.7** 驻极体(一种各向异性的电致伸缩材料,常用于制做话筒)话筒的截面正如上述平行板电容器,如图 2-21 所示。但填充的介质是一个驻极体永久极化片,厚度为 $d$,均匀极化强度为 $\boldsymbol{P}_0$。下电极固定,电位为 $u$,上电极是接地的导电薄膜,随声波振动,使两极间的距离 $h$ 随声波变化,转变为 $R$ 上的电压(也是电容器电压)$u$ 的变化。在本题中,我们简单地就某一瞬时的 $u$ 和 $h$ 值,求极板上的自由电荷电量。



图 2-20 部分填充介质的电容器

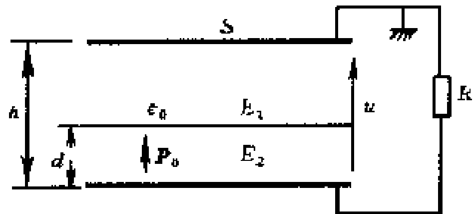


图 2-21 驻极体话筒的截面与电路示意图

**解** 联立求解与静电场的两个基本方程相应的关于 $E_1$、$E_2$ 的二元一次方程:

$$\begin{cases} E_1(h-d)+E_2 d=u \\ \varepsilon_0 E_1-\varepsilon_0 E_2=P_0 \quad (P_0=\boldsymbol{P}_0\cdot\boldsymbol{n}=-\rho_{PS}) \end{cases}$$

得

$$E_1=\frac{1}{h}(u+dP_0/\varepsilon_0)$$

$$E_2=\frac{1}{h}[u-(h-d)P_0/\varepsilon_0]$$

该解符合介质分界面上的法向边界条件:

$$D_1=\varepsilon_0 E_1=\frac{1}{h}(\varepsilon_0 u+dP_0)=\varepsilon_0 E_2+P_0=D_2$$

极板电荷为

$$Q=\rho_S S=D_1 S=D_2 S=\frac{S}{h}(\varepsilon_0 u+dP_0)$$

实际使用中,$h=h(t)$,故 $Q=Q(t)$,使电容器的充放电电流 $i=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ 流过 $R$,就可形成后续的音频放大器的激励电压 $u=Ri$。

## 2.7 泊松方程 拉普拉斯方程

前面所介绍的基本问题都是在给出了场源电荷分布(离散或连续)的情况下求解静电场,这类问题原则上都可以用库仑定律同迭加原理派生出的积分公式(2.1.4)~(2.1.7)、(2.3.6)~(2.3.9)或高斯定律来求解,称为场源问题或分布型问题。这类问题可帮助我们理解静电场的产生,但却与物理的实际有距离。这是因为,一、这类解法通常在均匀无界空间的假设下才便于应用,而实际问题总是会碰到各种各样的边界面。二、复杂形状的带电体上的电荷分布[相当于(A3.8)式中的 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$]往往是不知道的。所以,更常见、因而也更为重要的是另一类问题——在给定的边界条件下求解关于电位的微分方程。这类问题叫作边值问题。静电场边值问题的类型将在下一节详述,本节先导出关于电位的微分方程,并讨论最简单情况下的基本解法。

按照亥姆霍兹定理,求解静电场的散度和旋度方程(2.2.3)、(2.2.5)就应得到所求的矢量场 $E$。但这两个都是矢量微分方程,一般来说,求解标量位的微分方程比直接求解场矢量的微分方程要简单。标量电位 $\Phi$ 所满足的微分方程可从基本方程(2.2.5)、(2.2.3)直接导出:

根据 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，应有 $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$，再把该式代入 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$，即得到

$$\nabla\cdot(-\nabla\Phi)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

或写成
$$\nabla^2\Phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.7.1}$$

其中的二阶微分算符 $\nabla^2$ 读作拉普拉欣(Laplacian)。也有时把 $\nabla^2$ 写作 $\Delta$，称作调和算子。它在不同坐标系中的表达式如下

直角坐标系中
$$\nabla^2\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \tag{2.7.2}$$

圆柱坐标系中
$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \tag{2.7.3}$$

球坐标系中
$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \tag{2.7.4}$$

在(2.7.1)式中，当 $\rho\neq0$ 时称作泊松(Poisson)方程，当 $\rho=0$ 时称作拉普拉斯(Laplace)方程。在有电荷连续分布的区域中可求解泊松方程即非齐次二阶微分方程；而在无电荷分布的区域中应求解拉普拉斯方程，即如下的齐次二阶微分方程：

$$\nabla^2\Phi=0 \tag{2.7.5}$$

特别地，当引入点电荷的 $\delta$ 函数表示式后，对于点电荷这种奇异分布，也可以在形式上如同连续分布电荷一样写成泊松方程的形式，为积分法求解微分方程带来便利。这将在 5.7 节详述。

## 一、一维场的解法

一般情况下，泊松方程和拉普拉斯方程都是偏微分方程。但是当场的分布呈平面对称、柱面对称或球面对称时，$\Phi$ 就只与某一维坐标有关，从而(2.7.1)、(2.7.5)就退化为常微分方程。对于这种最简单的情况，可以采用直接积分法来解。一般，把一个可直接积分的 $n$ 阶微分方程积分 $n$ 次就会出现 $n$ 个积分常数，也就需要 $n$ 个定解条件来定出这些常数，才能从微分方程的带有积分常数的通解中得出满足定解条件的特解。这里 $n=2$，定解条件为边界条件(包括衔接条件)。边值问题中，有些边界条件是已知的，而有些是自然地隐含在具体问题之中的，也称为自然边界条件，需要自己去把它们分析出来加以利用。

下面是在三种不同坐标系下求解一维场的泊松方程、拉普拉斯方程的例子。

### 1. 直角坐标系中的一维场——平面对称场

当 $\Phi$ 是 $x$、$y$ 或 $z$ 的一元函数，即等位面为平行坐标面的平面时，可直接积分来求解

**例 2.8** 两个无限大平行板电极，相距 $d$，电位分别为 0 和 $V$，板间充满密度为 $\rho_0 x/d$ 的电荷，求极板间的电位分布、电场强度和极板上的电荷面密度。

**解** 建立如图 2-22 的坐标轴。在 $0<x<d$ 的区域内有连续分布的体电荷，故而 $\Phi$ 应满足如下的泊松方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0 d}$$

直接积分得

$$\Phi=-\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0 d}+C_1x+C_2$$

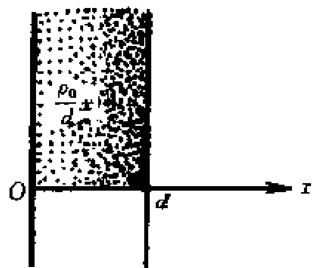


图 2-22 例 2-8 题图

当 $x=0$ 时，$\Phi=0$，故 $C_2=0$

当 $x=d$ 时，$\Phi=V$，即 $V=-\dfrac{\rho_0 d^3}{6\varepsilon_0 d}+C_1 d$，故 $C_1=\dfrac{V}{d}+\dfrac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}$

因而

$$\Phi=-\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0 d}+\left(\frac{V}{d}+\frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}\right)x$$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi=-\boldsymbol{a}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-\boldsymbol{a}_x\left[-\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0 d}3x^2+\frac{V}{d}+\frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}\right]$$

$$=\boldsymbol{a}_x\left[\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0 d}-\left(\frac{V}{d}+\frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}\right)\right]$$

$x=0$ 处 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}_x$，故有

$$\rho_{S1}=\varepsilon_0 E|_{x=0}=-\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}+\frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}\right)=-\frac{\varepsilon_0 V}{d}-\frac{\rho_0 d}{6}$$

$x=d$ 处 $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{a}_x$，故有

$$\rho_{S2}=-\varepsilon_0 E|_{x=d}=\frac{\varepsilon_0 V}{d}-\frac{\rho_0 d}{3}$$

2. 圆柱坐标系中的一维场——柱面对称场

**例 2.9** 一个半径为 $a$ 的无限长均匀带电圆柱体如图 2-23 所示。其单位长度的带电量为 $\rho_l$，求柱内外的电位分布和电场强度。

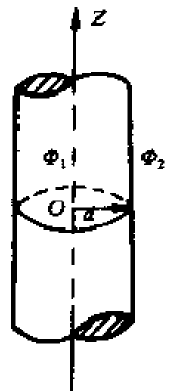



图2-23 均匀带电的无限长圆柱

**解** 设柱内外的电位分别为 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$，它们分别满足泊松方程和拉普拉斯方程：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\right)=-\frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0 a^2}\qquad(\rho\leqslant a)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi_2}{\partial\rho}\right)=0\qquad(\rho\geqslant a)$$

直接积分即可得出通解：

$$\Phi_1=-\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\rho^2+A\ln\rho+B$$

$$\Phi_2=C\ln\rho+D$$

由于电荷的分布延伸至无穷远，因而不能取无穷远为参考点；又因 $\rho\to0$ 时电荷密度为有限值而非奇异分布(例如点电荷、线电荷)，故而 $\rho=0$ 时可取 $\Phi$ 值为零，于是得到 $A=0, B=0$

从而
$$\Phi_1=-\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\rho^2$$

对于有限的体电荷密度，在界面上必有 $\rho_S=0$。这样，根据 $\rho=a$ 时的切向和法向边界条件就得到

$$\begin{cases}\Phi_1|_{\rho=a}=\Phi_2|_{\rho=a}\\ \varepsilon_0\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}C\ln a+D=-\dfrac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 a^2}a^2\\ \dfrac{C}{a}=-\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 a^2}a\end{cases}\rightarrow\begin{cases}C=-\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\\ D=-\dfrac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}+\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln a\end{cases}$$

故

$$\Phi_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{\rho} + \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}$$

从而

$$\boldsymbol{E}_1 = -\nabla\Phi_1 = -\boldsymbol{a}_\rho\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho} = \boldsymbol{a}_\rho\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\rho$$

$$\boldsymbol{E}_2 = -\nabla\Phi_2 = -\boldsymbol{a}_\rho\frac{\partial\Phi_2}{\partial\rho} = \boldsymbol{a}_\rho\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$

3. 球坐标系中的一维场——球面对称场

**例 2.10** 一个半径为 $b$ 的球形电荷云中充满密度为 $\rho(r)=b^2-r^2$ 的电荷，计算球内外的电位和电场强度。

**解** 设球内外的电位函数分别为 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$，它们分别应满足泊松方程和拉普拉斯方程，当 $r<b$ 时，有

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}(b^2-r^2)$$

直接积分，得

$$r^2\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} = -\frac{b^2r^3}{3\varepsilon_0}+\frac{r^5}{5\varepsilon_0}+C_1$$

$$\Phi_1 = -\frac{b^2r^2}{6\varepsilon_0}+\frac{r^4}{20\varepsilon_0}-\frac{C_1}{r}+C_2$$

四个待定常数需要四个边界条件才能定出。

边界条件之一：由于 $r=0$ 处 $\rho(r)$ 连续（$r=0$ 不是奇点），故当 $r\to0$ 时应有 $\Phi_1\neq\infty$，由此定出 $C_1=0$。

当 $r>b$，有

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right)=0$$

两次积分后得

$$\Phi_2 = -\frac{C_3}{r}+C_4$$

边界条件之二：因为电荷分布在有限的区域，故当 $r\to\infty$ 时应有 $\Phi_2=0$，由此定出 $C_4=0$。

另两个边界条件为 $r=b$ 时电位的法向和切向边界条件，也就是介质分界面上的衔接条件：

$$\begin{cases}\varepsilon_0\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial n}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial n}\\ \Phi_1=\Phi_2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-\dfrac{b^3}{3}+\dfrac{b^3}{5}=-\dfrac{\varepsilon_0}{b^2}C_3\\ -\dfrac{b^4}{6\varepsilon_0}+\dfrac{b^4}{20\varepsilon_0}+C_2=-\dfrac{C_3}{6}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}C_2=\dfrac{b^4}{4\varepsilon_0}\\ C_3=-\dfrac{2b^5}{15\varepsilon_0}\end{cases}$$

故有

$$\Phi_1 = -\frac{b^2r^2}{6\varepsilon_0}+\frac{r^4}{20\varepsilon_0}+\frac{b^4}{4\varepsilon_0}$$

$$\Phi_2 = \frac{2b^5}{15\varepsilon_0 r}$$

从而

$$\boldsymbol{E}_1 = -\nabla\Phi_1 = -\boldsymbol{a}_r\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}r} = \boldsymbol{a}_r\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{b^2r}{3}-\frac{r^3}{5}\right)$$

$$\boldsymbol{E}_2 = -\nabla\Phi_2 = -\boldsymbol{a}_r\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}r} = \boldsymbol{a}_r\frac{2b^5}{15\varepsilon_0 r^2}$$

从以上例题中可以看出，一维场意味着场的分布极为对称，因此，能用上述的直接积分法求解的场一般也都可以用高斯定律来求解。

二维以上的复杂边值问题的解法将在第5章介绍。例如2.5节提到的均匀极化介质球，球内外空间的位场就可在 $\rho_S=\rho_0\cos\theta$ 的边界条件下求解二维的拉普拉斯方程而得到。比起例2.5计算合成电矩、电偶极子的位场的方法和按(2.5.5)式对束缚面电荷积分的方法，按边值问题求解是更为优越的方法。

### 二、二维场的图解法

用解析法严格地求解微分方程一般只适用于一些比较简单、规则的边界。实际问题中涉及的边界形状极其复杂，以致不可能用解析法来严格求解，有必要寻求其他的解法。除了各种数值解法以外，图解法也不失为一种简单易行而且形象的近似解法。这种解法具有相当的实际意义，因此在这里作一简单介绍。

图解法的适用范围是二维场。其中一种情况是电场强度既没有 $z$ 分量，也不随 $z$ 而变的、平行于 $xy$ 面的电场，即平行平面场（例如平行输电线、同轴线的场），另一种是旋转形电极所产生的与 $\varphi$ 坐标无关的子午平面场。

图解法的实质是用作图的方法求出满足边界条件的微分方程的近似解答。所以，作图的原则在于必须符合静电场的基本方程和边界条件。

1. 作图的原理和准则

我们重点讨论边界是导体、导体外的空间没有电荷、充满均匀介质的情况。电位 $\Phi$ 的分布应满足拉普拉斯方程，在导体边界处 $\Phi$ 应当等于导体的电位值。而电场强度则应满足 $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$ 的关系。根据这些基本的原理、方程，就得到画等位线和电力线的如下准则：

(1)由于电位满足拉普拉斯方程，是调和函数，表明它的各阶偏导数都是连续的，因而等位线应极其光滑。由于 $\boldsymbol{E}=-\nabla\boldsymbol{\Phi}$，$\boldsymbol{E}$ 的各分量仅为 $\Phi$ 的一阶偏导数，因而电力线也是极其光滑的。

(2)导体[电极]表面是等位面，这是导体的边界条件所决定的。

(3)电力线和等位线应处处垂直。这是因为梯度矢量沿等值面的法线方向。因此，电力线也应与导体表面垂直。

(4)由于电位是单值的（标量位场为保守场），故两条等位线不可相交。又由于 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0=0$，故电力线也不可相交；

(5)电力线和等位线构成的网孔如果很小，则应接近矩形。为了便于观察，可使成正方形。而且所有的网孔都为“相似形”，这一点可证明如下：

画等位线时，两极间的电位差 $\Phi$ 是被均分为 $n$ 等分的。设每两条相邻的等位线间的电位差为 $\Delta\Phi=\Phi/n$，几何距离为 $\Delta l$，则在图2-24中所示区域内的平均电场强度近似为

$$E=\frac{\Delta\Phi}{\Delta l} \tag{2.7.6}$$

另一方面，根据高斯定律，电场强度又可用电力线的密度来表示。取在 $z$ 方向一单位长、

沿等位面上相距 $\Delta w$ 的两根电力线间的面元 $\Delta S$，如阴影所示。因为每根电力线表示一单位的电通量 $\Psi_0$，故穿过 $\Delta S$ 的电通量为 $\Psi_0$，因而有

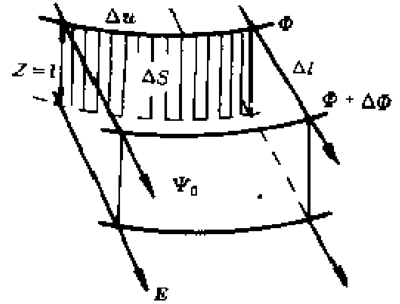


图 2-24　等位线和电力线构成的一个网孔

$$E=\frac{\Psi_0}{\Delta S}=\frac{\Psi_0}{\Delta w} \tag{2.7.7}$$

比较(2.7.6)和(2.7.7)两式，可得

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta l}=\frac{\Psi_0}{\Delta w}$$

$$\frac{\Delta l}{\Delta w}=\frac{\Delta\Phi}{\Psi_0}=\text{常数}$$

这就证明了所有的网孔无论大小，对应的两个邻边长度都成固定的比例，即都是"相似形"。由于肉眼较容易判断正方形，通常就取 $\Delta l=\Delta w$，即每个网孔的邻边都近似相等，都接近于"正方形"。

**2. 画图的步骤**

(1)根据场的对称性，可只画场图的一部分，如图 2-25 所示；

(2)等位线和 $E$ 线都从场分布较为均匀处画起。把总的电位差分成几等分，越靠近导体表面的等位线与导体表面形状越相似，然后逐渐演变开去；

(3)电力线与导体表面、与等位线处处垂直(导体的尖端和尖角处实际上总有一个微小的平面，因此仍然是垂直于电力线的)，同时又要保持每个网孔尽可能接近于"正方形"。为了同时满足这两个条件(意味着满足静电场的两个基本方程)，就需要多次、反复调整等位线和 $E$ 线的位置、形状。先根据经验粗略地画出，然后反复修正。此外，若把大网孔一次又一次地均分，所有的小网孔应该还都是正方形，这是对图形是否正确的一个检验方法。显然，网格划分得越细，所得的解就越精确。

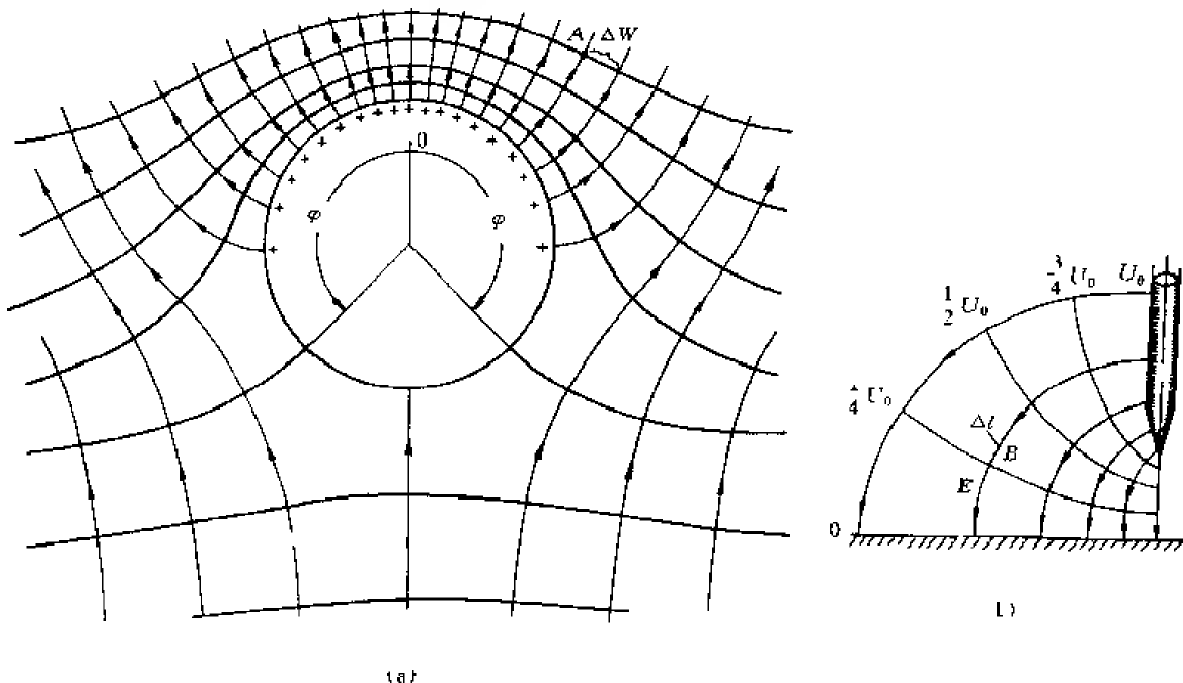


图 2-25　二维场的等位线、电力线图

(a)均匀电场中的无限长带电导体圆柱的平行平面场；(b)旋转形针状电极的子午平面场。

图2-25中带有箭头的为电力线($\boldsymbol{E}$的矢线)。图2-25(a)中$\varphi_c$表示电力线由[自导体]发出过渡到[向导体]流入的转变点。

3. 电场强度的计算

根据画好的场图可近似计算某点[例如图2-25(b)的$B$点]的电场强度

(1)根据$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$计算$E$

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta l} = \frac{U_0}{m\Delta l} \tag{2.7.8}$$

其中$m$为两电极间的电位差$U_0$的等分数,$\Delta\Phi$为两条相邻等位线间的电位差(V),$\Delta l$是点$B$处两条相邻等位线间的距离(m)。

(2)根据高斯定律计算$E$

以图2-25(a)中的点$A$为例。假设能知道圆柱在$z$方向单位长度上$-\varphi_c \leqslant \varphi \leqslant \varphi_c$区域内带的正电量$Q$,在电场图上数出这同一区域内发出的电力线总数,设为$K$条,则发出的$\boldsymbol{E}$通量就是$K\Psi_0$。根据高斯定律,有

$$K\Psi_0 = \frac{Q}{\varepsilon}$$

因此,$\boldsymbol{E}$通量的密度为

$$\boldsymbol{K} = \frac{\Psi_0}{\Delta W} = \frac{Q}{\varepsilon K\Delta W}$$

$\Delta W$是某点$A$处两条相邻电力线间的间距(m)。由上式可看出$E \propto \dfrac{1}{\Delta W}$,即某点的电场强度正比于该点处电力线的密集程度。

## 2.8 格林定理 唯一性定理

### 一、格林定理

格林定理即格林公式是电磁学中的常用公式,是求解边值问题的重要工具。它是由散度定理直接导出的。散度定理

$$\int_\tau \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\tau = \oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

既然是一个矢量恒等式,其中矢量场$\boldsymbol{A}$的形式就是任意的(只要它满足连续、可微的条件),因而我们不妨令散度定理中的$\boldsymbol{A} = \Phi\nabla\Psi$,$\Phi$和$\Psi$是区域$\tau$中的两个任意的标量场。根据矢量恒等式(A2.2),有

$$\nabla\cdot(\Phi\nabla\Psi) = \Phi\nabla^2\Psi + \nabla\Phi\cdot\nabla\Psi \tag{2.8.1}$$

由(1.5.5)式,有

$$\Phi\nabla\Psi\cdot\boldsymbol{n} = \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n} \tag{2.8.2}$$

将(2.8.1)和(2.8.2)代入散度定理,就得到格林第一恒等式

$$\int_\tau(\Phi\nabla^2\Psi + \nabla\Phi\cdot\nabla\Psi)\mathrm{d}\tau = \oint_S \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{2.8.3}$$

如果把(2.8.3)式中$\Phi$与$\Psi$的位置对调一下,再与(2.8.3)式相减,便可得到

$$\int_{\tau}(\Phi\nabla^2\Psi-\Psi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}\tau=\oint_S\left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}-\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{2.8.4}$$

这就是格林第二恒等式或格林定理。在唯一性定理的证明以及用积分法求解电磁场的边值问题中,格林定理都起着重要的作用。

### 二、唯一性定理 静电场边值问题的三种类型

静态场的唯一性定理指出:满足给定边界条件的泊松方程、拉普拉斯方程的解是唯一的。实践也证明,在给定了媒质和带电体几何参数的某一区域内,若所有边界上的电位值或导体的总电量给定了,该区域内的电位分布也就唯一确定了。2.7 节所介绍的是几个最简单的求边值问题的唯一解的例子。下面我们将更一般地介绍静电场边值问题的三种类型,并在每一种边界条件下证明泊松方程和拉普拉斯方程的解是唯一的。

1. 第一类边界条件(Dirichlet 边界条件)

这类边值问题中,整个边界上的电位函数是已知的。下面我们先证明在这种边界条件下拉普拉斯方程的解是唯一的。

在格林第一恒等式(2.8.3)中,我们不妨令 $\Psi=\Phi$,$\Phi$ 即是所欲求解的电位函数。于是就有

$$\int_{\tau}(\Phi\nabla^2\Phi+\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi)\mathrm{d}\tau=\oint_S\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

因为 $\Phi$ 满足 $\nabla^2\Phi=0$,故上式变为

$$\int_{\tau}|\nabla\Phi|^2\mathrm{d}\tau=\oint_S\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

我们用反证法。假设拉普拉斯方程的解不是唯一的,即它有两个解 $\Phi$ 及 $\Phi'$。因为拉普拉斯方程是线性微分方程,所以差场 $\Phi^*=\Phi-\Phi'$ 也应满足拉普拉斯方程,故有

$$\int_{\tau}|\nabla\Phi^*|^2\mathrm{d}\tau=\oint_S\Phi^*\frac{\partial\Phi^*}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{2.8.5}$$

因为 $\Phi$ 和 $\Phi'$ 在边界面 $S$ 上都满足相同的第一类边界条件,所以在 $S$ 上应有 $\Phi^*=\Phi-\Phi'=0$,故

$$\int_{\tau}|\nabla\Phi^*|^2\mathrm{d}\tau=0 \tag{2.8.6}$$

因为 $|\nabla\Phi^*|^2$ 是非负的,故必须有 $\nabla\Phi^*=0$,即 $\Phi^*=$常数。但因在边界 $S$ 上 $\Phi^*=0$,故在 $\tau$ 中也必有 $\Phi^*=0$。这就证明了 $\Phi=\Phi'$,即解是唯一的。

2. 第二类边界条件(Neumann 边界条件)

这类边值问题中,整个边界上电位的法向导数 $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ 是已知的。下面证明在这种边界条件之下拉普拉斯方程的解是唯一的。

采用同上的反证法,在边界 $S$ 上会得到 $\frac{\partial\Phi^*}{\partial n}=\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\frac{\partial\Phi'}{\partial n}=0$;代入(2.8.5)式后同样也得到(2.8.6)式,因而解也是唯一的。

3. 第三类边界条件——混合边界条件(Robbin 边界条件)

在这类边值问题中,一部分边界上已知的是电位,另一部分边界上已知的是电位的法向导数。对于这种混合边界条件下拉普拉斯方程的解的唯一性证明,只需把(2.8.5)式右边的边界

$S$ 划分成两部分边界之和，对两部分边界分别施用 1 和 2 中的证明。此时，在(2.8.5)式右边一部分边界上有 $\Phi^* = 0$，另一部分边界上 $\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} = 0$，因而在整个边界 $S$ 上都有 $\Phi^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} = 0$，于是(2.8.6)式成立，解仍是唯一的。

关于泊松方程解的唯一性的证明，仍然采用反证法。假设有两个解 $\Phi$ 及 $\Phi$ 都满足边界条件和泊松方程

$$\nabla^2 \Phi = -\rho/\varepsilon_0$$
$$\nabla^2 \Phi = -\rho/\varepsilon_0$$

把两式相减，就得到 $\nabla^2 \Phi^* = 0$，即 $\Phi^*$ 应是拉普拉斯方程的解。于是，剩下来的证明过程与上述完全相同，不再重复。

关于导体边界，前述的三类边值问题应相地变为：已知各导体表面的电位；已知各导体的总电量(因为 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ 与导体表面的电荷密度分布相联系)；一部分导体已知电位，另一部分导体已知电量。

亥姆霍兹定理的数学表达式（A3.8）所隐含的边界条件 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ 对于静电场而言实际上是面电荷分布，它相当于上面的第二类边界条件（$\rho_S = \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n} = -\varepsilon\frac{\partial \Phi}{\partial n}$）。虽然更常见的边界条件是第一类，但电位的分布也是由电荷的分布产生的，二者相互制约，因而事实上与亥姆霍兹定理是不矛盾的。并且，在同一个问题中的同一部分界面上，这些不同类型的边界条件只有一个是独立的，不能同时给出两类相互矛盾的边界条件，这将导致方程（2.7.5）、（2.7.1）无解。

唯一性定理提出了使泊松方程、拉普拉斯方程成为定解问题的充分必要条件。在求解边值问题之前，应该首先判断边界条件是否足够。当必要的条件都具备时，就可以断定解是唯一的，即使用不同的方法得到了不同形式的解，它们也必定是等价的。不管我们通过什么办法找到了一种解，它满足泊松方程或拉普拉斯方程，而又符合给定的边界条件，那么它必定就是我们所要的解。唯一性定理的重要性就在于它给了我们一个理论上的根据，为求解静态场的边值问题提供了极大的便利和灵活性，使各种特殊的、巧妙的解法得以成立。下面的试探法就是一例。进一步的举例见第 5 章。

**例 2.11** 一个孤立导体球半径为 $a$，球的一半埋入介电常数为 $\varepsilon$ 的无限大均匀介质中，另一半在空气中，如图 2-26 所示，导体球电位为 $V$，求介质和空气中的电位、电场和该导体球的电容。

**解** 方法一、用试探法，即先假设解的形式，再检验它是否满足所有的边界条件(包括介质分界面上的边界条件)。由于分界面是沿着径向、和电力线相切的，并且两半球电位相同，因而我们根据经验假设

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{k}{r}$$

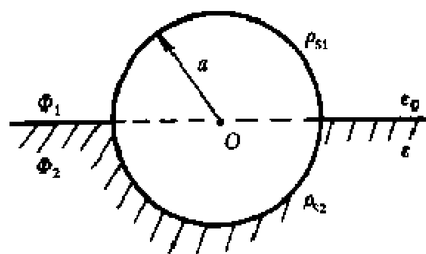


图 2-26 例 2-11 题图

显然，$\Phi_1$、$\Phi_2$ 满足拉氏方程并满足导体球电位为常数、在无穷远电位为零的边界条件。并且，由 $\Phi|_{r=a} = V$ 的边界条件可算出待定常数为 $k = aV$，故

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{aV}{r}$$

于是
$$E = E_r = -\nabla\left(\frac{aV}{r}\right) = a_r\frac{aV}{r^2}$$

容易看出：当不同介质的界面沿着 $E$ 线，无论怎样划分，分成几部分，$\Phi$、$E$ 的分布都是上述结果，不会改变单一均匀介质时的 $\Phi$、$E$ 分布，只是各部分的 $D$ 不相同。相反，若介质分界面沿着等位面，则不会改变均匀介质时的 $Q$、$D$ 分布，如例 2.6 和例 2.7 的情形。

再看介质分界面上的情况。由于 $E = a_r E_r$ 与界面相切，且 $E_r$ 与 $\varphi$ 无关，故满足 $E_{1t} = E_{1r} = E_{2r} = E_{2t}$。又由于没有 $E_\varphi$ 分量，故 $D_{1n} = D_{2n} = D_\varphi = 0$，满足分界面上电场的法向边界条件，所以试探解为真实解。

在球的两部分表面上
$$\rho_{S1} = D_{1n} = \varepsilon E_{1r}|_{r=a} = \varepsilon_0 V/a$$
$$\rho_{S2} = D_{2n} = \varepsilon_0 E_{2r}|_{r=a} = \varepsilon_0 V/a$$

故整个导体球的带电量为
$$Q = (\rho_{S1} + \rho_{S2})2\pi a^2 = 2\pi aV(\varepsilon_0 + \varepsilon)$$

于是该孤立导体球的电容为
$$C = \frac{Q}{V} = 2\pi a(\varepsilon_0 + \varepsilon)$$

电介质之所以使电容量增大，是由于介质的极化电荷 $\rho_{PS}$ 在相邻电极上感应出电荷而使电量 $Q$ 增加。

方法二、如 2.7 节所述，凡用一维拉普拉斯方程能解的，一般也可用高斯定律求解。设球带电量为 $Q$，做半径 $r>a$ 的高斯面，得
$$\oint_S D\cdot dS = D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = Q$$

两半球等电位，故
$$\int_r^\infty \frac{D_1}{\varepsilon_0}dr = \int_r^\infty \frac{D_2}{\varepsilon}dr = V$$

以上两方面的限制条件包含了关于 $D_1$、$D_2$、$Q$ 的三元一次方程，可联立解之。

方法三、转化为"路"的问题，把整个球的电容视为两个半球与无穷远(大地)之间的电容之并联：$C = C_1 + C_2 = 2\pi\varepsilon_0 a + 2\pi\varepsilon a$；而若介质界面是"平行"于电极表面的，为球面 $r = C$，则可视为两层电容串联。

## 2.9 多导体系统 部分电容

在电路理论中我们已熟悉两个导体之间的电容是指这对导体上所带的等量异号电荷与这两个导体之间的电压(电位差)之比
$$C = \frac{Q}{U} \tag{2.9.1}$$
加的电压越高，导体上储存的电量越大。但是它们的比值 $C$ 就与所带电量无关了，而是一个只取决于两个导体的几何参数(形状、大小、相互位置)以及空间介质的常数。这正如一个水库的容量只取决于其大小形状，而与其中现存的水量无关。

一个孤立导体的电容则可以看成是它与无穷远的另一导体(一般指大地)之间的电容，因

此应等于这导体所带电量与其对大地的电位(差)之比：

$$C=\frac{Q}{\Phi} \tag{2.9.2}$$

例如，半径为 $a$、带电量为 $Q$ 的孤立导体球的电位为$\frac{Q}{4\pi\varepsilon a}$，故而其电容为 $4\pi\varepsilon a$。

二个以上的导体称为多导体系统。它由 $N(N\geqslant2)$ 个导体与大地构成；把大地也看成导体，并取其电位为零。我们所讨论的多导体系统，都已理想化为静电独立系统。静电独立系统是指所有的电位移线都起于系统内的正电荷而止于系统内的负电荷的系统，它与外界的静电感应微弱到可以忽略不计。多导体系统中将把两个导体间电容的概念加以推广。

设导体间都是线性介质，第 $i$ 个导体带的电量为$q_i$，电位为 $\Phi_i(i=1,2,\cdots,N)$，则每个导体的电位可利用迭加原理求得：

$$\begin{aligned}\Phi_1&=p_{11}q_1+p_{12}q_2+\cdots+p_{1N}q_N\\ \Phi_2&=p_{21}q_1+p_{22}q_2+\cdots+p_{2N}q_N\\ &\vdots\\ \Phi_N&=p_{N1}q_1+p_{N2}q_2+\cdots+p_{NN}q_N\end{aligned} \tag{2.9.3}$$

上式中 $p_{ij}$ 都是常数，称为电位系数。每个电位系数都与所有导体的几何条件有关，因为每个导体上的电荷 $q_j$ 在空间产生的电位如何分布显然与其他导体的存在和几何条件有关。(2.9.3)式也可以更简洁地写成矩阵的形式：

$$\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \vdots\\ \Phi_N\end{bmatrix}=[p_{ij}]\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_N\end{bmatrix} \tag{2.9.4}$$

对上述 $N$ 元一次代数方程求解，就得到

$$\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_N\end{bmatrix}=[\beta_{ij}]\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \vdots\\ \Phi_N\end{bmatrix} \tag{2.9.5}$$

式中 $\beta_{ij}$ 也是与各导体几何条件都有关的常数。当 $i=j$ 时，$\beta_{11}$、$\beta_{22}$、$\cdots$、$\beta_{NN}$，称为电容系数；$i\neq j$ 时，如 $\beta_{21}$、$\beta_{31}$、$\cdots$，称为感应系数，因为它表示不同导体之间静电感应的程度。可以证明(从略)，感应系数具有互易性，即 $\beta_{ij}=\beta_{ji}$。其物理解释是明显的—因为静电感应是相互的。

引入部分电容 $C_{ij}=-\beta_{ij}$ 和 $C_{ii}=\beta_{i1}+\beta_{i2}+\cdots+\beta_{iN}$，则方程(2.9.5)可改写为

$$\begin{aligned}q_1&=(\beta_{11}+\beta_{12}+\cdots+\beta_{1N})\Phi_1-\beta_{12}(\Phi_1-\Phi_2)+\beta_{13}(\Phi_1-\Phi_3)+\cdots+\beta_{1N}(\Phi_1-\Phi_N)\\ &=C_{11}\Phi_1+C_{12}(\Phi_1-\Phi_2)+C_{13}(\Phi_1-\Phi_3)+\cdots+C_{1N}(\Phi_1-\Phi_N)\\ q_2&=C_{21}(\Phi_2-\Phi_1)+C_{22}\Phi_2+C_{23}(\Phi_2-\Phi_3)+\cdots+C_{2N}(\Phi_2-\Phi_N)\\ &\vdots\\ q_N&=C_{N1}(\Phi_N-\Phi_1)+C_{N2}(\Phi_N-\Phi_2)+C_{N3}(\Phi_N-\Phi_3)+\cdots+C_{NN}\Phi_N\end{aligned} \tag{2.9.6}$$

该式表明任一导体上的电量都是由 $N$ 部分电量构成的。例如图 2-27 导体 1 的电量中的第一部分 $q_{11}=C_{11}\Phi_1$ 是导体 1 与大地之间共有的一对等量异号电荷，它与导体 1 对地的电位差成正比，比值 $C_{11}=\frac{q_1}{\Phi_1}$ 就是它与地之间存在的部分电容；第二部分 $q_{12}=C_{12}(\Phi_1-\Phi_2)=C_{12}\Phi_{12}$

是导体 1 与 2 之间共有的一对等量异号电荷，它与导体 1、2 之间的电压 $\Phi_{12}$ 成正比，比值 $C_{12}=\frac{q_{12}}{\Phi_{12}}$ 是导体 1、2 之间的部分电容；等等。导体与地之间的电容 $C_{ii}$ 称为自有部分电容；两导体之间的电容 $C_{ij}=C_{ji}$ 称为互有部分电容。注意：每一个部分电容不仅与相关的两个导体有关，而且也与所有其他导体的几何条件有关。

部分电容概念的重要性之一在于它指出了电容概念的本质：不只是电容器件才具有电容，而是任何导体与地之间、任意两个导体之间都可能存在电容。只要是一个导体上所带的电荷发出的电力线所能到达的导体，也即只要是与该导体有静电感应的导体，与该导体之间都存在电容（而理论上电力线是能到达无穷远的）。这一概念在场的变化越快、电路频率越高的场合越显重要。只有在两导体之间彼此被静电屏蔽开来的情况下，二者之间是不存在电容的。静电屏蔽有两个条件，一是屏蔽导体必须包围所要屏蔽的区域，二是屏蔽导体必须接地。这些都可以利用(2.9.5)式加以证明。

部分电容可以从电位系数算出（从略），也可以用实验测定。

当有二个以上导体时，计算任意两个导体间的电容都必须当作多导体系统来处理，即都必须考虑其他导体的存在；任意两个导体（设为导体 $i$ 和导体 $j$）之间的电容（记为 $C_{ij}^{*}$）都是指整个电容电路（电容网络）在这两个导体之间呈现的总电容；计算 $C_{ij}^{*}$ 时所计入的电量也不仅仅是这两个导体之间的一对等量异号电荷，而是按(2.9.6)式所表示的导体 $i$、$j$ 上的总电量 $q_i$ 和 $q_j$。以 $q_i$ 为例，它是导体 $i$ 上的所有“部分电量”$q_{ik}=C_{ik}(\Phi_i-\Phi_k)(k=1\sim N)$的代数和，而每个“部分电量”$q_{ik}$ 都有与它对应的等量异号电荷 $-q_{ik}$ 在该多导体系统中的另一个导体 $k$（$k=i$ 时为大地）上，而 $C_{ik}(k=1,2,\cdots,N)$在 $C_{ij}^{*}$ 的计算中都作为电容网络中的“元件”而被计入了。同理，$C_{jk}(k=1,2,\cdots,N)$也都被计入了。

引入电容以至部分电容的又一个重要意义，在于可以把导体系统看成由各个部分电容构成的电路，从而把“场”的问题转化为“路”的问题来更为容易地求解。

例如，计算图 2-28 所示的两条离地面不远的平行输电线之间的电容时，应当把电线与地面之间的部分电容（也就是与大地之间的静电感应）也计入，并可按 $C_{12}$、$C_{11}$、$C_{22}$ 构成的电容电路来计算。又例如图 2-29 中的内导体 1，因为被导体 2 包围，它与导体 3 之间的部分电容 $C_{13}=0$，与地之间的自有部分电容 $C_{11}=0$。但由于导体 2 未接地，考虑到图中的电容网络的存在，导体 1 与 3 之间仍存在着电容，并未被彼此屏蔽开来。导体 1 和导体 3、和大地之间的电容都可根据该图的电容网络来计算。

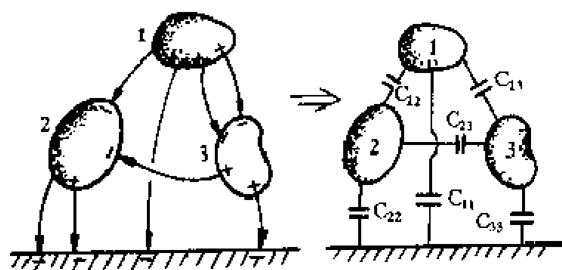


图 2-27　多导体系统的部分电容

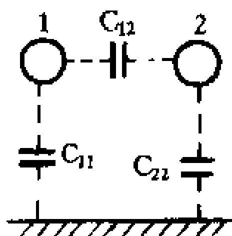


图 2-28　地面附近的双线输电线

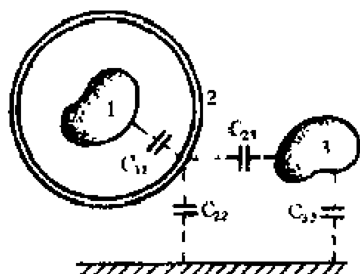


图 2-29　屏蔽壳未接地时内外导体间有电容

## 2.10 静电场能量　静电力

### 1. 静电能

电场最基本的特征是对电荷有作用力，能驱使电荷产生位移而对电荷做功，说明电场具有能量。电场的能量来源于建立电荷系统的过程中外界提供的能量。给导体充电时电源做的功就是外力做功的一种体现。把电源从零开始给电荷系统连续充电的过程分解成无数元过程，就可算出整个系统的能量；而这里我们将从库仑力、电位能等更为基本的概念出发来推导静电场能量的计算公式。

我们先推导点电荷系的静电能量，再推广到连续分布的电荷系统。假设空间介质为均匀、线性的。点电荷系的能量以它们彼此相距无限远时为零。

先从两个点电荷讨论起。当局外力把 $q_i$ 从无限远移到与 $q_j$ 相距 $R_{ij}$ 之近时，需要克服电场力做的功为

$$W_{ij}=\frac{q_iq_j}{4\pi\varepsilon R_{ij}}$$

它是这一对电荷的互有电位能。它可以看成是 $q_i$ 在 $q_j$ 所产生的静电场中的位能，也可以看成是 $q_j$ 在 $q_i$ 所产生的电场中的位能。因为从相对运动的观点，也完全可以认为 $q_i$ 未动，而是 $q_j$ 从无限远被移到了 $q_i$ 附近。因此 $W_{ij}$ 是这对电荷所共有的。另外，在移动中，我们假设速度极慢，这样速度和加速度都认为是零；同时，假设摩擦力也为零。这样，在整个过程中局外力就始终与电场力等值反向；又由于静电力的保守性（$\boldsymbol{E}$ 为无旋场），局外力做的功就全部变成了电荷的电位能。

现在我们把 $N$ 个点电荷的系统中所有的电荷对都计入，则整个系统的电位能为

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j W_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_iq_j}{4\pi\varepsilon R_{ij}}\tag{2.10.1}$$

$i\neq j$ 是因为一个点电荷不能向它自己施加力。对它做功的局外力是克服除它以外的所有电荷产生的电场力而对它做功的。另外，我们把 $i$ 和 $j$ 分别由 1 取到 $N$ 时，显然每一对电荷都被取到了两次，也就是每对电荷的互有位能都被重复计算了，因而(2.10.1)式中乘有系数1/2。

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{4\pi\varepsilon R_{ij}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i\Phi_i\tag{2.10.2}$$

当电荷为连续分布时，(2.10.2)式中对离散点电荷的求和就应改变为对所有的体积、表面或线上的连续分布电荷 $\mathrm{d}q$ 积分。以在空间 $\tau$ 中连续分布的体电荷 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 为例

$$W_e=\frac{1}{2}\int_\tau\rho(\boldsymbol{r}')\Phi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int_\tau\rho\Phi\mathrm{d}\tau\tag{2.10.3}$$

上式中 $\tau$ 可扩展为整个空间，这是因为 $\rho=0$ 的空间对积分的贡献为零，不影响积分结果。

如果是 $N$ 个导体的静电系统，由于导体是等位体，也可以用(2.10.2)式计算导体系统的静电能。此时式中 $q_i$ 应代表第 $i$ 个导体的总电量，$\Phi_i$ 为该导体的电位。

特别，当 $N=2$ 即电容器的情形，由(2.10.2)式可得到电容器中的静电能为

$$W_e=\frac{1}{2}q(\Phi_1-\Phi_2)=\frac{1}{2}qU=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\tag{2.10.4}$$

(2.10.3)式容易给人一种错觉，即静电能只是带电系统才具有。事实上，静电能存在于所

有电场不为零的空间。下面我们来推导静电能量的另一表示式——用场量来表示的计算公式。

将 $\rho=\nabla\cdot\boldsymbol{D}$ 代入(2.10.3)式，并利用矢量恒等式(A2.2)和散度定理，可得

$$W_e=\frac{1}{2}\int_\tau(\nabla\cdot\boldsymbol{D})\Phi\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int_\tau[\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{D})-\nabla\Phi\cdot\boldsymbol{D}]\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2}\oint_S\Phi\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\frac{1}{2}\int_\tau\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}\tau$$

由于上式中的 $\tau$ 可扩展到整个空间，包围这个空间的界面 $S$ 将趋于无限大。电荷分布的区域总是有限的，因而当 $S$ 无限扩大时，$S$ 上的点与电荷之间的距离 $R\to\infty$。由于 $\Phi\propto\frac{1}{R}$，$D\propto\frac{1}{R^2}$，故 $\Phi D\propto\frac{1}{R^3}$，而 $S$ 的面积正比于 $R^2$，故上式中的第一项将趋于消失，于是得到

$$W_e=\frac{1}{2}\int_\tau\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}\tau \tag{2.10.5a}$$

对于各向同性介质，可把 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ 代入上式而得到

$$W_e=\frac{1}{2}\int_\tau\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\int_\tau\varepsilon E^2\mathrm{d}\tau \tag{2.10.5b}$$

(2.10.5)式表明，只要空间某点 $\boldsymbol{E}\neq0$ 就对能量的积分有贡献，可见静电能量是分布于整个的静电场中，是场的能量(关于这一点，将在第6章作更详细的阐述)。静电能量密度为

$$w_e=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2 \tag{2.10.6}$$

由于 $w_e\propto E^2$，电场的能量是不服从迭加原理的。

关于静电能和静电力有几条重要的定理或规律，它们都是符合我们的实际经验、感性认识的，也都是能从理论上严格证明的。现简要介绍如下：

(1)与机械位能总是趋向于减小的性质相似，静电平衡也是以静电能量达到最小为特征的。汤姆生定理指出，在各向同性的线性媒质中，加在一个固定的导体系统上的电荷在导体表面上的分布总是使建立起来的静电场的能量成为最小。换言之，满足场方程及导体的边界条件的场将具有最小的电场能(证明从略)。

(2)将一个不带电体(无论导体或介质)引入静止电荷的电场中，总是使场的能量减小。一个最简单的例子可以帮助理解这一规律，如图2-30的弧形板电容器中插入不带电的弧形导体板 $M$ 后，导体之外的空间中 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 都未变化，但电场所占的空间即储能空间却减小了，所以电容器中的静电能减少了。

(3)置于静电场中的带电体，仅靠电场力的作用是不可能保持稳定平衡状态的(恩绍定理)。

稳定平衡是指由于外界因素使物体偏离平衡位置后，它总是趋向于自动地恢复到原先的平衡位置。而静电场中带电体的情况却与此相反，恩绍定理表明了它不到达边界或无穷远是不会自动稳定住的。这一点可如下证明：

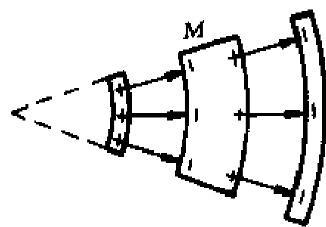


图2-30 不带电体引入静电场

设在 $n$ 个固定导体上的电荷所产生的电场之中不存在体电荷，即 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$，$\nabla^2\Phi=0$，则电位的极值就只可能在这些导体的边界面上或无穷远处达到。如若

不然，假设在电场之中有电位的极大(小)值，则电位的三个偏导数$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$、$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$就都必须为负(正)，因而一定不会满足拉普拉斯方程$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0$。这一点还可利用电力线作出直观的解释：因为$\nabla \cdot \boldsymbol{E}=0$，场中不会有$\boldsymbol{E}$线的交点(即$\boldsymbol{E}$线构成"电力管")，$\boldsymbol{E}$线只会在边界上发出或终止。又因为$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$，当沿着$\boldsymbol{E}$线从一个边界走向另一个边界的过程中，$\Phi$只会不断升高或降低，故$\Phi$的极值只能在边界上达到。

根据汤姆生定理，场中如有正(负)点电荷，它总是要趋向电位的极小(大)值点，以求电场能量达到最小，所以总是向着边界和无穷远而去，不会自动稳定在电场之中。由此可知电场中的带电体也会是同样的情况。

把不带电体引入电场，如前所述，会使场的能量减小。该物体上的感应电荷或极化电荷会在电场力的作用之下使该物体向着使场能量最小的位置运动，也是不稳定的。例如，图2-29中的不带电导体$M$将会自动向左侧极板靠拢，直至碰壁。读者不难自行证明此时$W_e$最小。

(4)静电场中电介质的受力方向将使其向着使电场能量减小的方向运动。

假设被引入某电场中的电介质的电容率为$\varepsilon_2$，体积为$\tau_2$，该介质以外的体积为$\tau_1$，电容率为$\varepsilon_1$，介质引入之前和之后体积$\tau_2$中的场强分别为$E_1$和$E_2$，可以证明(参考文献[10])：介质在该电场中的能量就是引入介质后整个电场空间$\tau_1+\tau_2$中静电能量的增量。它等于

$$W_e=\frac{1}{2}\int_{\tau_2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2\mathrm{d}\tau \tag{2.10.7}$$

如果我们假设电场中原为空气即$\varepsilon_1=\varepsilon_0$，上式的含义可看得更为明显，它表明介质的引入使静电能增量为负。相应地，由$\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}_1=(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}_1$，(2.10.7)式可改写为

$$W_e=-\frac{1}{2}\int_{\tau_2}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}_2\mathrm{d}\tau \tag{2.10.8}$$

表明引入的电介质中电场能量密度为负。

由于电介质的运动方向是使静电能量减小，按照(2.10.7)式，如果$\varepsilon_2>\varepsilon_1$，由介质占的体积$\tau_2$应趋向于扩大，电介质将向着场强较大(介电常数较小)的区域移动，即被吸入场内。反之，若$\varepsilon_2<\varepsilon_1$，介质将被推出场外。

2．静电力

下面介绍计算静电力的虚位移法。

静电力原则上可用库仑定律计算，但实际上极为繁琐，因而常常希望有更简单的办法。联想到力学中用物体位能的空间变化率来计算力，静电场中也可以用电位能的空间变化率来计算静电力，这种方法称为虚位移法。

对于一个任意的、固定的导体系统，我们假想第$i$个导体沿着$x$方向产生一个微小的位移$\Delta x$(所谓虚位移)，而其余导体都不动。由于这一位移，整个电场能的变化为$\Delta W_e$。这分为以下两种情况：

(1)假设导体系统中各导体上的电量保持不变，这相当于所有导体都与电源断开的情形。既然没有了外界的能量来源，电场力做的机械功就只能来自于电场能量的减小。故应有

$$F\Delta x=-\Delta W_e$$

负号表示静电力$F$做的机械功来自于电场能的减少。因而

$$F = -\frac{\partial W_e}{\partial x}\Big|_{q=\text{const}} \tag{2.10.9}$$

(2)假设各导体的电位保持不变。这相当于各导体与电源保持连接的情形,因为这样才能维持恒定电压。由于导体 $i$ 位移了 $\Delta x$,它与各导体之间的电容将改变,从而各导体上的电量都要随之改变,为此电源将做功,其值为

$$\Delta W_e = \sum_j \Phi_j \Delta q_j$$

而根据(2.10.2)式,电场能量的增量仅为 $\Delta W_e = \frac{1}{2}\sum_j \Phi_j \Delta q_j$ ,它只占了电源做的功的一半。根据能量守恒原理,另一半就是对导体 $i$ 做的机械功,故有

$$F\Delta x = \Delta W_e = \frac{1}{2}\sum_j \Phi_j \Delta q_j$$

$$F = \frac{\partial W_e}{\partial x}\Big|_{\Phi=\text{const}} \tag{2.10.10}$$

两种假设下的计算结果当然应该是相同的。

若把导体视为一个质点,位置矢量为 $\boldsymbol{r}$,从而更一般地把虚位移写为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,则有

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mp \mathrm{d}W_e$$

根据(1.5.2)式,就可得到导体受力的更一般的表达式:

$$\boldsymbol{F} = -\nabla W_e|_{q=\text{const}} \tag{2.10.11}$$

$$\boldsymbol{F} = \nabla W_e|_{\Phi=\text{const}} \tag{2.10.12}$$

特别,对于电容器,根据(2.10.4)式,在一、二两种假设下电容器的 $\Delta W_e$ 都只会是由电容的变化引起的,因而有

$$\boldsymbol{F}_c = -\nabla\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = \frac{Q^2}{2C^2}\nabla C|_{Q=\text{const}} \tag{2.10.13}$$

$$\boldsymbol{F}_c = \nabla\left(\frac{CU^2}{2}\right) = \frac{U^2}{2}\nabla C|_{U=\text{const}} \tag{2.10.14}$$

**例 2.12** 一个半径为 $a$、带电量为 $Q$ 的孤立导体球被切成相等的两半(图 2-31),求这两半间的相互作用力。

**解** 该球被切开后仍是等位体,设为 $\Phi$,球面积记为 $S$;我们先求单位球面的受力 $\boldsymbol{f}$。其方法有多种:

方法一、根据(2.10.2)式,该带电系统的能量为

$$W_e = \frac{1}{2}Q\Phi = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon r}\Big|_{r=a}$$

把上式代入(2.10.11)式,得

$$\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{F}}{S} = -\frac{\nabla W_e}{S}\Big|_{Q=\text{const}} = -\frac{\boldsymbol{a}_r}{4\pi r^2}\frac{\partial W_e}{\partial r}\Big|_{r=a} = -\frac{\boldsymbol{a}_r}{4\pi r^2}\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\Big|_{r=a}$$

$$= \boldsymbol{a}_r\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{Q}{4\pi a^2}\right)^2 = \boldsymbol{a}_r\frac{1}{2}DE = \boldsymbol{a}_r\frac{1}{2}\rho_S E \tag{2.10.15}$$

方法二、该孤立导体球的电容为 $C = 4\pi\varepsilon r|_{r=a}$,代入(2.10.13)式,得

$$\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{F}}{S} = \frac{1}{S}\frac{Q^2}{2C^2}\nabla C\Big|_{Q=\text{const}} = \frac{\boldsymbol{a}_r}{4\pi r^2}\frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial}{\partial r}(4\pi\varepsilon r)\Big|_{r=a}$$

$$= \frac{\boldsymbol{a}_r}{2\varepsilon}\left(\frac{Q}{4\pi a^2}\right)^2 = \boldsymbol{a}_r\frac{D^2}{2\varepsilon}$$

方法三、计算图2-30虚线所示的微分扩张体积中静电能量的变化(参见例2.13)。

最后,单位表面受的静电力 $\boldsymbol{f}$ 沿 $z$ 方向的分力为

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{a}_z=\frac{D^2}{2\varepsilon}\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{a}_z=\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{Q}{4\pi a^2}\right)^2\cos\theta$$

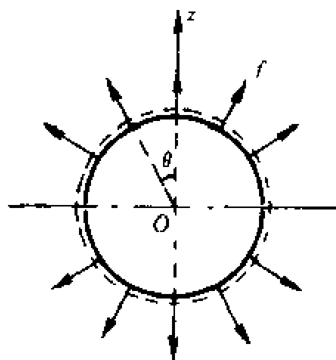



图2-31 切成两半的带电导体球

上半球面 $A$ 受的合力为

$$\boldsymbol{a}_z\int_A\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}A=\boldsymbol{a}_z\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{Q}{4\pi a^2}\right)^2\frac{\cos\theta}{2\varepsilon}a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{Q}{4\pi a^2}\right)^2\cdot2\pi a^2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin2\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\boldsymbol{a}_z\frac{Q^2}{32\pi\varepsilon a^2}$$

**例2.13** 图2-32是一个任意的导体表面。求单位表面受的静电力。

**解** 我们先规定 $x$ 轴沿某点的外法线方向,并假设导体不接电源。假想某点处的表面元 $\Delta S$ 在电场力的作用下位移了 $\Delta x$。由于导体外为储能空间,导体表面向外扩张 $\Delta V=\Delta S\Delta x$ 将使体积元 $\Delta V$ 中原有的电场能变为零,因而使电场储能减少:

$$\Delta W_e=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\Delta V=\frac{1}{2}\rho_S E\Delta S\Delta x$$

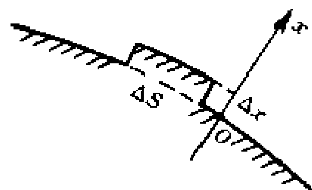



图2-32 任意导体表面受的静电力

依(2.10.9)式,得

$$F=-\frac{\Delta W_e}{\Delta x}\bigg|_{Q=\text{const}}=\frac{1}{2}\rho_S E\Delta S$$

$$f=F/\Delta S=\frac{1}{2}\rho_S E$$

正值表示力沿着 $x$ 轴正方向,是使金属表面向外扩张的力。

上式表明,(2.10.15)式实际上适用于任意的导体表面。可以看出,这个力不等于单位表面的电量 $\rho_S$ 与场强 $\boldsymbol{E}$ 的乘积。但这并不与库仑定律矛盾,因为这里的场强 $\boldsymbol{E}$ 包括了面元上的电荷本身所产生的电场在内,而用库仑定律计算面元受力时的电场强度是除受力面元以外的其他电荷产生的电场。

**例2.14** 如图2-33所示平行板电容器中填充了一部分介质,求介质受的力。

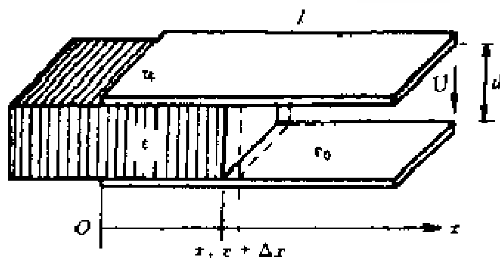



图2-33 平行板电容器中介质片的受力

**解** 宏观介质在电场中受的力实质上是介质中微观极化电荷所受电场力的合力,所以与导体受的电场力用同样方法计算。

该平行板电容器中的储能总量(忽略边缘效应)为

$$W_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2(l-x)wd+\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{U}{d}\right)^2xwd$$

假设极板的电压不变,并假想介质沿 $x$ 轴位移 $\Delta x$,则依(2.10.10)式,有

$$F=\frac{\partial W_e}{\partial x}\bigg|_{\Phi=\text{const}}=\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{U}{d}\right)^2wd-\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2wd$$

$$=\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon_0)E^2wd$$

也可以采用例 2.13 的只计算微分体积 $\Delta xwd$ 中的电场能变化量的方法。

由于 $\varepsilon>\varepsilon_0$，上式为正值，表明静电力 $\boldsymbol{F}$ 沿 $x$ 轴正方向，即介质将被吸入电容器。

## 习 题 2

2.1 两个点电荷 $q$ 和 $-q$ 分别位于正 $y$ 轴和正 $x$ 轴上距原点为 $a$ 处，求：

①$Z$ 轴上任一点处 $\boldsymbol{E}$ 的单位矢量 $\boldsymbol{a}_E$；

②平面 $y=x$ 上任一点的 $\boldsymbol{a}_E$。

2.2 位于 $xy$ 面的带电细圆环以原点为圆心，电荷线密度为 $\rho_l$，求：

①位于 $z$ 轴上任一点的点电荷 $q$ 受的作用力 $\boldsymbol{F}$；

②由 $x\leqslant 0$ 和 $x\geqslant 0$ 的半个圆环分别在原点产生的电场强度。

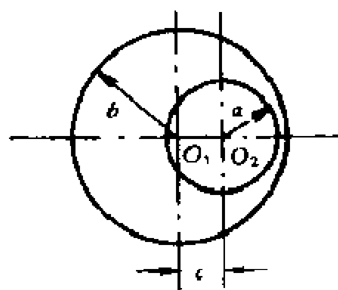
*2.3 两个平行的共轴细导体圆环相距为 $b$，半径均为 $a$。移电荷 $q$ 至两个圆环中心处需做的功分别为 $W_1$ 和 $W_2$，试求两圆环所带电荷 $Q_1$ 和 $Q_2$。

2.4 卢瑟福在 1911 年采用的原子模型为：半径为 $r_a$ 的球体积中均匀布着总电量为 $-ze$ 的电子云，球心有一正电荷 $ze$（$z$ 为原子序数，e 是质子的电量），试证明他得到的原子内电场和电位的表示式：

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_r\frac{ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{r}{r_a^3}\right)$$

$$\Phi=\frac{ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{3}{2r_a}+\frac{r^2}{2r_a^3}\right)$$

2.5 如题 2.5 图所示的两个轴线平行的无限长圆柱面之间有体密度为 $\rho_v$ 的电荷均匀分布，其余部分为空气，无电荷，$a+c<b$。求空间各点的电场强度。




题 2.5 图

2.6 计算在电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_x y+\boldsymbol{a}_y x$ 中把一个 $-2\mu C$ 的电荷沿以下两种路径从点(2,1,-1)移到点(8,2,-1)所做的功：

①沿曲线 $x=2y^2$；

②沿连接该两点的直线。

2.7 大气中各点电场强度的经验分布为 $\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{a}_z E_0(Ae^{-\alpha z}+Be^{-\beta z})$，$z$ 为从当地的地平面算起的高度；所有的经验常数 $A$、$B$、$\alpha$、$\beta$ 皆为正数。求大气中电荷密度的经验分布，并问它是正电荷还是负电荷？

2.8 已知空间电场分布如下，求空间各点的电荷密度：

①$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\boldsymbol{a}_\rho E_0\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^3 & (0<\rho<a)\\ 0 & (a<\rho)\end{cases}$

②$E_r=2A\cos\theta/r^3$，$E_\theta=A\sin\theta/r^3$，$E_\varphi=0(r>0)$；并问②的场源是何种电荷系统？

2.9 空间存在着匀强电场 $\boldsymbol{E}$，试证其电位可表示成 $\Phi=-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{r}+\Phi_0$（$\Phi_0$ 为任意常数，$\boldsymbol{r}$ 为场点的位置矢量）。

2.10 以下矢量场是不是静电场的一种可能的分布？若是，找出其电位 $\Phi$ 的函数式：

①$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_x(yz-2x)+\boldsymbol{a}_y xz+\boldsymbol{a}_z xy$

②$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x x^2 y+\boldsymbol{a}_y x y^2+\boldsymbol{a}_z e^{-\beta z}\cos\alpha x$（$\alpha$、$\beta$ 为常数）

2.11 以下标量场是不是静电场的一种可能的电位分布?

①$(\sin kx \sin ly)e^{-hz}$  $(h^2=k^2+l^2)$

②$\rho^n(\cos n\varphi+\sin n\varphi)$

③$r\cos\theta$, $r^{-2}\cos\theta$

④$e^{-y}\cosh x$  $(y>0)$

*2.12 如果不引入电位,静电问题也可通过直接求解 $\boldsymbol{E}$ 的微分方程来解决。

①求证:在有源区和无源区 $\boldsymbol{E}$ 满足的微分方程分别是

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\nabla(\rho_T/\varepsilon_0)\quad(\rho_T=\rho+\rho_P)$$

和

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=0$$

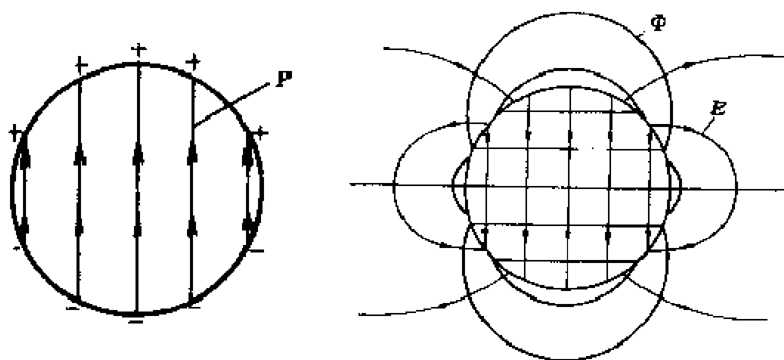
其中 $\nabla^2\boldsymbol{E}$ 代表 $\boldsymbol{a}_x\nabla^2E_x+\boldsymbol{a}_y\nabla^2E_y+\boldsymbol{a}_z\nabla^2E_z$;

②求证:$\boldsymbol{E}$ 的解是

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{\nabla'\rho_T}{R}\mathrm{d}\tau$$

(提示:可分别求解每个直角分量的方程再矢量合成,也可由 $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi=-\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{\rho_T}{R}\mathrm{d}\tau\right)$ 导出。)

2.13 有一半径为 $a$ 的永久极化介质球,球心在原点,均匀极化强度为 $P$,平行于 $z$ 轴,球外为空气,如题 2.13 图所示。




题 2.13图

①求束缚电荷面密度 $\rho_{PS}$;

②求 $z$ 轴上任一点由束缚面电荷产生的电位和电场强度;

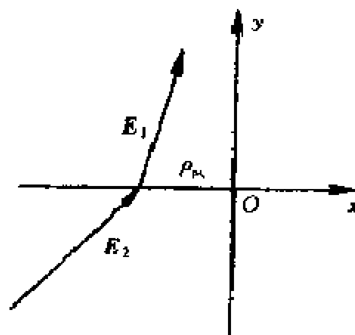
③如果把介质的分布反过来——球内为空腔,球外为无限大永久均匀极化介质——①、②的解答会如何变化?

2.14 半径为 $b$ 的介质球内有一个同心的半径为 $a$ 的球形空腔,空腔内和球外为空气,介质的介电常数为 $\varepsilon$,极化强度为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{a}_r kr$,$k$ 与 $r$ 为常数,求:

①束缚电荷的体密度的面密度;

②自由电荷密度;

③空腔内任一点的电位。




题 2.16图

2.15 两种电介质的分界面为 $z=0$ 的平面,$\varepsilon_{r1}=2$,$\varepsilon_{r2}=$

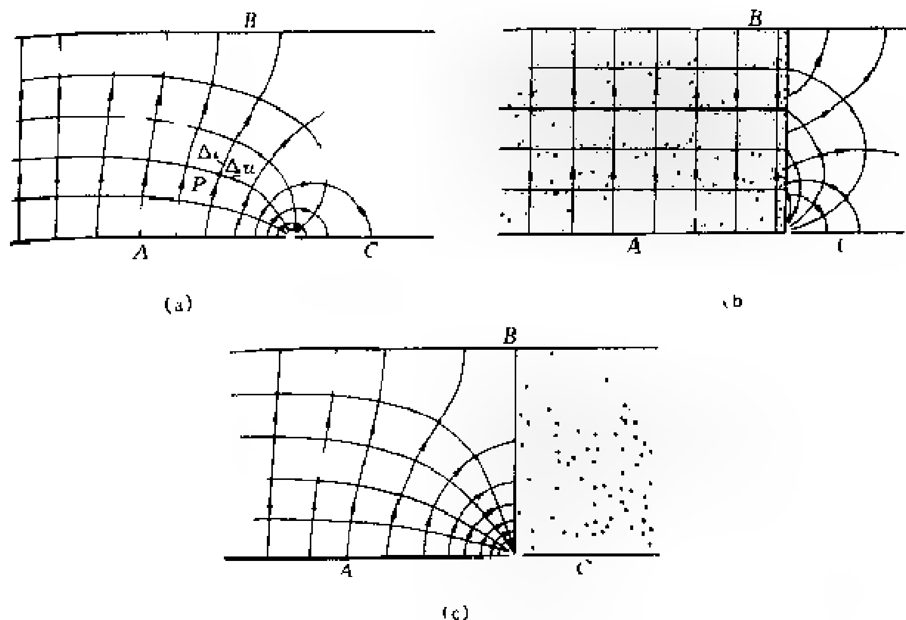
3，如果已知介质 1 中：

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{a}_x 2y - \boldsymbol{a}_y 3x + \boldsymbol{a}_z(5+z)$$

我们能求出介质 2 中哪些地方的 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 呢？能求出介质 2 中任意点的 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 吗？

2.16　在 $y=0$ 的介质分界面上电场强度的矢线若如题 2.16 图所示，问介质分界面上的束缚电荷 $\rho_{PS}$ 应是正的还是负的？试证明之。

2.17　参见题 2.17 图所示由 $A$、$B$ 板组成的平行板电容器：$A$ 板电位为 $U$，$B$、$C$ 两板接地。




题 2.17 图

(1)图(a)为板间介质均匀时的电力线、等位线分布。问电位为零处场强是否也为零？为何？并用 2.7 节的图解法在以下两种情况下计算 $P$ 点处的 $E$(假设介质为空气)：

①已知 $U=20\ \text{kV}$，$P$ 点处 $\Delta l = 0.8\ \text{cm}$；

②已知极板 $A$ 上发出的 10 根电力线相应于 $Q=3.54\times10^{-9}\ \text{C}$ 的电量，$P$ 点处 $\Delta w = 0.8\ \text{cm}$；

(2)设极板 $A$、$B$ 间为介质 1($\varepsilon_1$)，$B$、$C$ 间为介质 2($\varepsilon_2$)，图(b)、(c)中场的分布特点如下：

①当电容器内为高电容率材料，即 $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ 时场的分布如图(b)所示：介质分界面处 $\boldsymbol{E}$ 趋向于与界面相切，$E_{1n}\to 0$，$E_{2n}\neq 0$；

②当电容器外为高电容率材料，即 $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$ 时场的分布如图(c)所示：介质分界面处 $\boldsymbol{E}$ 趋向于与界面垂直，$E_{1t} = E_{2t}\to 0$，2 区为等位体。

试运用静电场的知识对以上现象作出解释。

2.18　半径为 $a$ 的薄导体壳的内表面涂了一层绝缘膜，球内充满总电量为 $Q$ 的电荷，绝缘膜外的壳上又另充了电量 $Q$。已知球内部电场为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_r(r/a)^4$，求：

①球内电荷分布；

②球壳外表面上的电荷分布；

③球壳的电位；

④球心的电位。

2.19 电场中有一半径为 $a$ 的圆柱体，已知圆柱内外的电位分布为

$$\Phi = 0 \qquad (\rho < a)$$

$$\Phi = A\left(\rho - \frac{a^2}{\rho}\right)\cos\varphi \qquad (\rho > a)$$

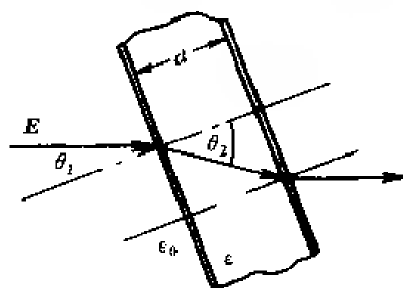
①求圆柱内外的电场强度；

②这个圆柱是什么材料制成的？表面有电荷吗？试求之。

2.20 厚度为 $d$ 的无限大介质平板，电容率为 $\varepsilon$，放置于均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 之中，$\boldsymbol{E}$ 向板的入射角为 $\theta_1$，如题 2.20 图所示。求：

①使 $\theta_2 = \pi/4$ 的 $\theta_1$ 的值；

②板的两表面的束缚电荷密度。



题 2.20 图

2.21 匀强电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中放入一个半径为 $a$ 的介质球（介电常数为 $\varepsilon$）后，球内、外的电位分布变为

$$\Phi_2 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 r \cos\theta \qquad (r < a)$$

$$\Phi_1 = -E_0 r \cos\theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} a^3 E_0 \frac{\cos\theta}{r^2} \qquad (r > a)$$

①验证球表面的边界条件，计算球表面的束缚电荷密度；

②计算球内、外的电场强度 $\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{E}_1$，并问 $r \to \infty$ 时 $\boldsymbol{E}_1$ 趋于何值？为什么？

③如果把介质的分布反过来，即在分布着匀强电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的无限大介质（$\varepsilon$）中挖一个半径为 $a$ 的空腔，球内、外的电位分布函数 $\Phi_2$、$\Phi_1$ 是何形式？（提示：可参考 5.19 题。）

2.22 电介质透镜可使电磁场平直化，如题 2.22 图所示。透镜的左侧为圆柱面的一部分，右侧为平面。若 1 区中位于圆柱面上的点（$\rho_0$，45°，$z$）处 $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{a}_\rho 5 - \boldsymbol{a}_\varphi 3$，为使 3 区中的 $\boldsymbol{E}_3$ 平行于 $x$ 轴，透镜的介电常数必须是多少？

2.23 在各向同性、线性但非均匀的介质中，问以下的等式中哪些仍然成立：

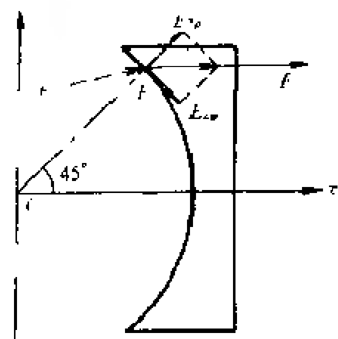
① $\nabla^2\Phi = -\rho/\varepsilon$；

② $D_{2n} - D_{1n} = \rho_S$，$E_{2t} = E_{1t}$

③ $\boldsymbol{P} = \frac{\chi_e}{\varepsilon_r}\boldsymbol{D} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\boldsymbol{D}$

④ $\rho_T = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\rho$

⑤ $\rho_P = \frac{\rho}{\varepsilon_r} = \frac{\rho_P}{\varepsilon_r - 1}$ $\quad(\rho_T = \rho + \rho_P)$

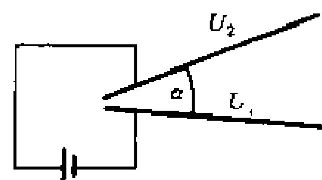


题 2.22 图

2.24 两个无限大导体平行板交成 $\alpha$ 角，但不相接触，电压分别为 $U_1$ 和 $U_2$（$U_1 < U_2$），如题 2.24 图所示。求空间电位、电场强度分布和板上的电荷分布。

2.25 为了解 F（法[拉]）是一个多么巨大的单位，试把地球看成是一个半径为$6.37\times10^6$ m的导体球来计算地球的电容。

*2.26 同轴电缆内、外导体半径分别为 $a$、$b$，电位分别为 $U$、0，内外导体之间充满不均匀介质，$\varepsilon(\rho) = k/\rho$（$k$ 为常数），已知介质中没有自由电荷。



题 2.24 图

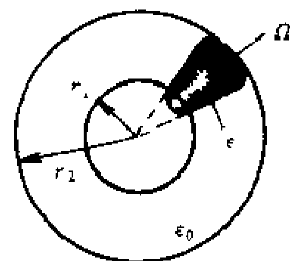
①导出该非均匀介质中关于电位的微分方程，并解之；

②求 $E$ 及单位长度上内、外导体表面的自由电荷电量；

③求内导体表面的束缚电荷面密度；

④求单位长度的该电缆的电容。

2.27　两个同心金属壳组成一电容器，内、外壳半径各为 $r_1$、$r_2$，在两球壳间与球心成立体角 $\Omega$ 的空间充以介电系数为 $\varepsilon$ 的介质，其它部分为空气，如题 2.27 图所示，求该电容器的电容。




题 2.27 图

2.28　平行板电容器中放入一层 $\varepsilon>\varepsilon_0$ 的介质后，电容是增大还是减小了？就两种情况作出解释：

①保持极板上的电量不变；

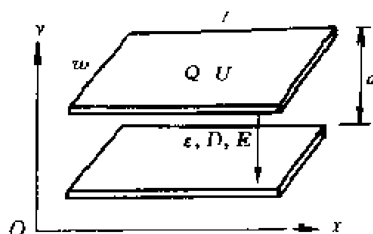
②保持极间电压不变。

2.29　平行板电容器的极板间相距2 cm，其中有1 cm厚的玻璃，$\varepsilon=7\varepsilon_0$，击穿场强为 $E_{max}=50$ kV/cm；其余为空气，其击穿场强为 $E_{0max}=30$ kV/m。

①若在极间加电压40 kV，此电容器会不会击穿？

②若将玻璃片取出，问会不会击穿？

2.30　平行板电容器如题 2.30 图所示，证明：




题 2.30 图

①已知极间电压 $U$，当介质的电容率为 $\varepsilon=\varepsilon(x)$ 时，电容器中处处有 $E=U/d$；且无论 $\varepsilon(x)$ 为何种函数且电容器的电容均为

$$C=\frac{w}{d}\int_0^l \varepsilon(x)\mathrm{d}x$$

②已知极板电量 $Q$，当介质的电容率为 $\varepsilon=\varepsilon(y)$ 时，电容器中处处有 $D=Q/S$，且无论 $\varepsilon(y)$ 为何种函数电容器的电容均为

$$C=lw\Big/\int_0^d \frac{\mathrm{d}y}{\varepsilon(y)}$$

2.31　同轴圆柱形电容器内外导体半径分别为 $a$ 和 $b$，$b$ 为给定值。

①当外加电压 $U$ 固定时，问 $a$ 为何值可使电容器中的最大电场强度取得极小值，并求出该极小值；

②当已知介质的击穿场强 $E_{max}$ 时，问 $a$ 为何值时电容器能承受极大电压？并求出该极大值 $U_{max}$。

2.32　一个半径为 $a$ 的导体球位于半径为 $b$ 的导体球壳内，两球同心，内球电位为 $U$，外壳电位为零，求：

①$a<r<b$ 区域中的电位分布；

②内外球之间的电容；

③试证：在 $U$，$b$ 给定时，$a=b/2$ 可使内球表面处电场达极小值，并求出该极小值。

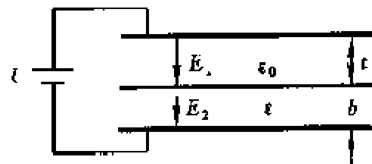
2.33　由半径为 $r=a$ 和 $r=b$ 的两个金属球构成的电容器中填充着两层介质，$a<r<r_0$ 和 $r_0<r<b$ 的空间中电容率分别为 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$，通过计算 $a<r\leqslant b$ 空间中的静电能来求出该电容器的电容。

2.34　将半径为 $R$ 的金属球充电，球对于无穷远点的电位为1 000 V，求趋向于使球的半

径改变的力。

*2.35 用直接积分来验证：当用一个电压为 $U$ 的电池给电容器充电时，在充电电路上消耗的热能等于电容器最终获得的静电能。

2.36 平行板电容器中有一层电介质，厚度为 $b$，其余为空气隙，厚度为 $t$。如题2.36图所示，由于 $b+t$ 远小于极板线度，故边缘效应可以忽略。两极间加有直流电压 $U$。




题 2.36 图

①求单位面积的上极板受的力。

②受力的方向与 $U$ 的极性有无关系？

2.37 平行板电容器的极板为正方形，边长 $L$，板间距离 $d$，将其竖直地插入相对电容率为 $\varepsilon_r$、密度为 $\rho$ 的液体电介质中，试证明：

①当电容器加以恒定电压 $U$ 时，液面升高

$$h=\frac{1}{2\rho g}(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2$$

*②当电容器充以电量 $Q$ 后即断开电源，液面升高

$$h=\frac{(\varepsilon_r-1)Q^2}{2\rho g\varepsilon_0 L^4}$$

*2.38 平行板电容器极板为正方形，边长 $L$，当相对电容率为 $\varepsilon_r$ 的电介质未进入电容器时开始给电容器加以恒定电压 $U$；当电介质进入该电容器的一半时断掉电源；电介质又继续进入，直至充满极板之间。问此时极间的电位差 $\Phi$，电场强度和极板电量 $Q$。

2.39 平行板电容器极板为正方形（边长20 cm），两极间距离为1.5 mm，下板固定，上板吊在天平的一个臂上。当该电容器极间加以150 V电压时，问天平的另一臂应吊上多重的砝码方能使电容器的上极板保持原位置不变？

2.40 有一根很长的同轴圆柱，内外导体半径分别为 $a$ 和 $b$，对其加以恒定电压 $U$。假想内导体被沿轴线向外拔出 $\Delta x$，试证它将被 $F\approx\pi\varepsilon_0 U^2/\ln\frac{b}{a}$ 的力吸回原位。

# 第 3 章　恒定电场和恒定电流场

上一章研究了静止电荷产生的电场。本章将讨论在与恒定电源构成回路的导体中恒定流动的电荷的电场，称为恒定电场。

运动的电荷既产生电场，也同时产生磁场。就恒定电流的电场而言，它的分布只取决于电流所形成的电荷(净密度)分布这一散度源，而与电荷是否流动无关。而由于电流连续性所导致的动态平衡，这一电荷的分布是恒定的；电荷的流动速度远小于光速，因而它也按库仑定律产生无旋场。从这一意义上说，恒定电场和静电场是同一种矢量场。但是，导体内存在着电场、电流，电极之间的介质导电的现象、条件又是与静电场明显不同的，并相应地具有一些特殊的规律和应用，因而我们仍将它单列为一章。

由于导体外部与静电场几乎完全相同，本章将主要讨论导体内的情况。

本章所说的导体都是广义的，是泛指一切载有或大量或少量的自由电子的媒体，也称导电媒质。它既包括金属导体，也包括漏电的介质。其电导率可相差 $10^{20}$ 倍以上。

下面将首先介绍与电流有关的定义和关系式。

## 3.1　电流密度　传导电流

真实电流(指由自由电子、离子等带电粒子所形成的电流)可以分为两大类，一类是在金属、电解液、半导体、非纯净水、大地、不良介质等固态或液态导电媒质(也可统称导体)中的电流，称为传导电流。另一类是气体及真空中的电流，称为运流电流。例如日光灯、霓虹灯和一些新式节能灯中都是气体电离所形成的电流；显像管等阴极射线管中则是真空中的电子束形成的电流。本章的讨论主要是针对导电媒质中的传导电流。

1. 电流[强度]和电流密度

不论是哪一类真实电流，我们都可以在垂直于电流流动的方向上取一个任意大小和形状的横截面 $S$。如果在包括 $t$ 时刻的时间间隔 $\Delta t$ 内流过 $S$ 的电量为 $\Delta q$，则在 $t$ 时刻单位时间内流过截面 $S$ 的电量

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} \tag{3.1.1}$$

称为 $t$ 时刻的电流[强度]，单位为 A(安)。本章研究的电流 $I$ 都是恒定的。这里所说的“恒定”都是对时间(而非空间)而言的。

如果截面积 $S \neq 0$，就是体电流；如果横截面是一条线($S = 0$)，就是面电流；如果横截面是一个点($S = 0$)，则称为线电流或电流丝。

对于体电流和面电流，都还有一个电流密度的概念，以描述电流在其横截面上的分布　在体电流的横断面 $S$ 上取一个包含某点的面元，则可得到某点处体电流[的面]密度

$$J = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \quad (\mathrm{A/m^2}) \tag{3.1.2}$$

若在面电流流动的表面上取一个与电流方向垂直的、包含某点的线元，如图3.1所示，则得到某点处面电流的线密度

$$J_S = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta I_S}{\Delta l} \quad (\text{A/m}) \tag{3.1.3}$$

面电流和线电流概念是把实际情况理想化了的，即面电流的几何厚度为零，线电流的截面半径为零。因此，不能用面电流密度的概念去衡量体电流或反之，否则就会得出不合理的结果。例如，用有限的 $J_S$ 去除以其横截面积（$S=0$），会得出面电流的体密度是无穷大；反过来，若用有限的体电流密度 $J$ 去乘以面电流的没有几何厚度的横截面积（$S=0$），会得出面电流密度应当永远是零。

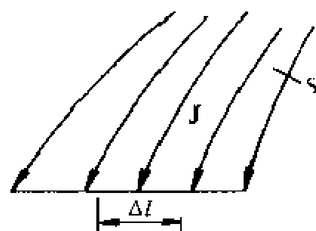


图3.1 面电流

此外，根据1.3节关于通量的定义，体电流显然是其电流密度的通量

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.1.4}$$

2. 电流密度与电荷密度的关系

设某一点电流密度为 $J$，电荷密度为 $\rho$，其速度为 $\boldsymbol{v}$，我们取包含该点在内的一个小体积，如图3.2所示。显然，在 $\Delta t$ 时间内，这个柱状小体积内的全部电荷都将穿过底面 $\Delta S$，其电量为

$$\Delta q = \rho v \Delta t \Delta S$$

故而

$$J = \frac{\Delta q}{\Delta t \Delta S} = \frac{\rho v \Delta t \Delta S}{\Delta t \Delta S}$$

$$\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v} \tag{3.1.5}$$

图3.2 电流密度与电荷密度

用类似的方法，对于面电流密度和面电荷密度，线电流与线电荷密度，可以得到

$$\boldsymbol{J}_S = \rho_S \boldsymbol{v} \tag{3.1.6}$$

$$I = \rho_l v \tag{3.1.7}$$

(3.1.5)～(3.1.7)式对于传导电流和运流电流都是成立的。

还应当指出，(3.1.5)～(3.1.7)式中的 $\rho$ 指的是载流子的密度，即以速度 $\boldsymbol{v}$ 定向运动的那些带电粒子的密度。例如，在金属中，它指的是自由电子的密度，而不包括不流动的金属正离子的密度。另外，如果图3-2的小柱体中有几种带电粒子，每一种的密度为 $\rho_i$，速度为 $\boldsymbol{v}_i$，则应有

$$\boldsymbol{J} = \sum_i \rho_i \boldsymbol{v}_i \tag{3.1.8}$$

即电流密度是几种 $\rho_i \boldsymbol{v}_i$ 的矢量和，例如正、负离子分别向相反方向运动的运流电流的情形。

从(3.1.5)～(3.1.7)式也可以看出静电荷的相对性质：对于某个参照系是静止的电荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{r}')$，对于另一个与之有相对运动（速度 $\boldsymbol{v}$）的参照系来说，就变成电流密度分布 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ 了。

3. 电流密度和电场强度的关系

对于[广义]导体中的传导电流而言，实验表明在电流密度和电场强度之间存在着如下的关系：

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{3.1.9}$$

(3.1.9)式称为导体的本构关系，$\sigma$ 称作材料的电导率，单位为S/m（1 S = 1/Ω，称作西门子）。

各种不同材料的电导率列于表3.1。对同一种材料而言，$\sigma$ 是常数，但会随温度而变化。

(3.1.9)式是传导电流特有的一个关系式。对金属而言，它也可由金属电子理论导出。金属是一种等离子体，即金属中的自由电子密度与正离子的密度相等。在外电场的作用下，自由电子在其无规则的布朗运动之上又迭加了一个与外电场同方向的加速度 $e\boldsymbol{E}/m$（$m$ 是电子的质量），但并不会不断地加速下去，因为自由电子运动时要不断与晶格上的正离子相碰撞、失去动能而加剧离子的振动（在宏观上表现为热能，即焦耳损耗），因此需要电源不断对电子做功，使其再获动能。这就是 $\boldsymbol{J}$ 是 $\boldsymbol{E}$ 的函数的根本原因。

表 3.1 不同材料的电导率

| 材料 | 电导率 $\sigma$(S/m) | 材料 | 电导率 $\sigma$(S/m) |
|---|---|---|---|
| 银 | $6.14\times10^{7}$ | 清水 | $10^{-3}$ |
| 铜(退火的) | $5.80\times10^{7}$ | 酒精 | $3.3\times10^{-4}$ |
| 金 | $4.10\times10^{7}$ | 蒸馏水 | $2\times10^{-4}$ |
| 铝 | $3.54\times10^{7}$ | 干土 | $10^{-5}$ |
| 钨 | $1.81\times10^{7}$ | 变压器油 | $10^{-[illegible]}$ |
| 铁 | $10^{7}$ | 普通玻璃 | $10^{-[illegible]}$ |
| 钢 | $(0.5\sim1.0)\times10^{7}$ | 硬橡皮 | $10^{-14}\sim10^{-16}$ |
| 铅 | $0.48\times10^{7}$ | 聚四氟乙烯 | $<10^{-16}$ |
| 水银，镍铬合金 | $0.1\times10^{7}$ | 熔凝石英 | $<10^{-17}$ |

一般来说，材料的 $\boldsymbol{J}$–$\boldsymbol{E}$ 函数关系可能是很复杂的，但我们只讨论由(3.1.9)式所表示的最简单的一类，即各向同性材料。此时 $\sigma$ 是标量。这正如静电场中介质的极化强度 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 关系是很复杂的，但我们只讨论由 $\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ 所表示的各向同性介质。这里我们采用了同样的研究方法。

(3.19)式也是微分形式的欧姆定律。我们把 $J=\frac{I}{S}$、$E=\frac{V}{l}$、$\frac{1}{\sigma}=\frac{RS}{l}$ 代入(3.19)式即可得到

$$\frac{I}{S}=\frac{l}{RS}\frac{V}{l}$$

$$V=RI$$

**4. 电流密度与功率密度的关系**

设在电场力的作用下，电荷 $\rho\Delta\tau$ 在 $\Delta t$ 时间内位移了 $\Delta l$。则电场力对该电荷做的功为 $\rho\Delta\tau\cdot E\cdot\Delta l$。故单位体积的功率($\mathrm{W/m^3}$)为

$$p=\frac{\rho\Delta\tau E\Delta l}{\Delta t\,\Delta\tau}=\rho E\frac{\Delta l}{\Delta t}=\rho vE=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} \tag{3.1.10}$$

(3.1.10)式对于各种电流都是正确的。

对于传导电流而言，(3.1.10)式表示的单位体积的功率也就是变为热的功率，即媒体的焦耳损耗。此时，(3.1.10)式还可写成如下形式：

$$p=JE=\sigma E^2=\frac{J^2}{\sigma} \tag{3.1.11}$$

这实质上是微分形式的焦耳定律。

5. 超导电性

导体的一个例外或极端情形就是超导体。

许多金属(铌、铅、钒等)和合金,在低于它们的临界温度(例如铌为 9.26 K)后会转变为超导态。完全没有电阻的状态称为超导态。由于再灵敏的仪表精度都是有限的,因而无法严格地用测量来验证电阻为零,只能说:即使有电阻,超导体的电阻也不会超过最好的导体的电阻的 $1/10^{15}$。因为电阻为零,$\sigma=\infty$,根据 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$,就无需电场来维持电流,因而超导体内部 $\boldsymbol{E}$ 总为零。一旦产生电流,只要以低温维持其超导状态,电流就不会减小。例如,有人在超导铅环中激起的几百安培电流在两年半内都未发现可觉察的变化,直至撤掉维持超导低温的装置。这种电流称为持久电流。又由于电阻为零,就可以用很细的导线通以极大的电流(例如 $10^9\ \mathrm{A/m^2}$)而不致熔化,而常态下使铜导线熔化的电流仅为 $100\ \mathrm{A/m^2}$。

超导体的理想导电性可以使电力系统发生革命性的变化。超导电机可以很小的体积和重量达到很高的极限功率,并实现远距离的"无电力损耗"输送(而传统的超高压输电系统损耗可达 10%),并免去变电设备、高压铁塔(改为地下管线),还可改用直流输电而降低成本(因其容许电流密度更大且设计简单),有许多极为诱人的应用前景。

## 3.2 恒定电场的基本方程

### 一、电流的基本性质 全电流连续性方程

所有的实验都表明电荷是守恒的(正负电荷的代数和不会增减)。因而,如果我们在任何电流场中取一个任意的闭合面 $S$,根据电荷守恒原理,若 $S$ 中有电流的净流量流出(入),$S$ 所包围的体积中的电量就应当减少(增加),即

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \quad (积分形式) \tag{3.2.1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (微分形式) \tag{3.2.2}$$

(3.2.1)和(3.2.2)式就是数学形式的电荷守恒原理,是一切电流都应满足的。它们也称作[全]电流连续性方程。(全电流指包括位移电流在内的所有形式的电流,详见第 6 章)

### 二、恒定电流的性质 恒定电场的基本方程

我们研究的电流都是由于电荷在电场的作用下流动而形成的,$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{E})$(超导体除外)。因此电场也必须是恒定不变的。电场的分布又是由电荷决定的,因而电荷的分布也必须是恒定的,故而在空间的每一点都应有 $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$,对任意闭合面 $S$ 包围的区域中的电量 $Q$,也都应有 $\frac{\partial Q}{\partial t}=0$;从而电流连续性方程变为如下形式:

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \quad (积分形式) \tag{3.2.3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0 \quad (微分形式) \tag{3.2.4}$$

(3.2.3)和(3.2.4)也可称为真实电流连续性方程,意为未包括位移电流。

电流连续性方程(3.2.3)在电路中的体现就是克希霍夫第一定律(KCL):流入任一电路节点的电流代数和为零(这可以从图 3.3 清楚地看出)。换言之,流出任一节点的电流一定等于

流入该节点的电流，是为"连续"。由此也可见，电"路"的基本定律实际上是被"场"的性质所决定的，是由场的定律派生出来的。

也正因为流入和流出任一"节点"、任意闭合面的电流都达到了动态平衡，所以任一点、任一区域中的载流子（例如自由电子）都是流走多少又流来多少，"收支相抵"面达到了一个恒定的"储备"，它与不流动的正离子共同形成了每一点处的恒定净密度。所以，(3.2.3)、(3.2.4)式所表达的真实电流的连续同电荷分布的恒定（动态平衡）互为充分必要条件，二者必然是同时并存的。

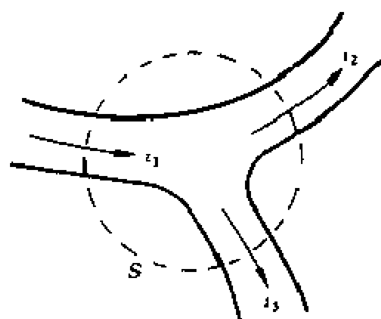



图 3.3　电流连续性方程与克希荷夫第一定律

一个孤立的导体（指未与电源构成回路的导体）在静电场中总会在一瞬间达到静电平衡，使导体内处处 $\boldsymbol{E}=0$。这是导体上的电荷产生的电场彼此之间、并与外加电场之间互相抵消的结果。但是与恒定电源（即直流电源）构成回路的导体中，由于电源的持续作用，电荷始终在流动，却永远达不到静电平衡。在接通电源后的短暂过渡过程之后所达到的是上述的动态平衡（这也是它的稳态）。在这种状态下，整个回路中所有处于动态平衡的分布电荷所产生的合成电场在导体内并不是零，而是一种时不变的电场分布，无论在导体内还是导体外。我们不妨把静电场的电荷分布与恒定电场的电荷分布分别比作死水池塘和活水池塘。死水池塘中每一滴水都是静止不动的，而活水池塘的每一滴水（比喻载流子）都在恒定地流动，但是二者在"外观"效果上是一样的。

这样，虽然场的源已不是静电荷，其产生的却仍然是静态的电场（它称为恒定电场，是因为"静电场"这个术语已经特指由静电荷所产生的电场了）；它仍然满足静电场的基本方程(2.2.5)和(2.5.10)，仍然是由恒定的散度源产生的无旋场。上述结论有一个前提，就是要满足电流连续性方程(3.2.3)、(3.2.4)，这是恒定电[流]场的存在条件，也是求解恒定电流场问题的出发点、首先要满足的关系式。也因此，恒定电场有不同于静电场的规律：

在导电媒质内部，若把导体的本构关系代入电流连续性方程(3.2.4)，也可得到关于 $\boldsymbol{E}$ 的散度方程 $\nabla\cdot\sigma\boldsymbol{E}=0$，它和旋度方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 一起将完全确定 $\Phi$、$\boldsymbol{E}$ 以至 $\boldsymbol{J}$ 的分布而与 $\varepsilon$ 的分布无关；再由高斯定律(2.5.10)，可事后得出 $\rho$ 的分布。可见高斯定律对确定或求解恒定电场的分布不起作用，也不是 $\varepsilon$ 而是 $\sigma$ 直接决定着导电媒质中 $\Phi\to\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{J}$ 的分布。但由(2.5.10)式，介电常数 $\varepsilon$ 的分布却影响着场源净电荷密度 $\rho$ 的分布（见例 3.2）。这样，我们应把恒定电场的基本方程按导电媒质内、外分别归结为：

| 导电媒质内 | 导电媒质外 |
|---|---|
| $\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ | $\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ |
| $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$ | $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$ |
| $(\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E})$ | $(\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E})$ |

## 三、路经电源内部的环量

上述关于恒定电场也是无旋场的论断，是指电源以外的区域。当我们取的闭合路径穿过电源内部时，环量的计算结果就不同了。电源内有一种非静电力，也称作局外力。它可能来自机械能、化学能、太阳能…，由于它也使电荷受到作用力，从而也等效于一种电场，记为 $\boldsymbol{E}'$。$\boldsymbol{E}'$ 是非保守场，也称作局外场。非保守场与库仑电场相反，它不是使正（负）电荷走向低（高）电位，而是克服库仑力（静电力）做功把它驱使到高（低）电位去；它不是使正、负电荷中和，而是

把它们分开，分别搬运到正(负)极，从而形成并维持了恒定的场源电荷，这种源则产生了恒定的极间电压和恒定的 $\Phi$、$E$、$J$ 分布。而场与源如何分布则首先取决于空间媒质的电导率的分布（这正如一个直流电路中各点电压取决于电阻的分布）。

现在计算图 3-4 所示的电流回路中穿过电源内部而绕电路一周的闭合路径上库仑电场(电荷电场)和非保守场的总电场 $E+E'$ 的环量，也就是绕行一周时两种场对单位正电荷所做的总功。它等于

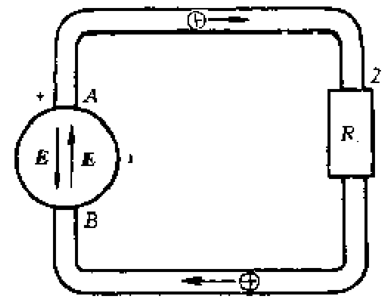


图 3-4　非保守场、局外场路经电源的环量

$$\oint_l (E+E')\cdot dl = \oint_l E\cdot dl + \oint_l E'\cdot dl$$

其中库仑电场 $E$ 是无旋场，因而上式第一项为零。第二项中，由于在电源之外并不存在非保守场，因而实际上只需在电源内积分。而电源内的局外场或非保守场对单位正电荷作的功就是电动势 $e$(单位为 V)。故有：

$$\oint_l (E+E')\cdot dl = \oint_l E'\cdot dl = \int_{源内} E'\cdot dl = e \tag{3.2.5}$$

可见，闭合路径穿过电源内部时，总电场的环量并不为零，而是等于电动势。但只要不路经电源，电场的环量就恒为零。

(3.2.5)式也表明：电动势等于非保守场沿闭合路径的积分

$$e = \oint_l E'\cdot dl \tag{3.2.6}$$

这个结论实际上是有普遍意义的。

(3.2.5)式在电路中体现为克希荷夫第二定律(KVL)。我们把它变换一下形式：

$$e = \int_{源内} E'\cdot dl = \int_{B1A} E'\cdot dl = \int_{A1B} E\cdot dl = \int_{A2B} E\cdot dl$$

就可看出(在集总电路中)沿任一回路电动势的代数和等于电压降的代数和。

## 四、均匀导体

由于在电源以外的区域中恒定电场满足基本方程 $\nabla\times E=0$，就可以引入标量电位

$$E = -\nabla\Phi$$

又由于恒定电场中满足基本方程 $\nabla\cdot J=0$，在均匀导体(均匀导电媒质)中，根据 $J=\sigma E$，且 $\sigma$ 是常数，就有

$$\nabla\cdot J = \nabla\cdot\sigma E = \sigma\nabla\cdot E = 0$$

于是

$$\nabla\cdot E = 0 \tag{3.2.7}$$

$$\nabla\cdot(-\nabla\Phi) = 0$$

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{3.2.8}$$

可见，恒定电场中在导电媒质均匀的区域里，电位满足拉普拉斯方程。

对于均匀导体，(3.2.7)式还表明其体积中电荷净密度处处为零：$\nabla\cdot E=\frac{\rho}{\varepsilon_1}=0$。这与 $J=\rho v$ 并不矛盾。因为后者式中的 $\rho$ 指的是载流子的密度，而(3.2.7)式中的 $\rho$ 指的是某点处无限小高斯面中的正、负电荷密度的代数和，即不成对电荷密度或电荷净密度。

还应该指出的是，均匀导体的体内电荷净密度处处为零的情形是在稳态时才达到的。在导体刚接上电源后的过渡过程（暂态过程）中是有电荷进入导体内部而净密度并不为零的。这个体电荷密度按指数规律衰减，体内的电荷迅速扩散到导体表面上去。这可以如下证明：我们把$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$，$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$代入电流连续性方程，就得到

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}=\nabla\cdot\boldsymbol{J}=\nabla\cdot\sigma\boldsymbol{E}=\sigma\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho=0 \tag{3.2.9}$$

这个一阶常微分方程称为电荷弛豫方程，它的解为

$$\rho=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}=\rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{3.2.10}$$

其中时间常数$\tau=\varepsilon/\sigma$称为电荷的弛豫时间，单位为 s（秒）。对于大多数金属而言，其介电常数和$\varepsilon_0$在同一个数量级，因而弛豫时间是非常之短的（而“绝缘体”例如云母的弛豫时间可达$10^4$ s之长）。以铜为例，$\sigma=5.80\times10^7$ S/m，代入上式，可得到

$$\tau\approx(36\pi\times10^9\times5.8\times10^7)^{-1}\approx1.5\times10^{-19}\quad(\mathrm{s})$$

所以，恒定电场中的均匀导体（导电媒质）达到稳态时也类似处于静电平衡时的导体，其体内电荷密度为零，净电荷只分布在导体表面上。因而，恒定电场中不同导体（导电媒质）的分界面上总是分布有自由电荷的。与静电场中的导体不同的是，这种稳态不是静电平衡，而是在导体中的恒定电场驱使下作恒定流动的电荷所形成的动态平衡状态。

值得指出的是，方程(3.2.9)的导出并未用到$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$的假设，所以它的成立并不仅限于无旋场。在一个给定的点，电荷净密度按照(3.2.10)式一经衰减到零，就保持为零，而与边界的情形无关。在均匀介电常数、均匀电导率的材料中稳态时电荷净密度为零，即使对于时变场也是正确的。

## 3.3 恒定电场的边界条件

在恒定电场中不同导电媒质的分界面处，由于界面两侧电导率及介电常数的不同，当电流倾斜地流过界面时会随着屈折而发生突变。采用与静电场中两种介质界面处同样的分析方法，把[真实]电流连续性方程的积分形式(3.2.3)，也即恒定电场的通量方程，用到两种导电媒质的分界面上，就可得到恒定电[流]场的法向边界条件：

$$J_{1n}=J_{2n}\quad 或\quad \sigma_1E_{1n}=\sigma_2E_{2n} \tag{3.3.1}$$

从与静电场中相同的环量方程(2.2.4)和高斯定律，又得到与静电场中相同的两个边界条件：

$$E_{1t}=E_{2t}\qquad 或\qquad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0 \tag{2.6.7}$$

$$D_{1n}-D_{2n}=\rho_S\qquad 或\qquad \varepsilon_1E_{1n}=\varepsilon_2E_{2n} \tag{2.6.1}$$

而与(3.3.1)和(2.6.7)式相应的、用电位表示的法向和切向边界条件则分别为

$$\sigma_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=\sigma_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \tag{3.3.2}$$

$$\Phi_1=\Phi_2 \tag{2.6.8}$$

(3.3.1)和(2.6.7)式表明：恒定电场中不同导体的分界面处电流密度的法向分量连续，而电场强度切向分量连续。并且，由于导体内外都是无旋场，在导电与非导电区域的分界面上也应服从切向边界条件(2.6.7)。这样，由于恒定电场中导体内存在着电流，表明存在着与导体表面

相切的电场，在导体表面的外侧也就应存在切向电场分量，故而导体表面的电力线不严格垂直于导体表面。这样，就导体外表面处电力线的形状而言，恒定电场与静电场略有区别。

此外，根据(3.3.1)和(2.6.1)式，在不同漏电介质的分界面上既存在有束缚面电荷 $\rho_{PS}$，也存在自由面电荷(见例 3.2)，这也是恒定电场与静电场的一个不同之处。

恒定电场中不同导体分界面上电[流]场的折射关系(参看图 3-5)为

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{J_{1t}/J_{1n}}{J_{2t}/J_{2n}}=\frac{\sigma_1 E_{1t}}{\sigma_2 E_{2t}}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \tag{3.3.3}$$

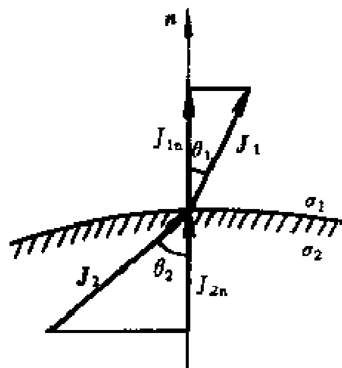


图 3-5　不同导体分界面上的边界条件

**例 3.1**　设同轴线内、外导体半径分别为 $a$、$b$，填充的介质略有漏电，其电导率 $\sigma$ 为非零常数。求漏电介质中的 $\Phi$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{J}$ 和单位长度的电导。

**解**　由于漏电介质是均匀的，故 $\Phi$ 满足拉普拉斯方程。关于 $\Phi$ 的边界条件应这样考虑：由于内外导体中存在着电流，故而导体的边界两侧都存在切向即轴向的电场分量。图 3-6 中是把电场切向分量夸大后的情形。但由于良导体中电场极微小，这个切向电场与同轴线内外导体之间的径向电场相比完全可以忽略，因而金属表面仍可近似看作等位面；于是可分别假设内、外导体电位为 $U$ 和 0，按照 2.7 节所介绍的方法求解一维拉普拉斯方程而得到

$$\Phi=\frac{U}{\ln\frac{b}{a}}\ln\frac{b}{\rho}$$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi=-\boldsymbol{a}_\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}=\boldsymbol{a}_\rho\frac{U}{\rho\ln\frac{b}{a}}$$

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_\rho\frac{\sigma U}{\rho\ln\frac{b}{a}}$$

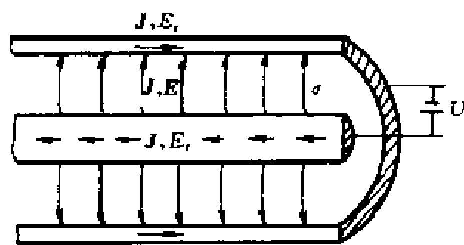


图 3-6　同轴线中的恒定电场和电流场

单位长度的同轴线总漏电流为

$$I_0=J\cdot 2\pi\rho=\frac{2\pi\sigma U}{\ln\frac{b}{a}}$$

单位长度的漏电导为

$$G_0=\frac{I_0}{U}=2\pi\sigma/\ln\frac{b}{a} \tag{3.3.4}$$

**例 3.2**　图 3-7 为麦克斯韦电容器，它有两个平行板电极，其中的介质分为两层，电容率分别为 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$，电导率分别为 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$。设极板面积为 $S$，求该电容器的漏电导 $G$；在外加电压 $U$ 时，求电容器中的电流密度以及两种介质分界面上的自由电荷密度 $\rho_S$ 和束缚电荷密度 $\rho_{PS}$。

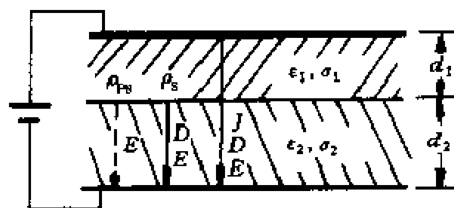


图 3-7　填充两层漏电介质的平行板电容器

**解**　方法一、麦克斯韦电容器可看成两个并联着电阻的电容器的串联而用"路"的方法求解(从略)。下面我们采用"场"的方法来解。

方法二、当介质分界面沿等位面即垂直于电流线时，宜假设电流值，利用电流连续性，按 $I\to J\to E\to U$ 的思

路即可得 $G=I/U$ 以及其他量；而当介质分界面平行于电流线时，宜假设电压值，按 $U\to E\to J\to I$ 的思路求解。

方法二、联立求解与场的两个基本方程相应的代数方程组，即可完全确定场的分布：

由
$$\begin{cases}\sigma_1 E_1=\sigma_2 E_2\\ E_1 d_1+E_2 d_2=U\end{cases}$$

从而
$$E_1=\frac{\sigma_2 U}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}\qquad E_2=\frac{\sigma_1 U}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}$$

$$J=\sigma_1 E_1=\sigma_2 E_2=\frac{\sigma_1\sigma_2 U}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}$$

$$G=\frac{JS}{U}=\frac{\sigma_1\sigma_2 S}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}$$

$$D_1=\varepsilon_1 E_1=\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}J\qquad D_2=\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}J$$

$$\rho_S=D_1-D_2=\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}-\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right)J=\frac{\sigma_2\varepsilon_1-\sigma_1\varepsilon_2}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}U \tag{3.3.5}$$

$$\rho_{PS}=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_2}D_2-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1}D_1=\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)J$$
$$=\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\sigma_2}-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\sigma_1}\right)\frac{\sigma_1\sigma_2 U}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}=\frac{\sigma_1(\varepsilon_2-\varepsilon_0)-\sigma_2(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{\sigma_2 d_1+\sigma_1 d_2}U$$

可以看出，由于在不同导体的分界面上必须满足 $J_{1n}=J_{2n}$，根据(3.3.5)就势必有 $D_{1n}\neq D_{2n}$，这是因为 $\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}$ 与 $\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}$ 总是不相等的。所以，导体媒质分界面上总是有自由电荷的。这一点显著不同于静电场中电容器的情况：两个极板上电荷总是等量异号，而介质分界面上 $\rho_S=0$，只有束缚面电荷 $\rho_{PS}$。在恒定电流场中两个极板上的电荷异号而不等量，所差之电量正是分布在介质(此时成了"导体")分界面上的自由电荷量：

$$Q_1-Q_2=S(\rho_{S1}-\rho_{S2})=S(D_{1n}-D_{2n})=S\rho_S$$

这些电荷是在接通电源后的暂态过程中扩散到表面或界面上去的。对于不良电介质，虽然其电导率仅是金属电导率的大约 $1/10^{20}$(表 3.1)，但介质中的漏电流与金属导体中的电流同样属于传导电流，也服从本构关系 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ 及其他基本方程，因而呈现出与金属导体类似的电荷向表面扩散的现象，只不过电荷弛豫时间上与金属有量的差别。一般，在介质中的漏电流可以忽略的场合，它就被视为绝缘介质，认为其中分布的是静电场；而在漏电流不能忽略的场合，该介质又要被称为导体。这同一个电容器(严格说已不能算是电容器)中的场就要按恒定电场和电流场的问题处理。名称的变化反映着问题性质的变化。

例 3.2 还表明，恒定电流场的导电媒质中 $\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{E}$ 以至 $\Phi$ 的分布与 $\sigma$ 有关而与 $\varepsilon$ 无关。由"路"的观点可帮助理解这一点：当直流电路中两个串联电容未并联电阻时，其上的电压(以至 $\Phi$、$\boldsymbol{E}$ 分布)取决于各自的电容量；而并联电阻($C_1/\!/R_1$, $C_2/\!/R_2$)后，$C_1$、$C_2$ 上的直流电压就取决于 $R_1$、$R_2$ 上的分压了。

## 3.4 恒定电流场与静电场的比拟

我们把导电媒质中的恒定电场、电流场与没有自由电荷的介质中的静电场对比一下，可以

看出它们的基本方程和各种关系式有着完全相同的数学形式:

| 恒定电场 | 静电场 |
| --- | --- |
| $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ | $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ |
| $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$ | $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$ |
| $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ | $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ |
| $I=\int_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ | $q=\int_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ |
| $G=\dfrac{I}{U}$ | $C=\dfrac{q}{U}$ |

(上面把$\oint_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$写成$\int_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$是因为这里的闭合面$S$是包围电容的某一个电极的,而极板外侧面发出的电通量为零,对积分无贡献。)两种场的上述物理量之间有着形式上一一对应的关系:

| 恒定电场 | $\boldsymbol{E}$ | $\boldsymbol{J}$ | $I$ | $\sigma$ | $G$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 静电场 | $\boldsymbol{E}$ | $\boldsymbol{D}$ | $q$ | $\varepsilon$ | $C$ |

因而在相同的几何条件下两种场的求解在数学上是同一问题,从而,可以利用求解静电场来得到恒定电流场的解(可以看出,这一作法并不限于均匀导电媒质,而只要求$\sigma$与$\varepsilon$的分布规律相同);另一方面,也可以在实验上用恒定电流场为静电场"造形"。

## 一、用静电场比拟恒定电流场

如前所述,对于某一恒定电流场问题,如果同样边界的静电场问题是有解的,则恒定电流场的解便可以直接写出,只要把静电场的解式中有关的物理量代换成恒定电流场中与之对应的物理量即可。

譬如,如果某种形状的(填充着介电常数为$\varepsilon$的介质的)两个电极之间的电容的计算在静电场中是已经解决了的,那么,同样形状的电极之间如果填充着$\sigma$与$\varepsilon$有相应分布的导电媒质,其电导就可以从电容的计算结果中把$\varepsilon$代换成$\sigma$而直接得到。例如,已知同轴线单位长度的电容是$C=\dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{b}{a}}$,则同样几何尺寸的同轴线单位长度的漏电导必为$G=\dfrac{2\pi\sigma}{\ln\dfrac{b}{a}}$。这种代换的合理性还可以从电容和电导计算过程的完全类似性看出:

$$C=\frac{q}{U}=\frac{\int_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_1^2\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}=\frac{\int_S\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_1^2\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}\tag{3.4.1}$$

$$G=\frac{I}{U}=\frac{\int_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_1^2\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}=\frac{\int_S\sigma\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_1^2\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}\tag{3.4.2}$$

应该指出,(3.4.1)、(3.4.2)式中分母的计算是以电极1、2皆为等位体为前提的,而恒定电流场中电极只是近似的等位体。但是电极通常都是由金属材料制成,电导率很高,因而与金属表面相切的电场分量甚小,所以这种近似足够精确。

还有一点应指出:采用静电比拟法的媒质区域之内不应包含电流需穿越的不同导电媒质的分界面,例如图3-7的情形。因为3.2节已指出,分界面处$\boldsymbol{J}$和$\boldsymbol{D}$的边界条件形式不同,故

不便相互比拟

转化成静电场问题来求解恒定电流场的静电比拟法在漏电导的计算、接地器电阻的计算等场合是十分便利的。

**例 3.3** 接地器埋藏很浅，其形状可近似用半球形代替，如图 3 8 所示，求接地电阻

**解** 接地电阻是指接地器至无穷远的大地电阻(土壤电导率设为 $\sigma$)，因为在远离电极处电流流过的面积很大，而接地器附近则流过的面积小得多，所以接地电阻主要在接地器附近、电压降也就主要在接地器附近。人的一个跨步之间(约0.8 m)就可能有较高的电位差(称为跨步电压)，对人体形成危险

用静电比拟法，与该问题相对应的静电场问题是计算半球的电容。由于同样形状的电极的静电场分布与电流场分布极为相似，也是沿径向辐射状，如图 3 8 所示，故而该半球的电容应是整个一个孤立球体电容 $4\pi\varepsilon a$ 的一半，即 $C=2\pi\varepsilon a$；故半球的电导为 $G=2\pi\sigma a$。

对于埋地较深的接地器，可忽略地面的存在而视为孤立球体来解。对于埋地不太深，不能忽略地面的影响时，可以把地面作为"镜面"，求接地器及其镜像同性电极迭加而成的场。有时也采用圆柱形棒或圆盘形接地器，它们都可用静电比拟等方法转化成相应的静电场问题来解。

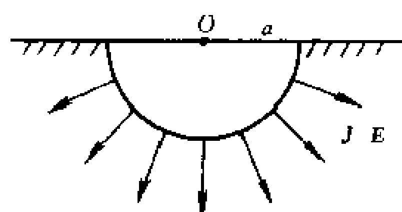



图 3 8 半球形接地器

## 二、用模拟法求解静电场

在理论计算上静电场的解法比较成熟，我们总是用静电场来比拟恒定电流场，但在实验上，导电媒质中的恒定电流场最易测量且等位线(面)可以测得很准，所以总是用恒定电流场来模拟静电场和其他的场，如磁场、流体中的流速场等。

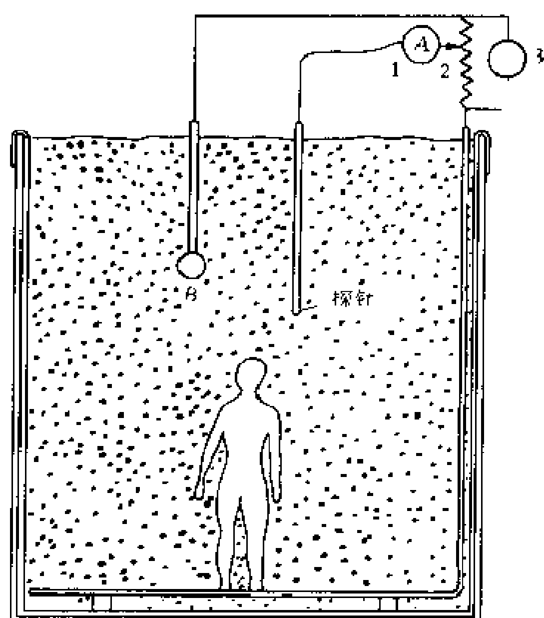



图 3 9 用恒定电流场模拟结构复杂的电极的静电场
1 电流表，2 分压器，3 低频交流电源

根据本节前面的分析我们可以得知：一组电极在略能导电的媒质中(电解液、导电纸、土壤或不良介质等)造成的恒定电流场的分布情况和这一组电极带电后在均匀介质中造成的静电场分布极为相似。因此，我们可以把一些形状不规则、其电场难于分析、测量的电器的缩小的相似形置于电解槽中(盛有自来水或稀硫酸等稀弱的盐、酸、碱溶液)，加以低频交流电源如音频电源(以消除电解或极化的影响)。也可用导电纸代替电解槽作为导电媒质，导电胶代替金属电极。这种模拟法特别适于为平行平面场或子午平面场(例如同轴线纵剖面上的场)这类二维场造型，也可以模拟三维静电场。图 3 9 是用模拟法确定形状复杂的电极 $B$ 周围的电场的实验装置示意图。槽中盛有自来水。还应注意避免槽壁形成的边界条件对被测场造成明显影响。分压器应调到电压 $\Phi_i$ ($i=1,2,\cdots,n$)。于是，只有当探针探的是等位面 $\Phi_i$ 上的点时，电流表的指示才是零；探针稍偏离该等位面，便不指零。如此就可以逐个地把 $n$ 个等位面都测出来，然后再按照 2.7 节的作图方法画出电力线分布。

# 习 题 3

3.1 半径为 $a$ 的均匀极化介质球以它的一条直径为轴匀速旋转，角速度 $\omega$，该轴平行于球的极化强度 $\boldsymbol{P}$，求：

①由于旋转形成的面电流密度分布；

②通过球面上 $\varphi=\varphi_0$ 的半圆周也即球的一条“经线”的总电流；

③通过这条“经线”的上半段($0<\theta<\pi/2$)和下半段($\pi/2<\theta<\pi$)的电流分别是多少？

3.2 设 $xy$ 面上存在着密度为 $\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{a}_x y+\boldsymbol{a}_y x$(A/m)的面电流，计算穿过表面上两点(2, 1)和(5,1)之间的线段上的电流。

*3.3 一个半径为 $a$ 的球由线性、各向同性、电导率为 $\sigma$ 的均匀导电媒质构成。已知球面电位为 $\Phi_0 a\cos\theta$，$\Phi_0$ 为常数，求球内各点的电位和传导电流密度。（提示：$z=r\cos\theta$，解球内电位关于 $z$ 的一维拉普拉斯方程。）

3.4 如题 3.4 图所示的平行板电容器中充满线性介质，$\sigma$ 是常数，$\dfrac{\varepsilon}{\sigma}=ax+b$($a$、$b$ 为常数)。若已知电容器中恒定漏电流密度为 $J_x$，求电容器中的空间电荷密度 $\rho$。

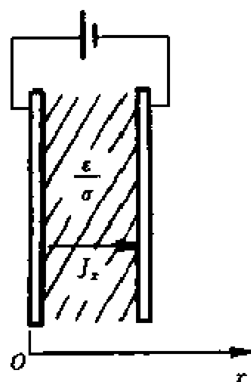
3.5 填充着两层介质的同轴电缆中介质分界面为同轴的圆柱面，内、外导体半径分别为 $a$ 和 $b$，介质分界面半径为 $c$。两层介质的电容率分别为 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$，电导率分别为 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$。当外加电压为 $U$ 时，求两种介质中的电场及分界面上的自由电荷密度。

3.6 设半径为 $R_1$ 和 $R_2$ 的两个同心球面之间填充着 $\sigma=\sigma_0\left(1+\dfrac{K}{R}\right)$的材料，$K$ 为常数，求两球面之间的电阻。

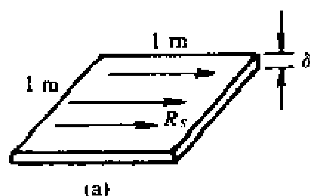
3.7 在高频电磁场中，导体中的电流趋向于导体表面，有$\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$的电流在厚度仅为 $\delta$（趋肤深度）的表层导体中流动。若电导率为 $\sigma$：

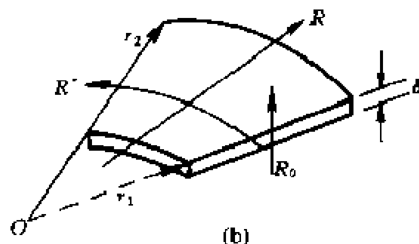
①求1 $\mathrm{m}^2$的正方形导体片的电阻 $R_S$（它称为表面电阻，指题 3.7(a)图所示方向的电阻）；

②若把正方形换为题 3.7(b)图所示的扇形片，分别求沿厚度方向的电阻 $R_0$、两圆弧面间的电阻 $R$ 和两个直边之间的电阻 $R'$。




题 3.4图




题 3.7图

3.8 有一电导不为零的介质的介质特性和导电性都是线性、各向同性的，但都是非均匀的。证明当介质中存在恒定电流时，体积中将出现自由电荷，密度为 $\rho=\boldsymbol{J}\cdot\nabla\dfrac{\varepsilon}{\sigma}$。

3.9 设玻璃的电阻率 $\rho=10^{12}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$，$\varepsilon_r=4.0$，求其电荷弛豫时间 $\tau$。

*3.10　闪电在 $t=0$ 时刻击中一个半径为 $a=0.1\ \mathrm{m}$ 的有耗介质球($\varepsilon_r=1.2, \sigma=10\ \mathrm{S/m}$)，把1 mC的电荷散落在球上。假设 $t=0$ 时电荷在球体中均匀分布，求电荷从体积内扩散到表面上的暂态过程中任意时刻的电场强度和电流密度分布。

3.11　一个半径为0.4 m的导体球当作接地电极深埋地下，土壤电导率设为0.6 S/m，假设地面的影响可以忽略不计，求该接地器的接地电阻。

3.12　在电导率为 $\sigma$ 的无限大均匀漏电介质里有两个导体小球，半径分别为 $r_1$ 和 $r_2$，小球间相距 $d$($d \gg r_1, d \gg r_2$，即两球之间的静电感应可以忽略)，求两小球间的电阻 $R$。

*3.13　厚度为 $d$ 的无限大均匀导电媒质板上垂直地插有两根无限长金属圆柱形电极，两圆柱的轴线相距 $D$，半径均为 $A$，$D \gg A$；两极间的电压为 $U$，求两极之间的电流。

*3.14　在很深的湖底上方高 $h$ 处悬浮着一根半径为 $a$ 的极长的直导线，导线平行于湖底，$h \gg a$。假设湖底为平面，是良导体，湖水电导率为 $\sigma$，求长度为 $L$ 的一段导线与湖底之间的电阻。(提示：需利用第 5 章镜像法。)

# 第4章 恒定磁场

恒定磁场也称静磁场。永磁体和恒定电流产生的磁场就是恒定磁场。

我们在第2、3章曾指出，静态的电场仅源于电荷[净密度]的分布 $\rho(\boldsymbol{r}')$。这样，虽然恒定电流回路中有电荷在运动，但由于它所形成的 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 是恒定的，因而它呈现出的电效应却与静止电荷相同。而磁场正是反映了电荷的运动所带来的效应，它仅源于有定向速度的那些电荷所形成的电流分布 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$。时不变的 $\rho(\boldsymbol{r}')$（散度源、标量源）和时不变的 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$（涡旋源、矢性源）就是静态场的两种源。这两种源产生的场——静态电场（库仑力的作用空间）与静态磁场（安培力或洛仑兹力的作用空间）在恒定电流周围同时共存却彼此独立；它们的性质完全不同，但许多定律、公式在形式上却是对偶的或对应的。因此，我们将对照着讲述静电场的顺序和思路来介绍恒定磁场的基本物理量、基本定律、基本方程及基本问题和解法。

人类发现磁现象很早，但却在数个世纪中都以为磁现象和电没有联系。直到1819年奥斯特(Oester)发现电流对磁针有作用力，紧接着1820～1825年间安培又发现了电流对另一电流的作用力的定律以后，才逐步认识到磁现象的本质是电流或电荷的运动产生磁场，而磁场又对其它电流或运动的电荷有作用力。爱因斯坦的狭义相对论更是彻底地揭示了电磁场的相对性、统一性，指出磁场是电场的相对论效应，磁力本质上是电场的一种作用。

磁学几乎应用于一切科学领域。恒定磁场的知识不仅是学习时变场的基础，也是从事各行各业都必需的。

## 4.1 磁感应强度 比奥-沙伐定律 磁力

磁场最基本的特征是对运动的电荷有作用力。

描述磁场的一个基本的物理量是磁感应[强度]。

### 一、电流产生磁场的规律——比奥-沙伐定律

与静态电场中恒定的标量点源——元电荷产生电场的公式相对应的，是恒定的矢性点源——电流元在真空中产生磁场的公式：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{a}_R}{R^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{R}}{R^3}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\nabla\frac{1}{R} \tag{4.1.1}$$

整个线电流回路产生的磁场 $\boldsymbol{B}$ 应是回路上的每个电流元产生的 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的矢量迭加——矢量积分：

$$\boldsymbol{B}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{a}_R}{R^2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{R}}{R^3}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\nabla\frac{1}{R} \tag{4.1.2}$$

式中的 $\boldsymbol{B}$ 称作磁感应[强度]，也称作磁通密度，单位为 $\mathrm{Wb/m^2}=\mathrm{T}=10^4\mathrm{Gs}$（韦/米$^2$，特 $=10^4$ 高斯），$\mu_0$ 为真空磁导率，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{H/m}$（亨/米）。

(4.1.1)式就是比奥-沙伐(Biot Sovart)定律。与(2.1.3)式比照，磁感应也与距离平方成

反比关系，与场的源成线性关系，服从场强的迭加原理；但是在方向上却与电场的规律完全不同。电流元上的动态平衡电荷产生的电场 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 是以 $\mathrm{d}l$ 为球心发出的径向射线(图 4-1 中的虚线)，而 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 产生的磁感应 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 的磁力线(图 4-1 中的实线)则是以 $\mathrm{d}l$ 的延长线为轴线的同心圆；空间每一点处的 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 都是相互垂直的。

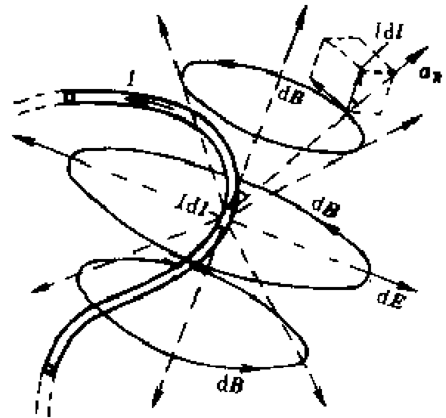


图 4-1 电流元产生的磁场和电场

图中 $\boldsymbol{a}_R$ 总是由场源 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 所在的点出发指向某场点的单位矢量。

## 二、电流在磁场中受力的规律——安培力定律

与静电场中点电荷受力公式 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$ 相对应的是电流元受外加磁场 $\boldsymbol{B}$(即不包括受力对象所产生的磁场)的作用力的公式：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}=I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{B}_1=I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\frac{I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{a}_R}{R^2}$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\frac{I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times(I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{a}_R)}{R^2}\qquad(4.1.3)$$

(4.1.3)式中的被积函数 $\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times(I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{a}_R)}{R^2}$ 可视为电流元 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$ 对 $I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 的作用力的计算公式。它相当于静电场中两个电荷间的作用力公式 $\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon R^2}\boldsymbol{a}_R$。但是，根据双重叉积的计算规则可知

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times(I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{a}_R)}{R^2}\neq-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times(I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{a}_R)}{R^2}=\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{21}$$

它表明两个电流元之间的作用力不符合牛顿第三定律。这是因为电流元根本不能单独存在。

由(4.1.3)式，整个电流回路 $C_2$ 所受到的电流回路 $C_1$ 的作用力就应当是

$$\boldsymbol{F}_{12}=\oint_{C_2}\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{I_2\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times(I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{a}_R)}{R^2}\qquad(4.1.4)$$

这就是安培经过大量巧妙的实验所发现的安培力定律。如图 4-2 所示，由于这种力是分布力系的合力，不仅需要测出各电流元受力的矢量和，还需求出合力的作用点，因而是相当困难的。约 50 年后，它曾被麦克斯韦称为“科学上最光辉的成就之一”。这个作用力当然是符合牛顿第三定律的，即 $\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$。像静电场的库仑定律一样，安培力定律是静磁场的一条基本实验定律。由于不可能存在单独的电流元，所以从认识过程上来说，事实上是先发现了这条关于整个电流回路之间的作用力的规律，其中包含着整个电流回路产生磁场的规律(4.1.2)，然后再从中分析出关于单个电流元的相应公式的。

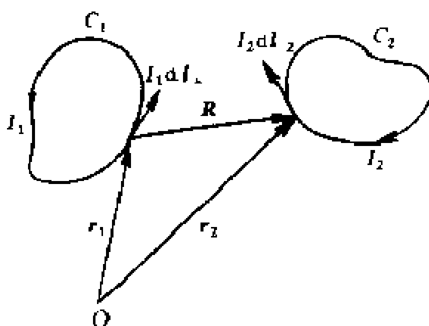


图 4-2 说明安培力定律的两个回路

## 三、分布电流的磁场和受力

如果把在一个体积中或一个表面上流动的电流看成是由许多细的电流组成的，则上述关于线电流产生磁场的公式

(4.1.2)就可以推广到分布电流的情形。从图 4-3 可看出，当考虑线电流的横截面时，线电流元就相当于体电流元或面电流元，它们都是矢性点源：

$$I\mathrm{d}\boldsymbol{l} = J\mathrm{d}S\mathrm{d}l\boldsymbol{a}_z = J\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}S\mathrm{d}l = \boldsymbol{J}\mathrm{d}\tau$$

$$I\mathrm{d}\boldsymbol{l} = J_S\mathrm{d}l'\mathrm{d}l\boldsymbol{a}_z = J_S\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}l'\mathrm{d}l = \boldsymbol{J}_S\mathrm{d}S$$

上两式也可以用如下方法证明。以前一式为例，根据

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

有

$$I\mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S})\mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l})\times\boldsymbol{J} + (\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l})\boldsymbol{J}$$

而 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}/\!/\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，故上式前一项为零。后一项中 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}\tau$，因而有

图 4-3　体电流元与面电流元

$$I\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{J}\mathrm{d}\tau \tag{4.1.5}$$

同理可得

$$I\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{J}_S\mathrm{d}S \tag{4.1.6}$$

于是，由(4.1.2)式就可得到分布电流在无限大空间或真空中产生的磁感应：

体电流

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{a}_R}{R^2}\mathrm{d}\tau \tag{4.1.7}$$

面电流

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\boldsymbol{J}_S\times\boldsymbol{a}_R}{R^2}\mathrm{d}S \tag{4.1.8}$$

从原则上说，有了(4.1.2)、(4.1.7)和(4.1.8)式，就解决了任意分布的电流的磁场计算问题。但实际上用这些公式计算并不总是很容易的事。

同样的道理，关于线电流在磁场中受力的公式(4.1.3)也可以推广到分布电流的情形：

体电流

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}\tau \tag{4.1.9}$$

面电流

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{J}_S\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}S \tag{4.1.10}$$

### 四、运动电荷的磁场和受力　洛仑兹力

电流就是电荷的运动，$\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{v}$ 就反映了这一事实。而且，

$$I\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{J}\mathrm{d}\tau = \rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}\tau = q\boldsymbol{v} \tag{4.1.11}$$

说明电流元实际上可看作是点电荷的“动量”(与质点的动量 $m\boldsymbol{v}$ 类比)。由此，我们可以进一步将电流产生磁场、电流在磁场中受力的公式变形为运动电荷的相应公式。

把(4.1.11)式代入(4.1.1)式，当电荷的运动速度 $v$ 远小于光速 c(即 $\beta = \frac{v}{c} \to 0$)时，根据(2.2.6)式，可得到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{a}_R}{R^2} = \frac{1}{c^2}\frac{q_1\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{E}(\theta)(1-\beta^2\sin^2\theta)}{c^2(1-\beta^2)} \to \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{E} \tag{4.1.12}$$

这一结果清楚地反映出磁效应本质上是因电场的运动而产生。由于静电场是分布于整个空间的，所以电场相对于所论空间区域的运动实际上意味着在该空间区域中电场分布的变化。它可能由于电荷的运动所引起，也可能由电场中的某种扰动而引起。

(4.1.11)式也反映出了电流在磁场中受力的本质：

$$\boldsymbol{F}_t = I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{4.1.13}$$

这表明它实质上是运动的电荷才能受到的一种作用力。因此，我们在这里也可以仿照电场强度的定义，把磁场中某点的磁感应强度通过以垂直于该点磁场方向的单位速度运动的单位点

电荷所受的作用力来定义：

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{F}}{qv} \times \boldsymbol{a}_v \tag{4.1.14}$$

如果空间同时还存在电场，则运动电荷受的总作用力应为

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{4.1.15}$$

这个表示一个运动电荷在另外的运动电荷周围所受的力的一般表示式就是洛仑兹力公式。而(4.1.13)式所表示的磁场力称作洛仑兹力，洛仑兹力有许多重要的应用，见4.10节。

另一方面，根据电场强度的普适定义(2.1.1)式，(4.1.15)式表达的作用力所代表的电场强度为

$$\frac{\boldsymbol{F}}{q} = \boldsymbol{E}_{总} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_v$$

其中

$$\boldsymbol{E}_v = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{4.1.16}$$

对比(4.1.12)和(4.1.16)两式，可以看到电场和磁场的联系和相对性(更明显而全面地反映这种联系和相对性的关系式见第10章)。运动的电场会产生磁效应，而另外引入的电荷在这个磁场中运动时又会受到"动生电场"$\boldsymbol{E}_v$的作用。(4.1.12)式和(4.1.15)式表明：磁场力实际上是一个运动电荷$(q,\boldsymbol{v})$所受到的另外的运动电荷$(q_1,\boldsymbol{v}_1)$的电场力$(\boldsymbol{F})$的一部分$(q\boldsymbol{E}_v)$。在这个力$(\boldsymbol{F})$中，与受力电荷的运动速度无关的部分是通常所称的电场力，而与受力电荷的运动速度有关的部分就是所说的磁力。但"运动"与否又是相对而言的，故而爱因斯坦在1952年曾经这样回顾："我曾确信，在磁场中作用在一个运动物体上的电动力不过是一种电场力罢了。正是这种确信或多或少直接地促使我去研究狭义相对论。"而它的确信被证明了是正确的。

下面是几个用比奥-沙伐定律及迭加原理求$\boldsymbol{B}$的分布的问题以及关于安培力的问题。

**例4.1** 一段长为$l$的直导线通有电流$I$，求空间各点的磁感应。

**解** 采用圆柱坐标，使$Z$轴与直导线相合，原点可置于导线的任意点。从对称关系可看出场与$\varphi$坐标无关，因而将场点置于$\varphi=0$平面上并不失普遍性。这样，场点的坐标为$(\rho,0,z)$，源点(电流元)的坐标为$(0,0,z')$，见图4-4所示。

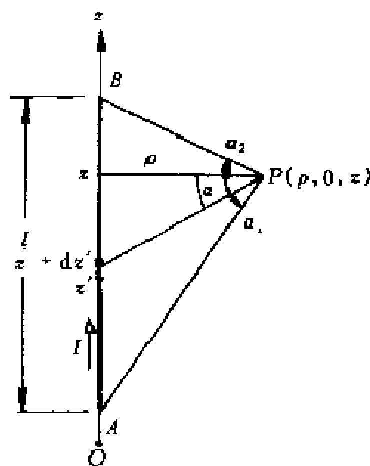



图4-4　直线电流产生的$\boldsymbol{B}$的计算

将积分变量尽可能用"常量"(场点坐标)表示出来：

$$I\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_z I\mathrm{d}z'$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a}_\rho \rho + \boldsymbol{a}_z(z - z'),\quad R = \rho\sec\alpha$$

$$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{R} = \boldsymbol{a}_\varphi I\rho\mathrm{d}z'$$

$$z' = z - \rho\tan\alpha$$

$$\mathrm{d}z' = -\rho\mathrm{d}(\tan\alpha) = -\rho\sec^2\alpha\mathrm{d}\alpha$$

于是

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_A^B \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{R}}{R^3} = \boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{-I\rho\cdot\rho\sec^2\alpha\mathrm{d}\alpha}{\rho^3\sec^3\alpha}$$

$$\boldsymbol{a}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$

对无限长直线电流，$l \to \infty$，故 $\alpha_1 \to \frac{\pi}{2}$，$\alpha_2 \to -\frac{\pi}{2}$，于是

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \tag{4.1.17}$$

这个结果与无限长直线电荷的电场 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_\rho \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho}$ 形式上相对应，方向上相互垂直。电力线的形状是以无限长线为轴线的辐射状分布，而磁力线则是以无限长线为轴线的同心圆。二者都是平行平面场，也就是既没有 $z$ 分量，也与 $z$ 坐标无关的场。

**例 4.2** 求电流为 $I$ 的细圆环（半径为 $a$）在轴线上的磁感应。

**解** 采用圆柱坐标，取圆环的轴线为 $Z$ 轴，并使圆环位于 $Z=0$ 的平面上。场点的坐标为 $(0,0,z)$，如图 4-5 所示。由图可得

图 4-5 圆环电流轴线上的磁场

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{a}_\varphi a\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\boldsymbol{R} = -a\boldsymbol{a}_\rho + z\boldsymbol{a}_z,\quad R = (z^2 + a^2)^{1/2}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{a}_\rho az\,\mathrm{d}\varphi + \boldsymbol{a}_z a^2\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi} \frac{\boldsymbol{a}_\rho az\,\mathrm{d}\varphi}{R^3} + \boldsymbol{a}_z \int_0^{2\pi} \frac{a^2\,\mathrm{d}\varphi}{R^3}\right]$$

由于圆周的对称性，每个电流元产生的磁感应的 $\boldsymbol{a}_\rho$ 分量在积分时互相抵消，故上式前一积分为零，得到

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\boldsymbol{a}_z \oint_0^{2\pi} \frac{a^2\,\mathrm{d}\varphi}{R^3} = \boldsymbol{a}_z \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi R^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \boldsymbol{a}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \tag{4.1.18}$$

在圆环的圆心处 $z = 0$，故有

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_z \frac{\mu_0 I}{2a} \tag{4.1.19}$$

**例 4.3** 线电荷密度为 $\rho_l$ 的带电线段 $AB$ 绕 $BA$ 延长线上的一点 $O$ 以角速度 $\omega$ 匀速转动。$O$ 点距 $B$ 点和 $A$ 点分别为 $b$ 和 $a$，求 $O$ 点的磁感应强度（图 4-6）。

**解** 在 $AB$ 上任取一个距 $O$ 点为 $r$ 的线元 $\mathrm{d}r$，线元的电量为 $\mathrm{d}q = \rho_l\mathrm{d}r$。当 $AB$ 绕 $O$ 点旋转时，$\mathrm{d}q$ 形成环形电流，其电流强度为

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}q\cdot f = \frac{\omega\rho_l}{2\pi}\mathrm{d}r$$

根据上题的结论（4.1.19）式，$\mathrm{d}I$ 在 $O$ 点产生的磁场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2r} = \boldsymbol{a}_z \frac{\mu_0}{2r}\frac{\omega\rho_l}{2\pi}\mathrm{d}r = \boldsymbol{a}_z \frac{\mu_0\rho_l\omega}{4\pi}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

故整个 $AB$ 线段在 $O$ 点产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B} = \int_A^B \mathrm{d}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_z \frac{\mu_0\rho_l\omega}{4\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \boldsymbol{a}_z \frac{\mu_0\rho_l\omega}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

图 4-6 例 4-3 题图

**例 4.4** 两根无限长直线电流 $I_1$ 和 $I_2$ 互相平行，相距为 $d$。求每根导线单位长度受的力。

**解** 设两线电流方向相同，如图 4-7 所示，圆柱坐标的 $z$ 轴与 $I_1$ 相合。由（4.1.17）式知

$I_1$ 在导线 2 处产生的磁感应为

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{a}_\varphi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

$I_2 \mathrm{d}l_2$ 受力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} = I_2 \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \times \boldsymbol{B}_1 = (\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{a}_\varphi)\frac{\mu_0 I_1 I_2 \mathrm{d}l_2}{2\pi d} = -\boldsymbol{a}_\rho \frac{\mu_0 I_1 I_2 \mathrm{d}l_2}{2\pi d}$$

导线 2 每单位长度受力为

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}}{\mathrm{d}l_2} = -\boldsymbol{a}_\rho \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

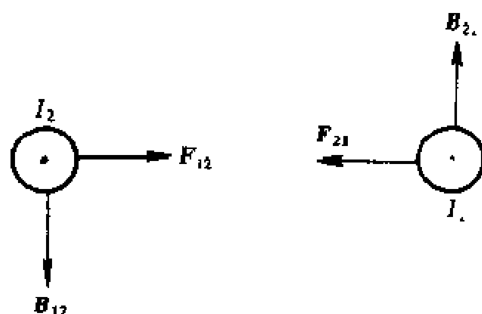



图 4-7　两直线电流间的力

同理可求得导线 1 单位长度受力为

$$\boldsymbol{F}_{21} = \boldsymbol{a}_\rho \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

可见同方向的直线电流之间为吸力，电流方向相反时为斥力。特别地，当 $I_1 = I_2$，有

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}$$

因为 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$H/m，如果 $d = 1$ m，当 $F = 2\times 10^{-7}$N，就应有 $I = 1$ A，这也是国际单位制(MKSA 制)中用来定义1 A电流强度的方法。

## 4.2　恒定磁场的基本方程

正像静电场的基本方程都可以由库仑定律导出，恒定磁场关于通量和环量的基本方程也都可以从安培力定律→比奥-沙伐定律导出。

### 一、磁场的通量和散度——磁通连续性原理

磁感应(或磁通密度)$\boldsymbol{B}$ 穿过曲面 $S$ 的通量称为磁通[量]，用 $\Phi$ 表示：

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

其单位是 Wb(韦[伯])。磁通是电磁学中一个重要的物理量。感应电动势、电感、磁场能量及电流回路在磁场中受力的计算等等，都与一个回路包围的磁通有关。

在(4.1.2)式比奥-沙伐定律

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \nabla \frac{1}{R}$$

中，回路 $C$ 上某点(位置矢量为 $\boldsymbol{r}'$)处的 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ 是个常矢量，而 $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ 是个随场点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 而变的标量函数，因此，若在矢量恒等式(A2.3)

$$\nabla \times (\Psi \boldsymbol{F}) = \nabla \Psi \times \boldsymbol{F} + \Psi \nabla \times \boldsymbol{F}$$

中令 $\Psi = \frac{1}{R}$，$\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{l}'$，则 $\Psi \nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{R}\nabla \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{0}$，于是有

$$\nabla \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{R} = \nabla \times (\Psi \boldsymbol{F}) = \nabla \Psi \times \boldsymbol{F} = \left(\nabla \frac{1}{R}\right) \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}' = -\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \nabla \frac{1}{R} \tag{4.2.1}$$

将(4.2.1)式代入，(4.1.2)式就可改写为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \nabla\times\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{R}\right) \tag{4.2.2}$$

由于沿环路 $C$ 的积分是对 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ 即对源点坐标进行的，而求旋度是对场点坐标进行的，二者无关，故可调换次序：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\nabla\times\left[\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{R}\right]=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{4.2.3}$$

其中
$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{R} \tag{4.2.4}$$

于是，根据场论中旋度矢量的性质(1.4.11)式，就应有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{4.2.5}$$

再利用散度定理，就得到

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \tag{4.2.6}$$

(4.2.5)和(4.2.6)式就是恒定磁场关于通量和散度的基本方程，也称作磁通连续性方程。磁通连续性是一条普遍性的原理，无论在恒定磁场还是时变电磁场中，它总是成立的。

$\nabla\cdot\boldsymbol{B}$ 处处为零表明：磁场中没有"喷泉"或"漏口"，也即没有散度源。因此，磁力线必然是无始无终也永不会相交的闭合回线。这也使我们相信不存在与电场中的电荷相当的"磁荷"*。

### 二、恒定磁场的环量和旋度——真空中的安培环路定律

先考虑真空或空气的情形。

正如从库仑定律出发，利用立体角的概念导出了静电场的通量和它的源(电荷)的关系，这里从比奥-沙伐定律出发，利用立体角也可以导出恒定磁场的环量和磁场的源(电流)之间的关系。

首先约定，我们说空间的两条闭合曲线 $C_1$ 和 $C_2$ 套连，是指其中任一条闭合曲线能穿越另一闭合曲线所张的任意曲面，这样的两条闭合曲线必然形成锁链状的扣(套)在一起的两个环。

在载流回路 $C'$ 的磁场中任取一个积分回路 $C$〔如图 4-8(a)所示〕来计算 $\boldsymbol{B}$ 的环量，我们用 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ 分别表示 $C$ 和 $C'$ 上的线元，利用矢量混合积的轮换性可得

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_C \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{C'}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times\boldsymbol{a}_R}{R^2}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C\oint_{C'}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{R^2}\cdot\boldsymbol{a}_R \tag{4.2.7}$$

设 $P$ 是积分路径 $C$ 上的场点，载流回路 $C'$ 所包围的表面对 $P$ 点构成一个立体角 $\Omega$。从相对运动的观点，$P$ 点沿着 $C$ 位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，相当于 $P$ 点保持不动而回路 $C'$ 位移 $-\mathrm{d}\boldsymbol{l}$〔参图 4-8(a)〕。而整个回路 $C'$ 平移 $-\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 时，$C'$ 包围的表面将由 $S_1$ 变为 $S_2$，表面积的增量为

$$\mathrm{d}S'=S_2-S_1=\oint_{C'}(-\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}')$$

它是图 4-8(a)中的环形带状曲面(因为 $-\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ 是图 4-8(a)中阴影所示的面元)，故立体角的相应增量是

---

* 美国物理学家 Dirac 以及荷兰、前苏联等国的物理学家认为磁单极(磁荷)应该存在或必然存在，但直到目前还不能说从实验上确认了这种预言。

$$d\Omega = \oint_{C'} \frac{(-dl \times dl') \cdot (-a_R)}{R^2} = \oint_{C'} \frac{(dl \times dl') \cdot a_R}{R^2}$$

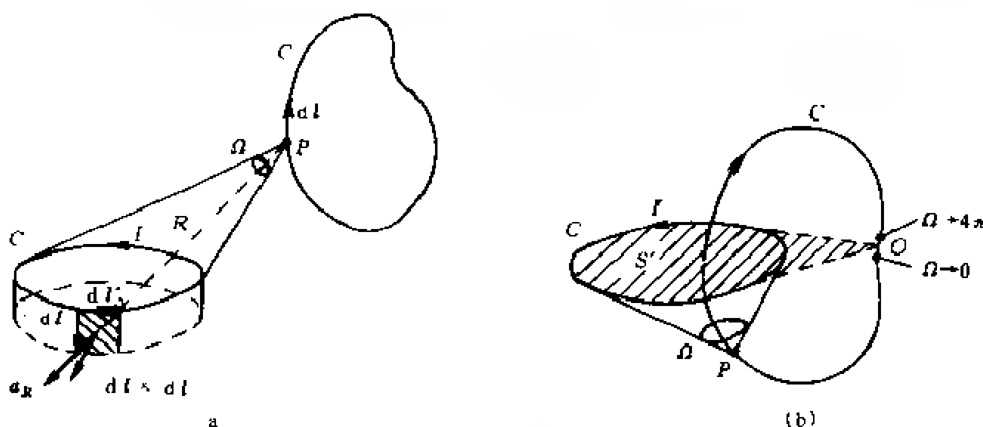



图 4.8 **B** 的环量计算中关于 ΔΩ 的计算

(a)回路 C 与C′不套连的情形;(b)回路 C 与C′套连的情形。

于是 P 点沿着 C 移动一周时立体角的总增量应是

$$\Delta\Omega = \oint_C d\Omega = \oint_C \oint_{C'} \frac{(dl \times dl') \cdot a_R}{R^2} \tag{4.2.8}$$

比较(4.2.7)和(4.2.8)式,得

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Delta\Omega \tag{4.2.9}$$

可见 **B** 沿C 的环量取决于 ΔΩ。ΔΩ 有两种可能的取值:

(1)积分回路 C 不与场源回路C′套连,如图 4-8(a)所示。可以看出,当 P 从某点开始沿 C 绕行一周回到始点时,立体角又回复到原来的值,故 ΔΩ=0,从而(4.2.9)式变为

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot dl = 0$$

(2)积分回路 C 与场源回路C′相套连,此时 C 将穿过C′包围的面S′,如图 4-8(b)所示。回路 C 上总存在一点O,使 C′对点O 所张的立体角Ω 为零。当场点 P 按图示方向沿回路C 绕行一周回来时Ω 增至 4π(P 穿越S′面时Ω=2π),这是因为 P 点由下向上穿越S′可视为P 点不动而S′自上向下掠过P 点,相应于从 0<Ω≤2π 的范围进入 2π≤Ω≤4π 的范围。球面角由 0→4π 的变化可借助图 4-19 来理解:当 θ 由 0→π 变化时,球冠面积 S 对球心张的立体角将由 0 增至 $\Omega = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi(\mathrm{sr})$,于是得到

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot 4\pi = \mu_0 I$$

上述两种情形可综合为一个公式:

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot dl = \mu_0 \sum I \tag{4.2.10}$$

其中$\sum I$ 是与回路C 套连的电流的代数和。I 的方向与C 成右旋关系时为正,反之为负。(4.2.10)式就称为安培定律或安培环路定律(积分形式)。

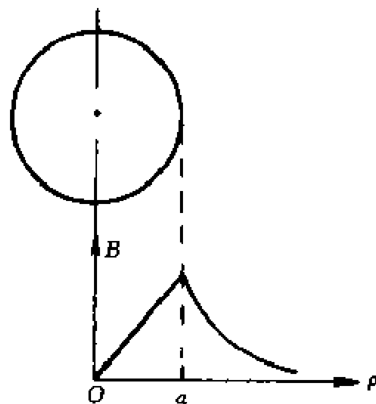



图 4-9

对于分布电流的情形,$\sum I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}$;再利用斯托克斯定理,就可从(4.2.10)式得到安培环路定律的微分形式:

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J} \tag{4.2.11}$$

恒定场的安培环路定律隐含着 $I$ 必须是恒定的(当然也就是闭合的)电流,因为将(4.2.11)式两端取散度即得到真实电流连续性方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$。

安培定律表明磁场中存在旋涡(因为 $\nabla\times\boldsymbol{B}$ 不恒为零),其涡旋源就是电流。恒定磁场旋度的分布也就是电流密度的分布。

综上所述,可得到真空中恒定磁场的基本方程:

| | 积分形式 | | 微分形式 | |
|---|---|---|---|---|
| 磁通连续性方程: | $\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0$ | (4.2.6) | $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ | (4.2.5) |
| 安培定律: | $\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\mu_0 I$ | (4.2.10) | $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$ | (4.2.11) |

可见,与静电场是有散无旋场、保守场相反,静磁场是无散有旋场、非保守场。

在电流分布具有某些特殊的对称性时,例如无限长的直线或圆柱形导体上的电流和无限大均匀电流片等,利用安培定律都可以大大简化 $\boldsymbol{B}$ 的计算。

**例 4.5** 半径为 $a$ 的无限长直圆柱导体通过电流 $I$,计算导体内外的 $\boldsymbol{B}$

**解** 场的分布明显与 $\varphi$ 和 $z$ 无关,磁感应线是以直圆柱导体的轴线为轴线的同心圆,它也是 $\boldsymbol{B}$ 的等值线,故沿着磁感应线取 $\boldsymbol{B}$ 的线积分最为简单:

$\rho\leqslant a$ 时

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=B2\pi\rho=\frac{\mu_0 I\rho^2}{a^2}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 J}{2}\rho$$

$\rho>a$ 时,回路中包围的电流为 $I$,故有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

这与沿无限长直导线积分所得的结果(4.1.17)式相同。$B$ 在圆柱内外的变化见图 4-9。

**例 4.6** 两个相交的圆柱,半径相同(均为 $a$),两圆心相距为 $C$,通过强度相等方向相反的电流,因而相交的部分 $J=0$。证明相交的区域中是匀强磁场。如图 4-10。

**解** 由上例,两圆柱单独存在时,每个圆柱内的磁感应为

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{a}_{\varphi1}\frac{\mu_0 J\rho_1}{2}=\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{\rho}_1\frac{\mu_0 J}{2}$$

$$\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{a}_{\varphi2}\frac{\mu_0 J\rho_2}{2}=-\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{\rho}_2\frac{\mu_0 J}{2}$$

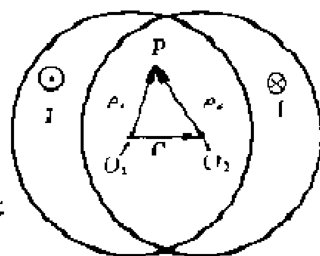



图 4-10 流过相反电流的两个相交圆柱

其中 $\boldsymbol{a}_{\varphi1}$ 与 $\boldsymbol{a}_{\varphi2}$ 分别是以 $O_1$ 和 $O_2$ 为轴心的圆柱坐标系中的单位矢量,相交区域中的 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 的迭加:

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{a}_z\times(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2)\frac{\mu_0 J}{2}=\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{C}\frac{\mu_0 J}{2}$$

可见 $\boldsymbol{B}$ 与场点坐标无关,故为均匀场,方向与 $\boldsymbol{C}$ 和 $z$ 轴垂直。当两圆柱轴线相距很近时,相交部分将近似于一个圆柱。本题的结果为在圆柱形空腔内产生横向的(指垂直于 $z$ 轴的)均匀磁场提供了一种方法。

## 4.3 矢量磁位

上一节我们根据比奥-沙伐定律证明了磁场中有涡旋源，是非保守场，因而磁场中不能无条件地引入标量位；同时，也证明了 **B** 本身又是另一个矢量场的涡旋源、旋度场，该矢量场为：

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_l \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{R} \quad \text{相应地} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{R} \tag{4.2.4}$$

按照1.4节的论述，它就是无散场 **B** 对应的一个矢量位场，称作矢量磁位。**A** 的单位为 T·m（特·米）或 Wb/m（韦/米）。在磁场中引入位函数同样可以作为求解工具，简化计算。

把(4.1.5)和(4.1.6)式代入(4.2.4)式，就可以导出在体积中和表面上的分布电流的矢量磁位的计算公式

体电流
$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\boldsymbol{J}}{R}\mathrm{d}\tau \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{J}\mathrm{d}\tau}{R} \tag{4.3.1}$$

面电流
$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\boldsymbol{J}_S}{R}\mathrm{d}S \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{J}_S\mathrm{d}S}{R} \tag{4.3.2}$$

可以看出，用以上三式计算矢量位要比用比奥-沙伐定律计算 **B** 来得简单。并且，电流元产生的矢量位 d**A** 都是与电流元平行的矢量，因而 **A** 的矢线也是与场源电流相平行的矢线。例如图4-11、图4-12所示的 **A** 线都是与直线电流平行的直线，图4-13中的 **A** 线都是与圆环电流平行且共轴的圆环。在适当选择的坐标系下 **A** 往往只有一个分量，而 **B** 一般不只一个分量。在已知场源电流分布求场强的问题（称为场源问题或分布型问题）中，当直接求 **B** 遇到困难时，利用矢量位就可能简化计算。后面的例题将演示如何借助矢量位来求解场源型问题。

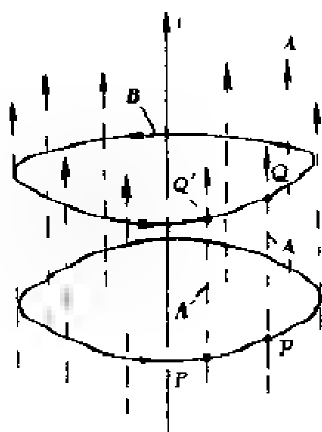



图4-11 单根无限长直线电流的 **B** 线、**A** 线（**B** 线是等 **A** 线的证明）

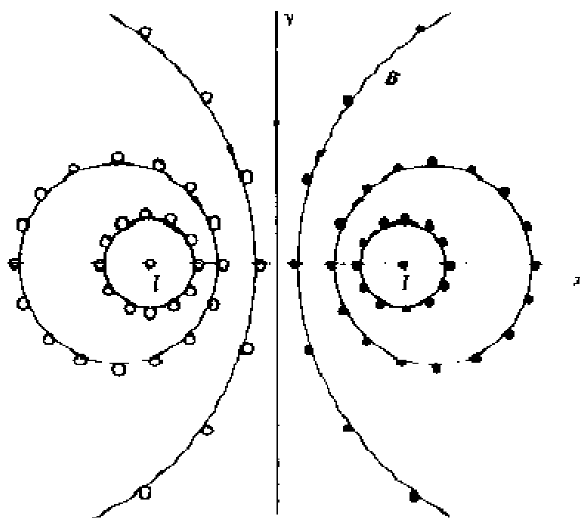



图4-12 双平行等值反向无限长直线电流的矢量位场 **A** 线的顶视图 "○"为 **A** 穿入纸面；"•"为 **A** 穿出纸面

磁通也可以利用 **A** 来计算。根据斯托克斯定理，穿过曲面 $S$ 的磁通恰是 **A** 沿 $S$ 的边界线的环量：

$$\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_l \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{4.3.3}$$

并且，磁通线和磁感应线($\boldsymbol{B}$ 线)恰是 $\boldsymbol{A}$ 的等值线。证明如下：我们沿着图 4-11 所示的由两条 $\boldsymbol{B}$ 线和两条 $\boldsymbol{A}$ 线构成的矩形回路 $PQQ'P'$ 计算 $\boldsymbol{A}$ 的环量。由于没有磁通穿过该回路，故

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_P^Q + \int_Q^{Q'} + \int_{Q'}^{P'} + \int_{P'}^{P} = 0$$

因在 $P'P$ 和 $QQ'$ 上处处有 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$，故 $\int_{P'}^{P} = \int_{Q}^{Q'} = 0$，因而必有

$$\int_P^Q \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{Q'}^{P'} \boldsymbol{A}'\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{P'}^{Q'} \boldsymbol{A}'\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}'$$

又由于上式对任意的 $P\sim Q(P'\sim Q')$ 长度都成立，且 $\boldsymbol{A}/\!/\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{A}'/\!/\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$，故必有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$$

可见 $\boldsymbol{B}$ 线恰是等 $\boldsymbol{A}$ 线。而在静电场中情况正相反：$\boldsymbol{E}$ 线和等 $\Phi$ 线是处处垂直的，$\boldsymbol{E}$ 线是电位 $\Phi$ 变化最快的方向。

此外，从对比还可看出：计算矢量磁位的公式(4.3.1)、(4.3.2)和(4.2.4)与计算标量电位的公式(2.3.7)、(2.3.8)和(2.3.9)形式上是完全对应的。因此，可以套用电位 $\Phi$ 的计算公式，代换有关的物理量$\left(\frac{1}{\epsilon}\to\mu,\ \rho_l\to I\right)$而直接写出某些场源的矢量磁位。例如，单根的以及双平行等量异号的无限长直线电荷的电位场分别为

$$\Phi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_0}{\rho} \qquad (2.3.14) \qquad\qquad \Phi' = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \qquad (2.3.15)$$

故而单根的以及双平行等值反向的无限长直线电流的矢量磁位场分别为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_z\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_0}{\rho} \qquad (4.3.4) \qquad\qquad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{a}_z\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \qquad (4.3.5)$$

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}'$ 分别如图 4-11 和 4-12 所示。然后，$\boldsymbol{B}$ 可由 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 立即算出。

与 $\Phi$ 和 $\Phi'$ 参考点的取法同样，$\boldsymbol{A}$ 的参考点应取在 $\rho=\rho_0$ 的圆柱面上($\rho_0$ 足够大)，$\boldsymbol{A}$ 的参考点是在 $\rho_1=\rho_2$ 的平面上。通常，物理上称为“位”的量的“绝对”值常常是没有意义的，都是相对于参考点的“相对”值。

**例 4.7** 计算通过电流为 $I$、半径为 $a$ 的小圆环在远离圆环处的磁场。

**解** 要计算的磁感应 $\boldsymbol{B}$ 不仅限于在圆环的轴线上，因而直接用(4.1.2)式计算比较困难。下面我们通过矢量位 $\boldsymbol{A}$ 来计算 $\boldsymbol{B}$。采用球坐标，球心位于圆环的圆心，取圆环的轴线为 $z$ 轴，如图 4-13 所示。显然场是轴对称的，$\boldsymbol{A}$ 与 $\varphi$ 坐标无关，故而把场点放在 $\varphi=0$ 的平面上并不失一般性。

由习题 1.10 知图 4-13(a)中两矢量 $\boldsymbol{r}=\vec{OP}$ 和 $\boldsymbol{r}'=\vec{OA}$ 之间夹角的余弦为

$$\cos\gamma = \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2$$

由于 $\theta_1=\theta$，$\theta_2=\pi/2$，$\varphi_1=0$，$\varphi_2=\varphi$，故

$$\cos\gamma = \sin\theta\cos\varphi$$

由余弦定理得

$$R=(r^2+a^2-2ra\sin\theta\cos\varphi)^{1/2}$$

由(2.4.12)式

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}\left(1+\frac{a}{r}\cos\gamma+\cdots\right)\approx\frac{1}{r}+\frac{a}{r^2}\sin\theta\cos\varphi$$

又

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=a\,\mathrm{d}\varphi(-\boldsymbol{a}_x\sin\varphi+\boldsymbol{a}_y\cos\varphi)$$

故
$$\oint_C \frac{d\boldsymbol{l}}{R} = -\boldsymbol{a}_x\int_0^{2\pi}\frac{a\sin\varphi}{R}d\varphi + \boldsymbol{a}_y\int_0^{2\pi}\frac{a\cos\varphi}{R}d\varphi$$

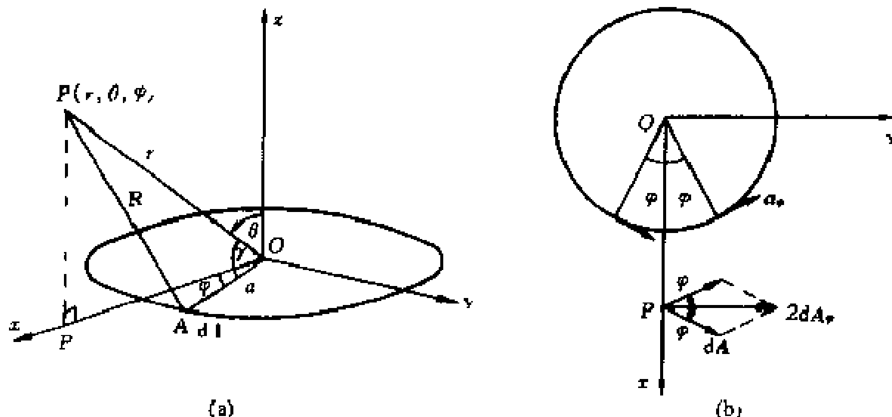



图 4-13 小圆环电流矢量位的计算
(a)立体图;(b)图(a)的俯视图。

其中前一项积分为
$$-\boldsymbol{a}_x\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}+\frac{a^2}{r^2}\sin\theta\cos\varphi\right)\sin\varphi d\varphi = 0$$
后一项积分为
$$\boldsymbol{a}_y\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{r}+\frac{a^2}{r^2}\sin\theta\cos\varphi\right)\cos\varphi d\varphi = \boldsymbol{a}_y\frac{\pi a^2\sin\theta}{r^2} = \boldsymbol{a}_y\frac{S}{r^2}\sin\theta$$
于是得到
$$\boldsymbol{A}(r,\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C\frac{d\boldsymbol{l}}{R} = \boldsymbol{a}_y\frac{\mu_0 IS}{4\pi r^2}\sin\theta = \boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^2}\sin\theta \qquad (p_m = IS) \tag{4.3.6}$$
上式中 $\boldsymbol{a}_y$ 可改写为 $\boldsymbol{a}_\varphi$ 是由于图中的直角坐标系并非是固定的,而是随着任取的 $P$ 点设立的。

$\boldsymbol{A}$ 的方向处处平行于圆环电流(即 $\boldsymbol{a}_\varphi$ 的方向)还可从图 4-13(b)中得到几何解释:我们在圆环上取两个分别位于 $+\varphi$ 和 $-\varphi$ 处的电流元,位置关于 $x$ 轴对称,则它们在场点 $P$ 产生的 $d\boldsymbol{A}$ 关于 $y$ 方向对称,故二者的矢量和只有 $\boldsymbol{a}_y$,也即 $\boldsymbol{a}_\varphi$ 方向的分量 $2dA_\varphi = 2dA\cos\varphi$。如此沿着圆环 $C$ 成对地取电流元,每一对电流元在 $P$ 点产生的 $d\boldsymbol{A}$ 都只有 $dA_\varphi$ 分量,于是
$$A_\varphi(r,\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot 2\int_0^{\pi}\frac{a\cos\varphi}{R}d\varphi = \frac{\mu_0 IS}{4\pi r^2}\sin\theta$$
与(4.3.6)式结果相同。由 $\boldsymbol{A}$ 可得 $\boldsymbol{B}$:
$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{a}_r}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\boldsymbol{a}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)$$
$$= \boldsymbol{a}_r\frac{\mu_0 SI}{4\pi r^3}2\cos\theta + \boldsymbol{a}_\theta\frac{\mu_0 SI}{4\pi r^3}\sin\theta \tag{4.3.7}$$
(4.3.7)式只适用于场点位置 $r \gg a$ 的情形。电流回路附近的场同(4.3.7)式将有很大差别。

对于已知电流分布的场源问题,原则上都可按(4.3.1)、(4.3.2)和(4.2.4)式对场源电流积分来求 $\boldsymbol{A}$,但实际问题中更需要的是求出满足特定边界条件的关于 $\boldsymbol{A}$ 的微分方程的解,这与静电场中需要导出关于电位的微分方程是同样道理。下面我们来导出 $\boldsymbol{A}$ 所满足的微分方程。

首先需要指出,满足$\nabla\times \boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$的矢量场$\boldsymbol{A}$并不是唯一的。假设$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\Psi$,$\Psi$是一个任意的标量场,则有

$$\nabla\times\boldsymbol{A}'=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\nabla\Psi=\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$$

可见,凡与$\boldsymbol{A}$相差任一个梯度场的矢量场$\boldsymbol{A}'$的旋度都是$\boldsymbol{B}$,但是它们的散度却可能是各不相同的。因而,我们可以通过限定$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$来选择确定的$\boldsymbol{A}$。这正如亥姆霍兹定理指出的:一个矢量场$\boldsymbol{A}$须由$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$和$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$唯一确定。

对$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$的值的指定(规定)称为一种规范。在恒定磁场中,总是令

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{4.3.8}$$

(4.3.8)式称为库仑规范。如果矢量场$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\Psi$符合库仑规范:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}'=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\cdot(\nabla\Psi)=\nabla^2\Psi=0$$

则意味着标量函数$\Psi$必须满足拉普拉斯方程。把库仑规范(4.3.8)式代入矢量恒等式(A2.10),就得到

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{A}=-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

而$\boldsymbol{A}$的分布根本上是由磁场的源电流决定的:

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$$

于是得到

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J} \tag{4.3.9}$$

(4.3.9)就是在库仑规范之下矢量磁位应满足的微分方程—矢量泊松方程。它适用于$\boldsymbol{J}$分布连续的区域。在$\boldsymbol{J}=0$的区域(无源区)中,$\boldsymbol{A}$显然满足矢量拉普拉斯方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=0 \tag{4.3.10}$$

$\nabla^2$本质上是一个标量算符。$\nabla^2\boldsymbol{A}(=\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{A})$并非表示矢量场可以求梯度,不妨只视为一个记号。在直角坐标下对一个矢量场进行$\nabla^2$运算表示对它的三个直角分量分别按(2.7.2)式进行$\nabla^2$运算后的矢量合成,因而(4.3.9)式代表着如下三个标量泊松方程:

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2A_x&=-\mu_0J_x\\ \nabla^2A_y&=-\mu_0J_y\\ \nabla^2A_z&=-\mu_0J_z\end{aligned}\right\} \tag{4.3.11}$$

在非直角坐标下,根据$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{A}$,从$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}$的展开式(可能多达数十项)中去掉$\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}$的展开式,剩下的那些项(再加以适当的合并)就应当是$\nabla^2\boldsymbol{A}$的表达式。因而,在非直角坐标系中算符$\nabla^2$都具有极复杂的形式。例如在柱坐标系中

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_\rho\left(\nabla^2A_\rho-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{A_\rho}{\rho^2}\right)+\boldsymbol{a}_\varphi\left(\nabla^2A_\varphi+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{A_\varphi}{\rho^2}\right)+\boldsymbol{a}_z\nabla^2A_z$$

由此可见,仅对于直线坐标分量(如圆柱坐标下的$A_z$分量),矢量泊松方程能分解成该分量的标量泊松方程,而对非直线坐标分量(如$A_\rho$、$A_r$、$A_\theta$、$A_\varphi$),并不能分解成其相应的标量泊松方程。

在不同的边界条件下,方程(4.3.9)将具有不同的解。对于无界空间,可以证明(4.3.1)式就是方程(4.3.9)的一个特解。因为已知(4.3.17)式是$\boldsymbol{A}$在无限大空间的表达式,故现在只需证明它满足方程(4.3.9)。

在4.2节中我们已经证明了

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\frac{\boldsymbol{J}\mathrm{d}\tau}{R}\right]=\nabla\times\left[\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{R}\right]=\boldsymbol{B}$$

从而解式(4.3.1)满足$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$。同时,(4.3.1)式也满足库仑规范$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\nabla\cdot\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau}{R}\right]=\nabla\cdot\left[\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{R}\right]=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C\nabla\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{R}\right)$$

积分和$\nabla\cdot$运算交换次序是因为积分是对源点坐标进行的,而求散度是对场点坐标进行的,二者无关。此外,某个源点处的$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$在$\nabla\cdot$作用于$\frac{1}{R}$时是一个常矢量,故$\nabla\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$,从而

$$\nabla\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{R}\right)=\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\nabla\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{l})=\left(\nabla\frac{1}{R}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

再利用斯托克斯定理,并注意到$\nabla\times\left(\nabla\frac{1}{R}\right)=\boldsymbol{0}$,就有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C\nabla\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{R}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C\left(\nabla\frac{1}{R}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_S\nabla\times\left(\nabla\frac{1}{R}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

故而

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=-\nabla^2\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{J}$$

表明(4.3.1)式表示的矢量位是矢量泊松方程(4.3.9)的一个特解。事实上,由于标量泊松方程(4.3.11)和标量电位的泊松方程(2.7.1)形式完全相同,因而它们的解式(4.3.1)、(4.3.2)、(4.2.4)和(2.3.7)~(2.3.9)形式上完全相同是必然的。

我们说(4.3.1)是一个特解,是因为它只是满足"无界空间"这一特殊的边界条件的一个解,还存在许多其他的(满足其他边界条件的)$\boldsymbol{A}$也满足方程(4.3.9)。

下面的例子是用来表明$\boldsymbol{B}$的各个矢量磁位之间可以相差一个任意的梯度场$\nabla\Psi$,只要标量函数$\Psi$满足$\nabla^2\Psi=0$,这些代表着不同的电流分布的$\boldsymbol{A}$都将产生一个完全相同的磁场$\boldsymbol{B}$(这类似于静电场中相差一个任意常数的标量电位$\Phi$都对应着一个完全相同的电场$\boldsymbol{E}$)。

图4-14(a)、(b)、(c)所示为三个矢量位场,其中

$$\boldsymbol{A}_a=\{-B_0y,\quad 0,\quad 0\}$$
$$\boldsymbol{A}_b=\{0,\quad B_0x,\quad 0\}$$
$$\boldsymbol{A}_c=\left\{-\frac{1}{2}B_0y,\quad \frac{1}{2}B_0x,\quad 0\right\}$$

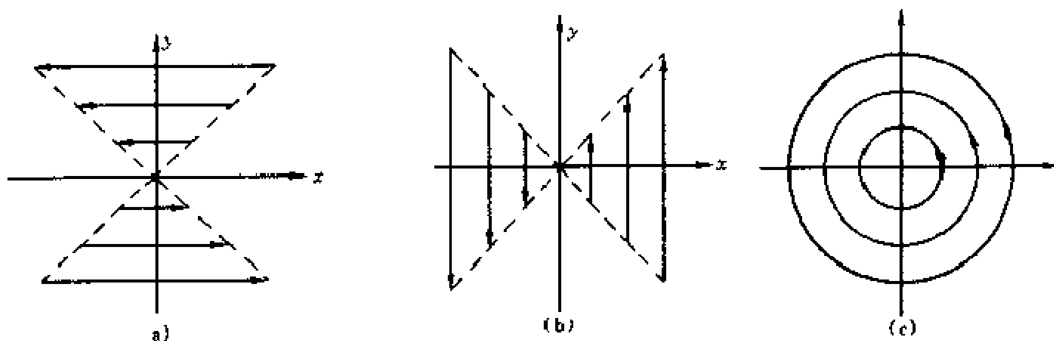



图4-14 产生相同的匀强磁场的三种矢量位

(a)$\boldsymbol{A}_a$;(b)$\boldsymbol{A}_b$;(c)$\boldsymbol{A}_c$。

它们之间都相差一个梯度场:

$$\boldsymbol{A}_b-\boldsymbol{A}_a=\{B_0y,\quad B_0x,\quad 0\}=\nabla(B_0xy)$$
$$\boldsymbol{A}_c-\boldsymbol{A}_a=\left\{\frac{1}{2}B_0y,\quad \frac{1}{2}B_0x,\quad 0\right\}=\nabla\left(\frac{1}{2}B_0xy\right)$$

但它们都产生同一个匀强磁场(其旋度为零):

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}_b=\nabla\times\boldsymbol{A}_c=\nabla\times\boldsymbol{A}_a=-\boldsymbol{a}_z\frac{\partial(-B_0y)}{\partial y}=\boldsymbol{a}_zB_0$$

而且，由于$\nabla^2(B_0xy)=\nabla^2\left(\frac{1}{2}B_0xy\right)=0$，三个矢量位都服从库仑规范：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_a=\nabla\cdot\boldsymbol{A}_b=\nabla\cdot\boldsymbol{A}_c=\frac{\partial(B_0y)}{\partial x}=0$$

故而三个矢量位都满足$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=-\nabla^2\boldsymbol{A}=0$即矢量拉普拉斯方程。

这些形式上不同的矢量位是由不同分布的场源电流产生的，这就表明有多种不同的办法来产生同一种分布的磁场：$\boldsymbol{A}_a(\boldsymbol{A}_b)$所对应的源电流是在平行于$x(y)$轴的两张无限大平行平面$y=\pm C(x=\pm C)$上沿$x(y)$轴正、负方向的恒定电流，$\boldsymbol{A}_c$对应的是以$z$为轴的无限长螺线管中的电流（也可看成是在圆柱面上沿圆周流动的电流）。为了形象起见，图4-14(a)、(b)中是用矢线的长短来表示$\boldsymbol{A}$的大小的。

一般来说，作为一个求解工具，矢量磁位在恒定磁场中远不像标量电位在静电场中那样有用，但它在时变场的复杂情况下却是十分有用的，是计算磁场的最重要的辅助函数。例如在适当的坐标系中，$\boldsymbol{A}$的矢量波动方程可分解为标量波动方程来解。而围绕着求解标量波动方程已发展出许多种解析方法或数值解法。如果不通过位函数而直接求解场矢量的波动方程，将是十分复杂的。

标量电位比矢量磁位应用更广泛的原因还在于：

1. 电位（实际上是电压）可以直接测量，从而给人们一种实际存在的感觉；而磁位目前主要是作为一个数学工具；

2. 电位场与电场（在各电位场之间可相差一个任意常数的意义上）是一一对应的，而磁矢位场与磁场则不然（参见图4-14）；

3. 电位可由电场的线积分$\Phi_{ab}=\int_a^b\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$直接求得，而用$\boldsymbol{B}$的积分表示$\boldsymbol{A}$却比较复杂。

## 4.4 磁偶极子

将上一节例4.7中小圆环电流回路的磁感应的表示式(4.3.7)同静电场中电偶极子的电场的表示式

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_r\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0r^3}2\cos\theta+\boldsymbol{a}_\theta\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0r^3}\sin\theta$$

对比，可以看出它们之间的相似。因此，我们可以称一个小圆环电流回路为磁偶极子。乘积$IS$称为磁偶极子的磁偶极矩，简称磁矩，单位为$\mathrm{A\cdot m^2}$（安·米$^2$），用矢量$\boldsymbol{p}_m$表示，其方向与面元矢量$\boldsymbol{S}$的方向一致：

$$\boldsymbol{p}_m=I\boldsymbol{S}\tag{4.4.1}$$

如图4-15所示，$\boldsymbol{p}_m$的方向与电流I的方向成右旋关系。

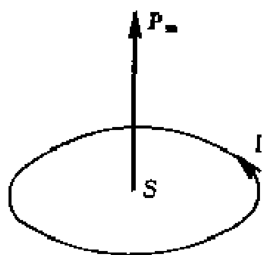


图4-15 磁偶极子

(4.3.8)式所示的磁偶极子的磁感应线的分布与电偶极子的电力线分布是相同的。如图4-16所示，但是二者有一根本不同点：电力线都是起于电偶极子的正电荷，止于负电荷；而磁感应则全部是与小圆电流套连的闭合曲线。

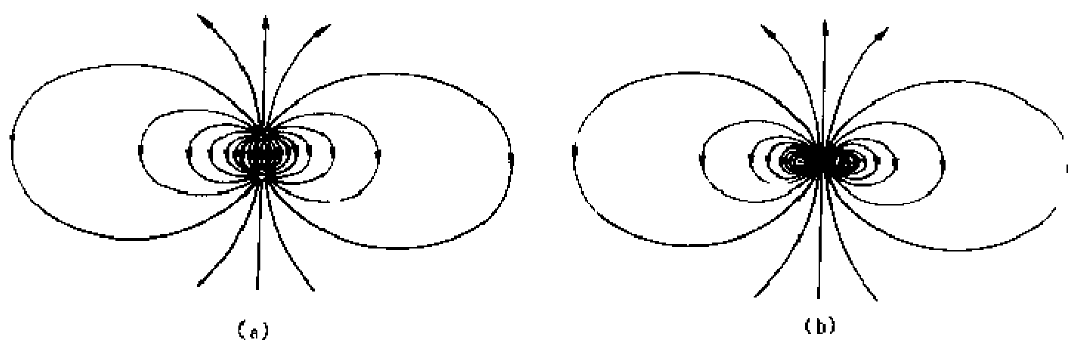



图 4-16　电偶极子和磁偶极子

(a)电偶极子的电力线，(b)磁偶极子的磁感应线。

*参看图 4-17，按照推导电荷系统的电位多极展开式(2.4.13)、(2.4.14)式同样的步骤，也可以利用幂级数或者勒让德多项式从

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau}{R}$$

导出分布电流系统的矢量位多极展开式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})&=\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^{k+1}}\int_\tau\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')r'^k\mathrm{P}_k(\cos\theta)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int_\tau\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau+\frac{\mu_0}{4\pi r^2}\int_\tau\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{a}_r)\mathrm{d}\tau+\\&\quad\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_\tau\frac{1}{2}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')[3(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{a}_r)^2-r'^2]\mathrm{d}\tau+\cdots\\&=\boldsymbol{A}_M+\boldsymbol{A}_D+\boldsymbol{A}_Q+\cdots\end{aligned}\qquad(4.4.2)$$

其中 $\boldsymbol{A}_M$、$\boldsymbol{A}_D$、$\boldsymbol{A}_Q$ 分别表示磁单极距、偶极距、四极矩……所产生的矢量位。磁偶极子、四极子……可统称磁多极子。

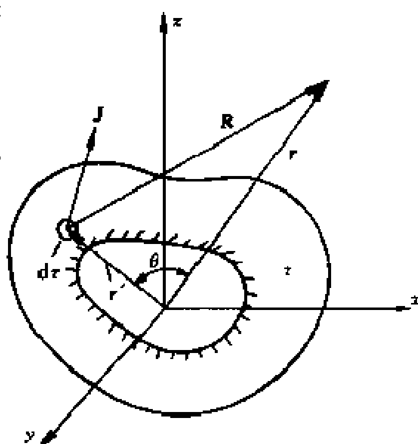



图 4-17　矢量磁位多极展开式的推导

电位多极展开式(2.4.13)中的单极矩代表电荷系统正、负电荷抵消后所剩余的单一极性(正或负)的电荷，而磁场中“N极”和“S极”总是成对出现的。目前还没有确切证据表明存在磁单极即磁荷，因而矢量磁位中的单极矩理应为零。这一点在恒定电流的情形可以这样证明：因为恒定电流总是闭合的，我们把分布的体电流想像成许多细的电流回路 $C_j$，其电流为 $I_j$；由 $\boldsymbol{J}\mathrm{d}\tau=I_j\mathrm{d}\boldsymbol{l}_j$，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_M&=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int_\tau\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau=\frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_j\oint_{C_j}I_j\mathrm{d}\boldsymbol{l}_j\\&=\frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_j I_j\oint_{C_j}\mathrm{d}\boldsymbol{l}_j=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

我们也可以证明(从略)，(4.4.2)式中的偶极项与(4.4.3)或(4.3.6)式是一致的，即：

$$\boldsymbol{A}_D=\frac{\mu_0}{4\pi r^2}\int_\tau\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{a}_r)\mathrm{d}\tau=\frac{\mu_0\boldsymbol{P}_m\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 SI}{4\pi r^2}\sin\theta$$

与电位多极展开式的情形类似，我们也可以证明偶极项 $\boldsymbol{A}_D$ 与图 4-17 中原点位置的平移无

关,而只取决于 $\tau$ 中电流的分布。四极矩以上的项本书将不讨论。

下面我们导出另外几种计算磁偶极子的场的公式,并继而导出一般(任意形状)电流回路的标量磁位。

(4.3.6)式是磁偶极子的矢量磁位,它还可以写成

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 SI}{4\pi r^3}r\sin\theta=\frac{\mu_0 SI}{4\pi}\boldsymbol{a}_z\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{p}_\mathrm{m}\times\nabla\frac{1}{r}\tag{4.4.3}$$

利用矢量恒等式(A2.3),并注意到 $\boldsymbol{p}_\mathrm{m}$ 为常矢量,$\nabla\cdot\boldsymbol{p}_\mathrm{m}=0$,$\nabla\times\boldsymbol{p}_\mathrm{m}=0$,就有

$$\boldsymbol{p}_\mathrm{m}\times\left(\nabla\frac{1}{r}\right)=-\nabla\times\frac{\boldsymbol{p}_\mathrm{m}}{r}+\frac{1}{r}\nabla\times\boldsymbol{p}_\mathrm{m}=-\nabla\times\frac{\boldsymbol{p}_\mathrm{m}}{r}$$

于是得到磁偶极子的 $\boldsymbol{A}$ 的又一表达式

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\frac{\boldsymbol{p}_\mathrm{m}}{r}\tag{4.4.4}$$

并相应得到磁偶极子的 $\boldsymbol{B}$ 的又一表达式

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\frac{\boldsymbol{p}_\mathrm{m}}{r}\tag{4.4.5}$$

根据矢量恒等式$\nabla\times\nabla\times=\nabla\nabla\cdot-\nabla^2$,并注意到 $r\neq0$ 时$\nabla^2\frac{1}{r}=0$,$\nabla^2\frac{\boldsymbol{p}_\mathrm{m}}{r}=0$,就有

$$\nabla\times\nabla\times\frac{\boldsymbol{p}_\mathrm{m}}{r}=\nabla\left(\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{p}_\mathrm{m}}{r}\right)=\nabla\left[\boldsymbol{p}_\mathrm{m}\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\right]$$

将其代入(4.4.5)式,就得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}&=\nabla\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{p}_\mathrm{m}\cdot\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\right]=-\mu_0\nabla\left(\frac{\boldsymbol{p}_\mathrm{m}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}\right)\\&=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\left(\frac{S\boldsymbol{a}_z\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla\left(\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{a}_r}{r^2}\right)=-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\nabla(\mathrm{d}\Omega)\\&=-\mu_0\nabla\Phi_\mathrm{m}\end{aligned}\tag{4.4.6}$$

这表明磁偶极子的 $\boldsymbol{B}$ 可以用一个标量场(标量磁位)的梯度表示,这个标量函数为

$$\Phi_\mathrm{m}=\frac{I}{4\pi}\mathrm{d}\Omega\tag{4.4.7}$$

$\mathrm{d}\Omega$ 是电流回路所包围的面积 $S$ 对场点所张的立体角。由(4.4.6)式可以得出的结论是:偶极子的电流回路形状不同时,只要其面积对某点所张的立体角相同,则在该点的 $\boldsymbol{B}$ 就相同。所以,只要 $p_\mathrm{m}$ 相同,我们就可以任意假定回路的形状而不影响分析结果。这个结果是意料之中的。因为从距离足够远的地方看过来时,回路已近似一个点,回路的形状当然就不再起作用了。

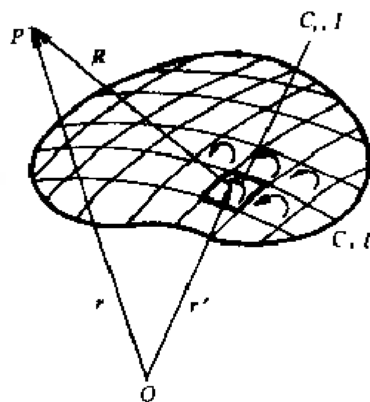



图 4-18 任意形状大回路电流产生的 $\boldsymbol{B}$ 的计算

这里对非保守场引入标量位是有条件的,是限于电流以外即$\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$的区域。这一点将在 4.7 节详细阐述。

(4.4.6)式可以用来推导一个大回路电流的磁感应。图 4-18 表示一个任意形状的电流回路 $C$,将它划分成许多($N$ 个)小网孔 $C_i$,则按照 1.4 节证明斯托克斯定理时的作法,沿宏观回路 $C$ 的电流 $I$ 可以看成是沿所有小环路 $C_i$($i=1,2,$

…，$N$）的电流 $I$ 相抵消的结果。因而在空间某一场点 $P$ 的磁感应也应当等于所有小回路 $C_i$ 构成的磁偶极子在该点的 $d\boldsymbol{B}$ 的矢量积分，即

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_S \nabla\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{a}_R}{R^2}\right)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_S \nabla(\mathrm{d}\Omega)$$

式中的积分是对源点坐标，而求梯度是对场点坐标进行的，二者无关，故可相互交换次序：

$$\boldsymbol{B}=\nabla\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_S \mathrm{d}\Omega\right)=\nabla\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\Omega\right) \tag{4.4.8}$$

式中的 $\Omega$ 是曲面 $S$ 对场点 $P$ 所张的立体角。

虽然上式所适用的回路形状是任意的，但任意回路的立体角的计算往往是困难的。

**例 4.8** 利用(4.4.8)式重新计算例 4.2，即计算圆环电流轴线上任一点的磁感应

**解** 以场点为圆心，$R$ 为半径作一球面（图 4-19），圆形回路 $C$ 在球面上截出的球冠面积为：

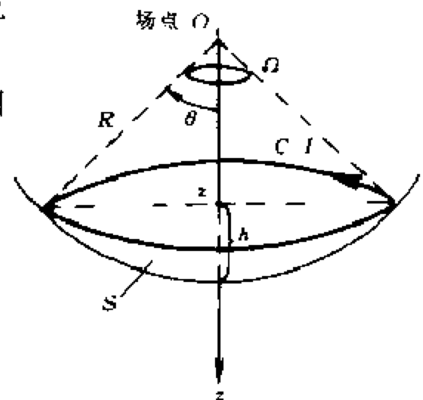


图 4-19 圆形回路立体角的计算

$$S=2\pi Rh=2\pi R(R-R\cos\theta)=2\pi R(R-z)$$

$$\Omega=\frac{S}{R^2}=\frac{2\pi(R-z)}{R}\qquad R=\sqrt{a^2+z^2}$$

$$\boldsymbol{B}=-\nabla\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\Omega\right)=-\frac{\mu_0 I}{2}\nabla\left(\frac{R-z}{R}\right)$$

$$=-\boldsymbol{a}_z\frac{\mu_0 I}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\sqrt{a^2+z^2}-z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right]$$

$$=\boldsymbol{a}_z\frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$$

## 4.5 介质的磁化　介质中的安培定律　磁场强度

除了真空以外，所有物质在恒定磁场中都会被磁化。被磁化的介质产生的磁场迭加在原磁场上，使其增强或削弱。

介质分子中的每个电子和原子核都在自旋，电子还同时绕核旋转，这些都相当于小环形电流的磁偶极矩；所有这些磁矩的矢量和就是一个分子的磁矩。因而从磁效应上看，每个介质分子可等效成一个磁矩为 $\boldsymbol{p}_{mi}=I_i\boldsymbol{S}_i$ 的磁偶极子。但是，这个环形电流是束缚在分子里的，不像自由电子形成的宏观流动那样能被测量到，因而它称作束缚电流或磁化电流。这就是介质的分子电流模型（安培模型）。于是，一块介质就等效为一个真空中分布着磁偶极子的空间。在外加磁场的作用下，这些原来取向凌乱的磁矩取向趋于一致；或是介质分子原来不存在固有磁矩，受感应而产生感应磁矩，从而在宏观上显现出磁效应。前（后）一种磁化机制就是顺（抗）磁质的情形。

首先引入磁化强度 $\boldsymbol{M}$（单位为 A/m，安/米）这一物理量，以便从宏观上描述介质的磁化程度；它定义为

$$\boldsymbol{M}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\sum \boldsymbol{p}_{mi}}{\Delta\tau} \tag{4.5.1}$$

其中 $\sum \boldsymbol{p}_{mi}$ 是 $\Delta\tau$ 中所有分子磁矩的矢量和，$\boldsymbol{M}$ 表示某点处单位体积中的总磁矩，因而 $\boldsymbol{M}$ 也是一个分布函数。若 $N$ 为分子密度，$\boldsymbol{p}_{ma}$ 为该点处分子的平均磁矩，则应有

$$\boldsymbol{M}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{N\boldsymbol{p}_{ma}\Delta\tau}{\Delta\tau}=N\boldsymbol{p}_{ma} \tag{4.5.2}$$

如果已知介质中磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 的分布，由于 $\boldsymbol{M}\Delta\tau$ 相当于一个小磁偶极子的磁矩，根据磁偶极子的矢量位公式(4.4.3)，就有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{M}\times\left(\nabla\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\tau$$

把所有体积元的磁偶极矩 $\boldsymbol{M}\Delta\tau$ 产生的 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 迭加到一起，就是整块介质产生的矢量位：

$$\boldsymbol{A}=\int_\tau \mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \boldsymbol{M}\times\left(\nabla\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\tau=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \boldsymbol{M}\times\left(\nabla'\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\tau \tag{4.5.3}$$

上式利用了$\nabla=-\nabla'$，其中$\nabla'$表示是对源点坐标微分。利用矢量恒等式(A2.3)，得

$$\boldsymbol{M}\times\nabla'\frac{1}{R}=\frac{1}{R}\nabla'\times\boldsymbol{M}-\nabla'\times\frac{\boldsymbol{M}}{R}$$

再利用矢量恒等式(A2.13)，有

$$\int_\tau\left(\nabla'\times\frac{\boldsymbol{M}}{R}\right)\mathrm{d}\tau=-\oint_S\left(\frac{\boldsymbol{M}}{R}\right)\times\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

于是得到

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\frac{\nabla'\times\boldsymbol{M}}{R}\mathrm{d}\tau+\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S\frac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}}{R}\mathrm{d}S \tag{4.5.4}$$

把(4.5.4)式与(4.3.1)、(4.3.2)对照，可看出$\nabla'\times\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}$ 分别对应着体电流密度和面电流密度。若分别用 $\boldsymbol{J}_m$ 和 $\boldsymbol{J}_{mS}$ 表示，并把$\nabla'$写成$\nabla$，则有

束缚体电流密度
$$\boldsymbol{J}_m=\nabla\times\boldsymbol{M} \tag{4.5.5}$$

束缚面电流密度
$$\boldsymbol{J}_{mS}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n} \tag{4.5.6}$$

这样，磁介质的磁效应就可以用介质的磁化电流即体积内分布的束缚体电流和介质表面上分布的一层束缚面电流来代替。于是，除了利用磁偶极子的矢量位公式(4.5.3)以外，我们也可以利用(4.5.4)式对分布的束缚体电流和面电流积分来算出仅由介质产生的磁场(即不包括使介质磁化的外加磁场)。

从(4.5.6)式看，磁介质表面上总会有束缚面电流的。在均匀磁介质体积内，如若不存在自由电流，也是不会有束缚体电流的。(而非均匀磁介质另当别论。对其中束缚体电流的分析方法类同于2.5节对非均匀电介质中束缚体电荷的分析。)图4-20所示的一块均匀介质说明了这种情况：体积中处处有两个相反方向的电流相抵消，而介质表面上的分子电流都朝同一个方向流，抵消不掉而形成一层宏观的面电流。

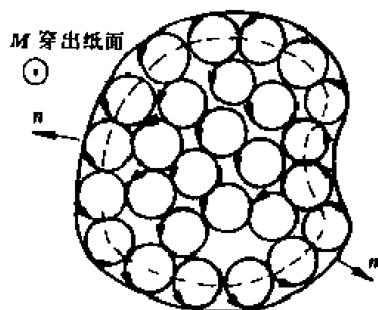



图4-20　均匀介质中的束缚电流示意图

同静电场中计算束缚面电荷时一样，这里也可以在一个以 $S$(分子磁矩的面元)为底面、长 $\mathrm{d}l$ 的微观柱体中用“计数”的方法证明束缚电流的面密度为(4.5.5)式，并进而导出体密度为(4.5.6)式(从略)。

根据场的迭加原理，把束缚电流所产生的矢量位(4.5.4)迭加到使它磁化的外加磁场的矢量位(4.3.1)和(4.3.2)上去，就得到所有的源电流共同产生的矢量位，也即存在介质时的总场的矢量位

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau\frac{\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_m}{R}\mathrm{d}\tau+\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S\frac{\boldsymbol{J}_S+\boldsymbol{J}_{mS}}{R}\mathrm{d}S \tag{4.5.7}$$

可以看出,(4.5.7)式中 $J_m$ 与 $J$ 的地位是完全相当的,因而在使用真空中的安培定律计算有介质存在的磁场时应当把束缚电流 $J_m$ 也计入。这样,介质中安培环路定律的微分形式应为

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_m)=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\nabla\times\boldsymbol{M}$$

故

$$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}\right)=\boldsymbol{J}$$

如果引入一个辅助物理量

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M} \tag{4.5.8}$$

它称为磁场强度,单位为 A/m(安/米)或 A/cm(安/厘米),就得到一个更简洁的式子

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J} \tag{4.5.9}$$

它表明 $\boldsymbol{H}$ 的涡旋源仅是自由电流(指传导电流)。再根据斯托克斯定理,就得到 $\boldsymbol{H}$ 的环量,它仅取决于回路 $C$ 包围的自由电流:

$$\oint_C\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=I \tag{4.5.10}$$

(4.5.10)和(4.5.9)就是介质中的安培定律的积分形式和微分形式。等式右端已不再出现束缚电流,它的影响已包含在辅助物理量 $\boldsymbol{H}$ 之中了。也就是说,有介质时的磁场强度是外加磁场受到介质的磁场影响后的场。与电场中电介质的作用不同的是,这个影响往往是增强原来的磁场。

磁场强度的另一种单位是 Oe(奥斯特)。换算关系为

$$1\ \mathrm{A/m}=0.01\ \mathrm{A/cm}=4\pi\times10^{-3}\ \mathrm{Oe}$$

$$1\ \mathrm{A/cm}=1.256\ \mathrm{Oe}$$

为了便于分析,还必须找出 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 之间的更简单的关系。理论和实验指出,除了铁磁介质,其他各向同性材料的 $\boldsymbol{M}\sim\boldsymbol{B}$,从而 $\boldsymbol{M}\sim\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{H}$ 都存在线性关系(铁磁介质在一定条件下也可近似看成线性关系):

$$\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H} \tag{4.5.11}$$

$\chi_m$ 称为磁化率,是一个无量纲的常数。顺(抗)磁质的 $\chi_m$ 为正(负)数,真空中的 $\chi_m=0$。把上式代入(4.5.8)式,得

$$\boldsymbol{B}=\mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H}=\mu_0\mu_r\boldsymbol{H}=\mu\boldsymbol{H} \tag{4.5.12}$$

其中

$$\mu=(1+\chi_m)\mu_0=\mu_r\mu_0 \tag{4.5.13}$$

称为磁导率,单位为 H/m(亨/米)。

$$\mu_r=\frac{\mu}{\mu_0}=1+\chi_m \tag{4.5.14}$$

称为相对磁导率,是一个无量纲的常数。由于顺磁质和抗磁质的 $\chi_m$ 都很小,因而他们的 $\mu$ 和 $\mu_0$ 都相差甚微,大约在 $10^{-3}$ 数量级。在工程上通常把顺磁质和抗磁质(即除了铁磁介质以外的各向同性介质)的相对磁导率都认为是 $\mu_r=1$。铁磁介质的 $\mu$ 相当大,可达 $10^5$,通常用 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{H}$ 曲线来表示材料的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的关系。

综上所述,恒定磁场的基本方程为:

磁通连续性方程(无散性) $\oint_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$ (4.2.6) $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ (4.2.5)

安培定律(非保守性)　　$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I$　(4.5.10)　　$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$　(4.2.9)

本构关系　　$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$　(各向同性介质)　(4.5.12)

**例 4.9**　环形铁心螺线管的铁心截面半径 $a$ 远小于环半径 $R$,环上均匀密绕 $N$ 匝线圈,电流为 $I$,铁心磁导率为 $\mu$。①计算螺线管中的 $\boldsymbol{B}$ 和磁通 $\Phi$。②如果在环上开一个宽度为 $t$ 的小切口(如图 4-21 所示),电流及匝数都不变,假设铁心的 $\mu$ 也不变,再求铁心中和空气隙中的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$。

**解**　①因为 $a \ll R$,可认为铁心截面上的场近似是均匀的。沿铁心的轴线取 $\boldsymbol{H}$ 的线积分,由安培定律,有

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H\cdot 2\pi R = NI$$

$$H = \frac{NI}{2\pi R} \qquad B = \frac{\mu NI}{2\pi R}$$

$$\Phi = B\cdot \pi a^2 = \frac{\mu NIa^2}{2R}$$

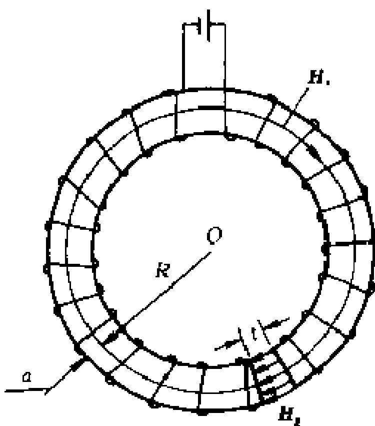



图 4-21　有空气隙的环形铁心螺线管

②当环上开一小切口时,由于 $t$ 很小,可认为 $\boldsymbol{B}$ 仍然均匀分布在 $S = \pi a^2$ 的截面上,边缘效应可以忽略。由于磁通连续(磁力线数目不变),切口中的 $\boldsymbol{B}$ 和铁心内的 $\boldsymbol{B}$ 相等,但两者的 $\boldsymbol{H}$ 相差很大,分别为 $\boldsymbol{H}_g = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}$ 和 $\boldsymbol{H}_t = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$,故有

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = H_t(2\pi R - t) + H_g t = NI$$

$$\frac{B}{\mu}(2\pi R - t) + \frac{B}{\mu_0} t = NI$$

$$B = \frac{\mu_0 \mu NI}{2\pi R\mu_0 + (\mu - \mu_0)t} = \frac{\mu NI}{2\pi R + (\mu_r - 1)t}$$

$$H_t = \frac{NI}{2\pi R + (\mu_r - 1)t}$$

$$H_g = \frac{\mu_r NI}{2\pi R + (\mu_r - 1)t}$$

由于 $\mu_r \gg 1$,$\boldsymbol{B}$ 值比未切口时下降许多。又由于 $\boldsymbol{H}_g \gg \boldsymbol{H}_t$,磁场强度的线积分值将主要是气隙部分的 $H_g t$。磁路(由铁心构成的、磁力线集中的通路称作磁路)中的上述现象与电路的情况很相似:在良导体构成的电路中即使插入很薄的一片绝缘物,电流也会大大下降,只剩极微小的漏电流,且电场强度的线积分值即电压降将主要降在这个薄片上。但是,从物理性质上说,由于不存在磁荷和传导磁荷的物质,磁的导体(铁磁体)并不与电的导体相当,而是相当于介电系数很大的介质:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \quad \sim \quad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M}$$

在电的导体中,电场强度 $\boldsymbol{E} = 0$ 时,同时也有 $\boldsymbol{P} = 0$,$\boldsymbol{D} = 0$;而铁磁体中,磁场强度 $\boldsymbol{H} = 0$ 时 $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{M}$ 却很大,$\boldsymbol{M}$ 更大。

## 4.6　恒定磁场的边界条件

处于磁场中的磁介质表面上一般都存在束缚面电流，它会产生附加的磁场而导致 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 越过不同介质的分界面时发生突变。因此，应当用场方程的积分形式来导出分界面上的边界条件，它实质上是恒定磁场的基本方程在介质界面上的特殊形式或极限形式。恒定磁场与静电场对边界条件的推导方法完全相同。

1. $\boldsymbol{B}$ 的法向分量的边界条件

由于磁通连续性方程 $\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$ 与不包围自由电荷时的高斯定律 $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$ 形式上完全相同，故可参照图 4-22(a)（与图 2-16 完全类同）而直接写出：

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0 \qquad \text{或} \qquad B_{1n}=B_{2n} \tag{4.6.1}$$

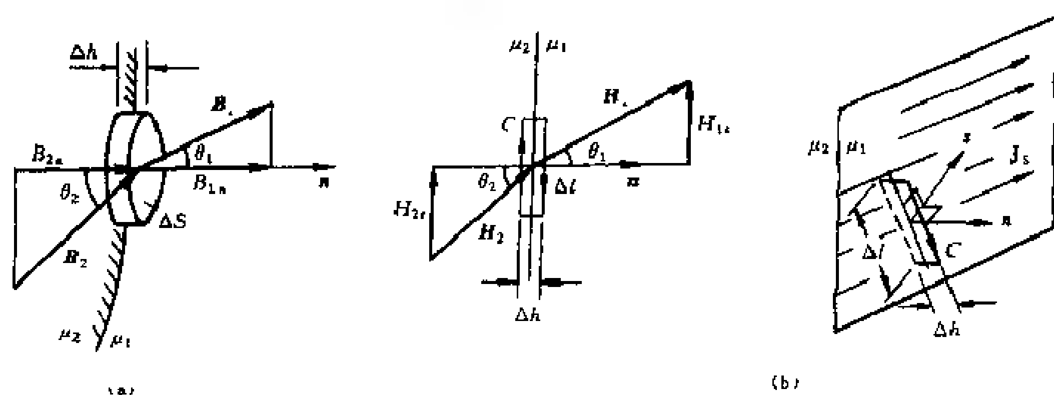



图 4-22　恒定磁场边界条件的推导

(a)推导 $B_n$ 的边界条件；(b)推导 $H_t$ 的边界条件。

2. $\boldsymbol{H}$ 的切向分量的边界条件

按照静电场中由 $\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$ 推导出 $\boldsymbol{E}$ 的切向边界条件同样的方法，取一个同样的窄矩形回路 C 跨越在界面处〔如图 4-22(b)所示〕，若界面上的自由电流面密度为 $\boldsymbol{J}_S$，$\boldsymbol{s}$ 为窄矩形面的法线，则穿过该回路 $C$ 的面电流就应为 $\boldsymbol{J}_S\cdot \boldsymbol{s}\Delta l$。根据介质中的安培定律和 $\Delta \boldsymbol{l}=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}$，就有

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{H}_1\cdot\Delta\boldsymbol{l}-\boldsymbol{H}_2\cdot\Delta\boldsymbol{l}=\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\cdot\boldsymbol{s}\Delta l=\boldsymbol{J}_S\cdot\boldsymbol{s}\Delta l$$

于是有

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_S \qquad \text{或} \qquad H_{1t}-H_{2t}=J_S \tag{4.6.2}$$

介质的界面上一般没有自由面电流，此时，上式就变为

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=0 \qquad \text{或} \qquad H_{1t}-H_{2t}=0 \tag{4.6.3}$$

综上所述，在恒定磁场中介质的分界面上 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量连续，而 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量连续（当 $\boldsymbol{J}_S=0$ 时）。

3. 折射关系

图 4-22 的两种介质中的场量是共面的，因而有

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{B_{1t}/B_{1n}}{B_{2t}/B_{2n}}=\frac{\mu_1 H_{1t}}{\mu_2 H_{2t}}=\frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{4.6.4}$$

如果介质 1 为空气，介质 2 为铁磁物质，由于 $\mu_1\approx\mu_0\ll\mu_2$，故 $\theta_1\ll\theta_2$。只要 $\theta_2$ 比 90° 至少小 1°，

一般 $\theta_1$ 就不会超过 1°，因而空气中磁感应线总是几乎垂直于铁磁体表面的，而铁磁介质则像是在"收拢"磁力线，使其顺着磁铁走，因面如图 4-23 示的铁磁球壳能起到磁屏蔽的作用。与静电屏蔽的区别是，磁屏蔽是不彻底的。加厚屏蔽层可以提高屏蔽程度。更好的办法是双重屏蔽。如果两屏蔽层之间距离相当大，可以想象总屏蔽程度接近两个单层屏蔽程度的乘积。

4. 用矢量位表示的边界条件

首先，我们把矢量微分算子也像场量一样分解为法向和切向的两个算符：

$$\nabla = \nabla_t + \nabla_n$$

在直角坐标下，假设分界面为 $xy$ 面，则

$$\nabla_t = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y} \qquad \nabla_n = \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

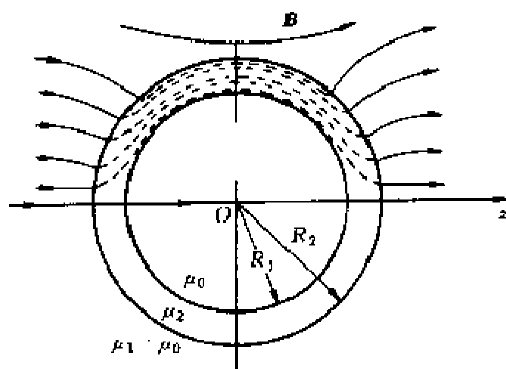



图 4-23 有磁屏蔽壳时的磁力线

从而 $\boldsymbol{B}_n = \nabla_t \times \boldsymbol{A}_t$（这也可由旋度矢量总是垂直于旋涡面看出）。由 $B_{1n} = B_{2n}$ 可导出 $A_{1t} = A_{2t} + C$。又因 $B_n$ 值有限，在相距为零（$\Delta h \to 0$）的分界面两侧之间不可能积累出矢位差，故必有 $C = 0$，$A_{1t} = A_{2t}$。否则，就会有 $\partial A_t / \partial z \to \infty$，意味着 $B_n \to \infty$。

其次，根据库仑规范 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$，$\boldsymbol{A}$ 为无散场，即 $\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$，故而界面处应有 $A_{1n} = A_{2n}$。

综上所述，用矢量位表示的边界条件应为

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2 \tag{4.6.5}$$

(4.6.3)式用 $\boldsymbol{A}$ 表示时应为

$$\frac{1}{\mu_1}(\nabla \times \boldsymbol{A}_1)_t = \frac{1}{\mu_2}(\nabla \times \boldsymbol{A}_2)_t \tag{4.6.6}$$

# 4.7 标量磁位

虽然磁场是有旋场，但对于恒定磁场来说，其涡旋源仅是恒定电流，因而在有恒定电流分布的曲线、表面和体积之外，就会处处有 $\nabla \times \boldsymbol{B} = 0$（这与时变场中的情况是完全不同的），从而可以引入标量位作为求解工具，令

$$\boldsymbol{H} = -\nabla \Phi_m \tag{4.7.1}$$

$\Phi_m$ 称为恒定磁场的标量[磁]位，单位为 A（安）。上式中的负号是为了与静电场的标量电位相对应而人为地加入的。

在均匀介质内，$\mu$ 与空间坐标无关，可导出标量磁位满足拉普拉斯方程：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu \nabla \cdot \boldsymbol{H} = -\mu \nabla \cdot (\nabla \Phi_m) = -\mu \nabla^2 \Phi_m = 0$$

故

$$\nabla^2 \Phi_m = 0 \tag{4.7.2}$$

这与电位的拉普拉斯方程完全相同，并且标量磁位与标量电位的边界条件形式上也相同：

$$B_{1n} = B_{2n} \quad \to \quad \mu_1 \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial n} \tag{4.7.3}$$

$$H_{1t} = H_{2t}（当 J_S = 0） \quad \to \quad \Phi_{m1} = \Phi_{m2} \tag{4.7.4}$$

如果场源电流不在研究的区域之内，而又已知磁场的边界条件，这类问题就可尝试用标量磁位来

求解，2.7 节和第 5 章介绍的拉普拉斯方程的解法都适用。以下即为一例。

***例 4.10** 图 4-24(a)所示为一个沿 $z$ 轴匝数密度均匀的细导线密绕而成的球形线圈，其总匝数为 $N$，通以电流 $I$，球半径为 $R$。

①求这些密绕线圈所形成的面电流密度 $\boldsymbol{J}_S$；

②该球形线圈可形成图 4-24(b)所示的磁场分布，称为"磁通球"。试求解球内外的磁场。

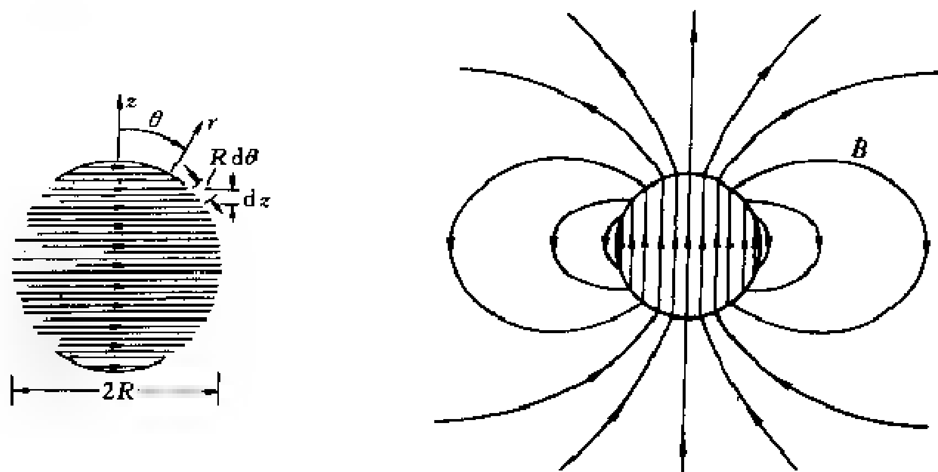



图 4-24 磁通球

(a)沿 $Z$ 轴匝数密度均匀的球形线圈；(b)"磁通球"的磁场强度。

**解** ①沿 $z$ 轴均匀的匝数密度为 $N/2R$，$z=r\cos\theta$，$|\mathrm{d}z|_{r=R}=R\sin\theta\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}l_\theta\sin\theta$，故密绕线圈在球面上形成的等效面电流为

$$\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{NI}{2R}\frac{|\mathrm{d}z|}{\mathrm{d}l_\theta}\bigg|_{r=R}=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{NI}{2R}\sin\theta$$

②因球内、外都无电流，边界条件 $J_S$ 已知，故可求解标量位的拉普拉斯方程。令球内、外的标量磁位和磁场强度分别为 $\Phi_{m1}$、$\Phi_{m2}$ 和 $\boldsymbol{H}_1$、$\boldsymbol{H}_2$。这里需要利用球坐标下的分离变量法求解球内、外标量位的拉普拉斯方程而得到的通解(5.3.7)式：

$$\Phi=\sum_{n=0}^{\infty}[A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}]\mathrm{P}_n(\cos\theta) \tag{5.3.7}$$

然后从中找出满足本题的边界条件的特解。

由于场源 $J_S$ 只存在于有限的区域，故 $r\to\infty$ 时应有 $\Phi_{m2}\to 0$，因而 $\Phi_{m2}$ 不应含有 $r^n$ 项；由于线圈绕法是沿 $z$ 轴正负两半对称的，故在球外的场应如同一个偶极子的场。根据图 4-16 和(2.4.2)式，应有

$$\Phi_{m2}=\frac{B}{r^2}\cos\theta\quad(r>R)$$

这说明应在(5.3.7)式中取 $n=1$，由(2.4.15)式，知 $P_1(\cos\theta)=\cos\theta$。又因 $r\to 0$ 时 $\Phi_{m1}\neq\infty$，故 $\Phi_{m1}$ 不应含有 $r^{-(n+1)}$ 项，于是由(5.3.7)式得

$$\Phi_{m1}=Ar\cos\theta\quad(r<R)$$

$A$、$B$ 为待定常数。由(4.7.1)式，得

$$\boldsymbol{H}_1=-\nabla\Phi_{m1}=-A(\boldsymbol{a}_r\cos\theta-\boldsymbol{a}_\theta\sin\theta)$$

$$\boldsymbol{H}_2=-\nabla\Phi_{m2}=\frac{B}{r^3}(\boldsymbol{a}_r 2\cos\theta+\boldsymbol{a}_\theta\sin\theta)$$

设球内外皆为空气，由法向边界条件(4.6.1)，知 $H_{1n}=H_{2n}$ 即 $H_{1r}=H_{2r}\,(r=R)$，故

$$-A=2B/R^3$$

本题 $\boldsymbol{J}_S\neq 0$，故不满足(4.7.4)式。由切向边界条件(4.6.2)，得 $\boldsymbol{a}_r\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{a}_\varphi\dfrac{NI}{2R}\sin\theta$，即

$$\frac{B}{R^3}-A=\frac{NI}{2R}$$

由上两式联立解得 $A=-\dfrac{NI}{3R}$，$B=\dfrac{NIR^2}{6}$，于是

$$\boldsymbol{H}_1=\frac{NI}{3R}(\boldsymbol{a}_r\cos\theta-\boldsymbol{a}_\theta\sin\theta)=\frac{NI}{3R}\boldsymbol{a}_z\quad(r<R)$$

$$\boldsymbol{H}_2=\frac{NI}{6R}\left(\frac{R}{r}\right)^3(\boldsymbol{a}_r 2\cos\theta+\boldsymbol{a}_\theta\sin\theta)\quad(r>R)$$

可见球外和磁偶极子的场相同，球内为匀强磁场。与此相对比，长直螺线管中的场只是在端部效应被忽略后的近拟匀强磁场。

利用标量磁位求解的一个最简单的例子如图4-25所示。其中的两个磁极是铁制的，需要计算空气中的磁场。因为铁的 $\mu\gg\mu_0$，而 $\boldsymbol{B}$ 垂直穿过界面时是连续的，故铁中的磁场强度 $H_i$ 远小于空气中的 $H_g$。若将 $H_i$ 忽略不计，则每个磁极就是一个等标量磁位体，因而以铁磁物质为边界面的问题中，磁极表面可认为是 $\Phi_m$ 的等位面，其间的磁场强度的求解方法与静电场完全相仿。譬如，若图4-25中两极的标量磁位值分别为 $U_m$ 和 $-U_m$，忽略边缘效应，就有

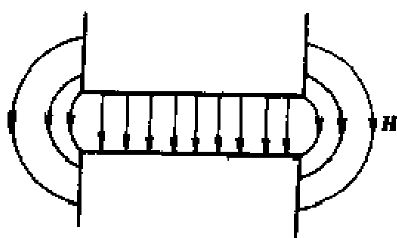


图4-25 一对磁极间的场

$$H=\frac{U_m-(-U_m)}{d}=\frac{2U_m}{d}$$

此外，在4.4节中我们还指出，磁偶极子(小圆环电流)以至任意形状的大电流回路在均匀介质中的场可以用回路对场点张的立体角的梯度来计算：

$$\boldsymbol{B}=-\nabla\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\Omega\right)\tag{4.4.8}$$

$$\boldsymbol{H}=-\nabla\left(\frac{I}{4\pi}\Omega\right)\tag{4.7.5}$$

从而电流回路的标量磁位场为

$$\Phi_m=\frac{I}{4\pi}\Omega\tag{4.7.6}$$

静电场中的标量位是与积分路径无关的、单值的(即恒定的、保守的)，而恒定磁场的标量位如果是在包围着电流的空间中，却是与路径有关的、多值的。例如，考虑 $\boldsymbol{H}$ 沿图4-26所示的三种路径的线积分。设 $P$ 为标量位 $\Phi_m$ 的参考点。按照安培环路定律，有

$$\oint_{Q2P1Q}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=I\longrightarrow\int_{Q2P}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{Q1P}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}+I=\Phi_m+I$$

$$\oint_{Q2P1Q}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=2I\longrightarrow\int_{Q3P}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{Q1P}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}+2I=\Phi_m+2I$$

显然，如果从 $Q$ 点起对 $I$ 的方向而言右(左)螺旋 $n$ 周到 $P$ 点，$\Phi_m$ 值就会加上 $nI(-nI)$。换言之，对同一点 $Q$ 而言 $\Phi_m$ 的取值有无穷多个，它们彼此之间相差一个常数 $nI(n=0,\pm1,\pm2,$

…)。但由于 $\boldsymbol{H}=-\nabla\Phi_m$，$\Phi_m$ 的多值性并不会影响磁场的解，所有仅相差一个常数的标量磁位所对应的磁场 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 都是完全相同的。在实际问题中，可用设置"隔膜"或称"壁障"(就是电流回路所张的任意一张曲面，如图 4-26 中阴影所示)的方法，使 $\boldsymbol{H}$ 的积分路线不能构成与电流回路套连的闭合路径来避免 $\Phi_m$ 出现多值性。

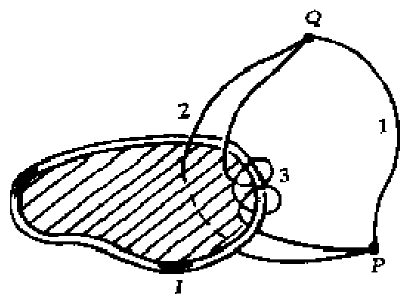


图 4-26　$\boldsymbol{H}$ 沿路径 1、2、3 的环量

与静电场的另一区别是，由于运动电荷(电流)受的磁力总是与 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{B}$ 垂直的，因此，除非引入假想磁荷，$\Phi_m=\int_Q^P \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}$ 不表示磁场力做的功，$\Phi_m$ 也不具有位能的含意，只是作为求解的数学工具。

在静电场中，对于电介质极化所产生的标量电位可以利用束缚体电荷 $\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$ 和束缚面电荷 $\rho_{PS}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$ 按(2.5.5)式计算。如果我们把介质磁化所产生的磁场解释成是磁荷产生的，且介质体积中的束缚磁荷密度为 $\rho_m=-\nabla\cdot\boldsymbol{M}$，表面上的束缚磁荷密度为 $\rho_{mS}=\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{n}$，由于电、磁场中有关的公式形式上完全相同，我们就可以比照(2.5.5)式直接写出介质中的磁荷所产生的标量磁位：

$$\Phi_m=\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{\rho_{mS}dS}{R}+\frac{1}{4\pi}\int_\tau\frac{\rho_m}{R}d\tau=\frac{1}{4\pi}\oint_S\frac{\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{n}}{R}dS-\frac{1}{4\pi}\int_\tau\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{M}}{R}d\tau \tag{4.7.7}$$

已知介质中磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 的分布时就可依上式计算 $\Phi_m$。

对于介质中的磁矩，事实上也存在着两种解释。一种是安培的分子电流模型，一种是磁荷模型，即认为磁偶极矩也像电偶极矩那样是由一对等量异号的磁荷产生的。虽然到目前为止尚未确认磁荷的存在，但这种假设却可以作为一种简化理论分析的工具。例如，在恒定磁场中均匀磁化的介质球的磁荷分布与静电场中均匀极化介质球的束缚电荷分布在数学形式上完全相同，而根据习题 5.18 的计算，后者在球外产生的场等效于一个电偶极子的场，在球内为匀强电场，于是我们就可直接写出前者在球外产生的场等效于一个磁偶极子的场，在球内为匀强磁场。(如果不是利用磁荷而是用球面上的磁化电流作为场源，则还须像例 4.10 那样去求解关于 $\Phi_m$ 的边值问题；或是按比奥-沙伐定律积分，它只能算出球的轴线上的场，轴线以外任意点的场是很难计算的。)

特别，在时变场的求解中，常常利用磁荷等对偶的物理量把场方程写成对偶的形式，然后根据对偶性原理套用电(磁)场的解直接写出磁(电)场的解，从而减少运算量，并便于记忆。

## 4.8 电　　感

电路理论中已介绍过电感器件，这里将从场的观点阐明电感概念的本质。

在以下的讨论中，假设载流回路本身和空间的介质都是线性的，多匝线圈都是均匀密绕的，并先假定回路都是无限细的。

根据比奥-沙伐定律，一个电流回路在空间产生的 $\boldsymbol{B}$ 是与场源电流 $I$ 成线性关系的，因而空间任一回路所包围的磁通也是与 $I$ 成正比的。设回路 $C_1$ 所产生的磁通(以磁力线代表)中与另一回路 $C_2$ 套连的磁通(磁力线)为 $\Phi$，$C_2$ 的匝数为 $N_2$，则 $\Psi_{12}=N_2\Phi$ 称为[互感]磁链。比例系数

$$M_{12}=\frac{\Psi_{12}}{I_1} \tag{4.8.1}$$

定义为回路 $C_1$ 对 $C_2$ 的互感[系数]，单位为 H。反过来，若回路 $C_2$ 中通有电流 $I_2$，产生的磁通也会有一部分同 $C_1$ 相套连而形成磁链 $\Psi_{21}$，则回路 $C_2$ 对 $C_1$ 的互感系数就是

$$M_{21}=\frac{\Psi_{21}}{I_2}$$

某 $N$ 匝载流回路 $C$ 所产生的磁通 $\Phi$ 必然全部与 $C$ 相套连而形成[自感]磁链 $\Psi=N\Phi$(因为导线无限细且均匀密绕)。$\Psi$ 同回路 $C$ 自身电流的比值

$$L=\frac{\Psi}{I} \tag{4.8.2}$$

就定义为回路 $C$ 的自感系数，单位同互感。

互感和自感都是与回路电流大小无关的、仅取决于线圈的几何参数(大小、形状、相互位置)、匝数和空间介质的一个常数。

定义式(4.8.1)、(4.8.2)仅在恒定场、缓变场的情况下才是有意义的，因为 $\Psi$ 和 $I$ 须是同一时刻的。

正像电容这一参数的引入可以使电场的求解转化为电路的计算而简化，电感的引入也具有同样的意义和作用。利用 $n$ 个载流线圈磁链的计算公式(它与“多导体系统，部分电容”一节的(2.9.6)式相对应)

$$\Psi_j=M_{1j}I_1+M_{2j}I_2+\cdots+M_{nj}I_n=\sum_{k=1}^{n}M_{kj}I_k \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4.8.3}$$

也可以把恒定磁场的问题 $\boldsymbol{J}\rightarrow\boldsymbol{B}\rightarrow\Psi$、$W_m$ 转化为电路计算的简单问题 $I$、$L\rightarrow u_L$、$W_m$。

电感的计算公式可由其定义式导出。先讨论两个单匝回路间的互感(参看图 4-27)。当回路 $C_1$ 通有电流 $I_1$ 时，它在回路 $C_2$ 中的磁链为：

$$\Psi_{12}=\int_{S_2}\boldsymbol{B}_{12}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2=\oint_{C_2}\boldsymbol{A}_{12}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$$

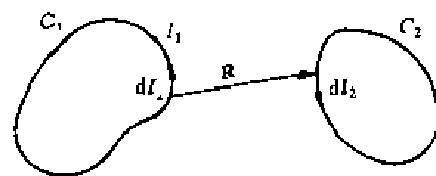



图 4-27 两回路间互感的计算

其中 $A_{12}$ 为回路电流 $I_1$ 在 $\mathrm{d}l_2$ 处的矢量位，它等于

$$\boldsymbol{A}_{12}=\frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{C_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{R}$$

故

$$\Psi_{12}=\frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{R}$$

$$M_{12}=\frac{\Psi_{12}}{I_1}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{R}$$

同样也可以求得

$$M_{21}=\frac{\Psi_{21}}{I_2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{R} \tag{4.8.4}$$

可见

$$M_{12}=M_{21}=M \tag{4.8.5}$$

(4.8.4)式称为诺依曼(Neumann)公式。

自感的计算公式可从诺依曼公式直接得到。以图 4-28 所示的一个单匝数圈为例。如果我们把电流 $I_1$ 看成是集中在导线的轴线 $C_1$(图中虚线)上的细电流，而把计算磁通的回路 $C_2$ 取作沿该线圈的内侧壁的细回路，就可利用计算互感的公式(4.8.4)来计算自感：

$$L=\frac{\Psi}{I}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{R} \tag{4.8.6}$$

如果 $C_1$、$C_2$ 分别为 $N_1$、$N_2$ 匝的线圈，则(4.8.3)式中沿 $C_1(C_2)$ 的同样的线积分就要进行 $N_1(N_2)$ 周，因而有

$$M\propto N_1N_2 \tag{4.8.7}$$

而计算自感时相当于 $N_1=N_2=N$ 的情形，故有

$$L\propto N^2 \tag{4.8.8}$$

当 $C_1$ 与 $C_2$ 重合，(4.8.6)式计算的就是无限细导线回路的自感。但实际的导线总是有非零截面的，(4.8.6)式所表示的自感系数只计算了图 4-28 中线圈的内侧壁所包围的磁通，也就是同导线中的全部电流相套连的、位于导线外部的磁通(记为 $\Psi_o$)，故也称为外自感($L_{外}$)。在导线内部也存在着磁通，它们只与部分电流相套连。导线内部的磁通(记为 $\Psi_m$)与导线电流 $I$ 的比值定义为内自感($L_{内}$)。为了把 $L_{内}$ 也计入，我们把电流 $I$ 划分成许多很细的线电流 $J\mathrm{d}S$，以 $\Psi$ 表示同每根 $J\mathrm{d}S$ 套连的总磁通，$\Psi=\Psi_o+\Psi_m$。如果定义与 $I$ 套连的平均磁通为

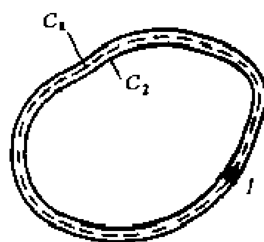


图 4-28 外自感的计算

$$\bar{\Psi}=\frac{1}{I}\int_S J\Psi\mathrm{d}S \tag{4.8.9}$$

则

$$\bar{\Psi}=\frac{1}{I}\int_S J\Psi_o\mathrm{d}S+\frac{1}{I}\int_S J\Psi_m\mathrm{d}S \tag{4.8.10}$$

为与 $I$ 套连的平均内磁通。于是，一个实际线圈总的自感为

$$L=\frac{\bar{\Psi}}{I}=\frac{\bar{\Psi}_o}{I}+\frac{\bar{\Psi}_m}{I}=\frac{\Psi_o}{I}+\frac{1}{I^2}\int_S J\Psi_m\mathrm{d}S=L_{外}+L_{内}$$

其中外自感 $L_{外}=\frac{\Psi_o}{I}$ 等同于(4.8.6)式，内自感为

$$L_{内}=\frac{1}{I^2}\int_S J\Psi_m\mathrm{d}S=\frac{\bar{\Psi}_m}{I} \tag{4.8.11}$$

**例 4.11** 求双线输电线单位长度的自感。已知导线半径为 $a$，导线间的距离 $D\gg a$，如图 4-29 所示，并假设大地的影响可以忽略。

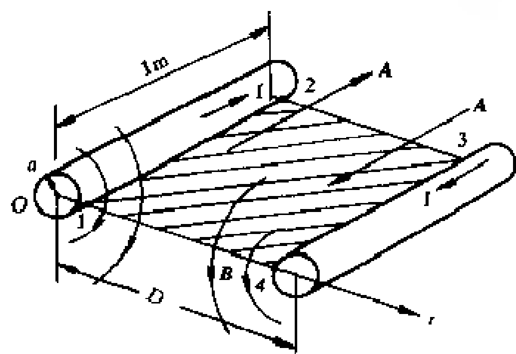


图 4-29 双线传输线的自感

**解** 设导线电流为 $I$。我们可利用矢量位来计算磁通，沿着长 1 米、宽 $D$ 米的矩形面积 $S$ 的边界线即回路 $C$：1→2→3→4→1 来计算 $\boldsymbol{A}$ 的环量。根据(4.3.5)式，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_z\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$，故在 2→3 和 4→1 两线段上 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，只需考虑单位长的线段 1→2 和 3→4。把这两段上的矢量位值分别记为 $A_1$ 和 $A_2$，则

$$\Psi=\oint_C\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=A_1-A_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{D-a}{a}-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{a}{D-a}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{D-a}{a}$$

我们也可直接用 $\boldsymbol{B}$ 来计算矩形面积 $S$ 上的磁通。在两导线所成的平面上，两根电流(视为

无限长直线)所产生的磁感应恰与该平面垂直,且方向一致,故合成的场为

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)$$

与单位长度的导线套连的外磁通为穿过图 4-29 中阴影所示面积的磁通:

$$\Psi = \int_S B\mathrm{d}S = \int_a^{D-a}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{D-a}{a}$$

故单位长度的外自感为

$$L_{外} = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D-a}{a}\approx\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D}{a} \qquad (4.8.12)$$

**再求** $L_{内}$。在工频(50Hz)时,直径不超过1 cm的导线内电流的分布还基本上是均匀的,因而 $J=I/\pi a^2$。近似按无限长直导线计算,载流导线内的磁感应为

$$B=\frac{\mu_0 J\pi\rho^2}{2\pi\rho}=\frac{\mu_0 J\rho}{2}=\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\rho$$

为了计算导线内部的磁链 $\Psi_m$,我们把导线截面划分成一个个半径为 $\rho$、厚度为 $\mathrm{d}\rho$ 的圆环,如图 4-30 所示,流过每层圆环的轴向电流为 $J\mathrm{d}S=J2\pi\rho\mathrm{d}\rho$,单位长度导线上和该薄层电流套连的内磁通为

$$\Psi_m(\rho)=\int B\mathrm{d}S=\int_\rho^a \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2}\rho\cdot 1\cdot\mathrm{d}\rho=\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}(a^2-\rho^2)$$

再由(4.8.10)、(4.8.11)式,可得

$$\Psi_m = \frac{1}{I}\int_S J\Psi_m(\rho)\mathrm{d}S=\frac{1}{I}\int_0^a\frac{I}{\pi a^2}\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}(a^2-\rho^2)2\pi\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi a^4}\int_0^a(a^2-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\mu_0 I}{8\pi}$$

$$L_{内}=\frac{\bar{\Psi}_m}{I}=\frac{\mu_0}{8\pi} \qquad (4.8.13)$$

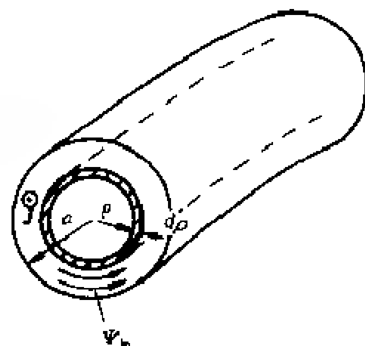



图 4-30 内自感的计算

故两根导线的内自感为 $L_{内}=\frac{\mu_0}{8\pi}\times 2=\frac{\mu_0}{4\pi}$,从而单位长度的自感为

$$L_{外}+L_{内}=\frac{\mu_0}{\pi}\left(\ln\frac{D}{a}+\frac{1}{4}\right) \qquad (4.8.14)$$

由于 $D\gg a$,因而一般会有 $\ln\frac{D}{a}\gg\frac{1}{4}$,所以单位长度双线输电线的自感可以近似认为就是外自感 $L_{外}$。

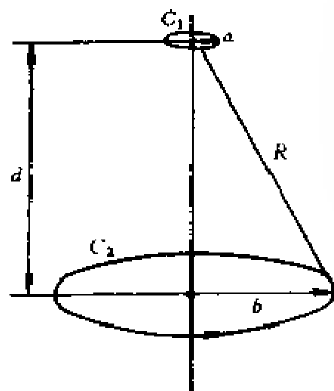



图 4-31 两个圆线圈的互感

由于实际导线并非无限细引起的磁通计算问题,不仅对自感系数存在,对互感系数同样也存在,只不过工程上实际上是近似把导线作为无限细来计算互感的。

**例 4.12** 两个共轴的、互相平行的一匝圆线圈相距为 $d$,半径分别为 $a$ 和 $b$,且 $d\gg a$(图 4-31),求互感。

**解** 我们先以小线圈 $C_1$ 为源来计算它对 $C_2$ 的感应。根据(4.3.6)式,当 $R\gg a$ 时,小线圈 $C_1$ 产生的矢量位为

$$\mathbf{A}=\mathbf{a}_\varphi\frac{\mu_0\pi a^2 I}{4\pi R^2}\sin\theta$$

沿着大线圈是 $\boldsymbol{A}$ 的等值线，故有

$$\Psi_{12}=\oint_{C_2}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2=A\cdot 2\pi b=\frac{\mu_0\pi a^2 I}{4\pi R^2}(\sin\theta)2\pi b$$

由于 $d\gg a$，故可认为 $R=\sqrt{b^2+d^2}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{b^2+d^2}}$

$$M=\frac{\mu_0\pi a^2 b^2}{2(b^2+d^2)^{3/2}} \tag{4.8.15}$$

我们也可以大线圈 $C_2$ 为源来计算互感。根据(4.1.18)式，圆环电流在其轴线上产生的磁感应为

$$B=\frac{\mu_0 I b^2}{2(b^2+d^2)^{3/2}}$$

因为 $a\ll d$，可近似认为 $C_1$ 包围的小圆面积中 $\boldsymbol{B}$ 近似都相等，故有

$$\Psi_{21}=BS_1=\frac{\mu_0 I b^2}{2(b^2+d^2)^{3/2}}\pi a^2$$

$$M=\frac{\Psi_{21}}{I}=\frac{\mu_0\pi a^2 b^2}{2(b^2+d^2)^{3/2}}$$

## 4.9 磁场能量 磁场力

### 1. 磁场能量

本节将从电流在磁场中受安培力的基本现像出发来导出载流系统的能量。正像电荷系统的静电能是在建立电荷系统（把点电荷从彼此相距无限远移近）的过程中外力作功所赋予的，载流回路系统的磁场能量也是在建立这个系统（把载流回路从彼此相距无限远移近）的过程中外加电源做功所赋予的。

我们先假设载流回路的导线无限细，并假设回路线圈为刚体。

今有电流回路 $C_1$，在外磁场 $\boldsymbol{B}$ 的作用下产生位移。不必限于平动，故 $C_1$ 上各点的位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ 可以是不同的。$C_1$ 上的电流元 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 受到的磁场力为 $\boldsymbol{f}=I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$，则使线电流元 $I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ 时磁场力做的功为

$$\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=(I_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=I_1\boldsymbol{B}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{l})=I_1\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

于是外磁场使整个回路 $C_1$ 位移所做的功为

$$\mathrm{d}A_1=\oint_C\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=I_1\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=I_1\mathrm{d}\Psi_1$$

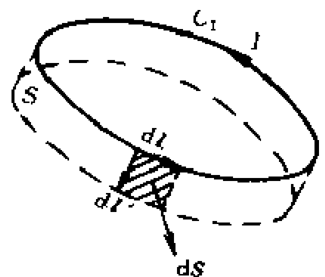



图 4-32 外磁场力使电流回路 $C_1$ 位移

其中 $S$ 为 $C_1$ 位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ 时所扫过的环形表面，如图 4-32 所示。$\Psi_1$ 为其他电流回路产生的与 $C_1$ 套连的磁通。我们下面称其为互感磁通。

设空间只有两个回路 $C_1$ 和 $C_2$，则从相对运动的观点，也可以看成是 $C_1$ 未动而 $C_2$ 发生了相反的位移 $-\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$，于是磁场对 $C_2$ 所做的功为

$$\mathrm{d}A_2=I_2\mathrm{d}\Psi_2$$

显然，磁场在 $C_1$ 和 $C_2$ 的相对位移中做的功是个唯一的客观存在，与主观的看法无关，故应当有

$$dA_1 = dA_2 = dA = \frac{dA_1 + dA_2}{2} = \frac{1}{2}(I_1 d\Psi_1 + I_2 d\Psi_2)$$

同理,若载流系统包括三个线圈,则 $C_1$ 的位移 $dl'$ 也可看成是 $C_1$ 未动而 $C_2$ 和 $C_3$ 发生了相反的位移 $-dl'$,而外磁场对 $C_2$ 和 $C_3$ 作的功为 $dA_2 + dA_3 = I_2 d\Psi_2 + I_3 d\Psi_3$,故应当有

$$dA_1 = dA_2 + dA_3 = dA = \frac{dA_1 + dA_2 + dA_3}{2} = \frac{1}{2}(I_1 d\Psi_1 + I_2 d\Psi_2 + I_3 d\Psi_3)$$

依此类推,对 $n$ 个载流回路的系统就有

$$dA = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} I_j d\Psi_j \tag{4.9.1}$$

下面来探讨磁场做功和磁场能的变化有什么关系。假设各回路的电流 $I_j$ 在位移过程中保持不变。由于各线圈相对位移使互感系数发生变化,各线圈中的互感磁通必然随之变化而产生反电动势。为保持 $I_j$ 不变,回路 $C_j$ 必须外加电源 $u_j$ 克服回路中的反电动势,并平衡掉回路中的电阻造成的电压降:

$$u_j = I_j R_j + \frac{d\Psi_j}{dt}$$

在 $dt$ 时间内电源输入 $C_j$ 的能量为

$$u_j I_j dt = I_j^2 R_j dt + I_j d\Psi_j$$

$I_j^2 R_j dt$ 是使回路 $C_j$ 发热损耗的能量。对于 $n$ 个线电流回路的系统,各电源输入磁场的总能量为

$$dW_{源} = \sum_{j=1}^{n} I_j d\Psi_j \tag{4.9.2}$$

根据能量守恒原理,应有

$$dW_{源} = dW_m + dA$$

把(4.9.1)和(4.9.2)代入上式,得

$$dW_m = dA = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} I_j d\Psi_j \tag{4.9.3}$$

可见,在保持各回路电流不变的假设下,线圈位移后磁场能量的增量恰与磁场对线圈位移做的功数值相等,各占电源供给的能量的一半。

但是,在线圈位移过程中,作为刚体的线圈并未变形,因而本身的自感磁通并未变化,所以上式的 $dW_m$ 实际上只代表互有能量的变化。假设我们需要计算的是 $n$ 个回路系统的互有能量,则须假设起始状态时 $n$ 个回路彼此相距无限远,互感磁通 $\Psi_j = 0 (j = 1,2,\cdots,n)$,而最终状态为 $n$ 个回路分别具有互感磁通 $\Psi_1$、$\Psi_2$、…、$\Psi_n$。全过程中保持各回路电流 $I_j$ 不变,这样,根据(4.9.3)式,这个系统各回路间最终的互有能量就应为

$$W_{互} = \int dW_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} I_j \int d\Psi_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} I_j \Psi_j \tag{4.9.4}$$

下面考虑实际的载流回路。它们的导线截面并不为零,因而总会有一些磁力线只套连上了导线的部分电流,因而前面谈及的穿越某回路的互感磁通实际上是不确定的。此外,我们所要计算的也不只是系统的互有磁能,而是总磁能,因而(4.9.4)式还不能用于磁能的实际计算。以下我们将这样解决上述困难:我们把一条实际导线看作 $m$ 根载有电流 $J_k \Delta S_k (k = 1,2,\cdots,m)$ 的细导线组成的。这样,$n$ 个实际线圈的系统就可看成是 $mn$ 个线电流回路的系统。于是

可用(4.9.4)式计算这个系统的互有能量

$$W_{互} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{mn} J_k \Psi_k \Delta S_k \tag{4.9.5}$$

按照(4.9.4)式的含义，上式中的 $\Psi_k$ 应是指电流 $J_k\Delta S_k$ 之外的 $mn-1$ 个线电流回路所产生的与该电流回路套连的互感磁通，但当 $m\to\infty$ 时每根导线将变得无限细，$J_k\Delta S_k$ 本身所产生的自感磁通与 $\Psi_k$ 相比已微乎其微。因而可认为 $\Psi_k$ 就是 $J_k\Delta S_k$ 这个电流回路所套连的全部 $mn$ 根电流产生的磁通(自感和互感磁通)。而且，把实际导线这样划分成许多细线，使得任一实际导线中除了一根 $J_k\Delta S_k$ 之外的其余 $m-1$ 根线电流产生的与该 $J_k\Delta S_k$ 套连的磁通都被作为互感磁通而得以计入，而实际上它们就是实际回路 $C_j$ 所产生的自感磁通。这样，回路 $C_j$ 的自有能量就以互有能量的形式被计入了。于是，$n$ 个载流回路的总磁能 $W_m$ 应是 $m\to\infty$ 时(4.9.5)式的极限：

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_{S_j} J\Psi \mathrm{d}S \tag{4.9.6}$$

$S_j$ 为回路 $C_j$ 的导线横截面，注意式中的 $J$ 是仅分布在截面 $S_j$ 上的，而 $\Psi$ 则是同线电流 $J\mathrm{d}S$ 套连的所有电流产生的磁通。这一计算公式实际上是不方便的。如果利用(4.8.9)式定义的一个实际回路套连的平均磁通，(4.9.6)式就可写成如下形式：

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} I_j \bar{\Psi}_j \tag{4.9.7}$$

如果把实际的粗电流 $I_j$ 理解为套连着平均磁通 $\bar{\Psi}_j$ 的无限细的电流，就可把(4.8.3)式代入上式，得到用电感系数表示的系统的总磁能

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{kj} I_k I_j \tag{4.9.8}$$

对于只有两个回路的系统，用上式计算磁场能量是最为方便的。此时 $n=2$，故有 $M_{11}=L_1$，$M_{22}=L_2$，$M_{12}=M_{21}=M$，从而得到

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \tag{4.9.9}$$

当 $n=1$，显然有

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \tag{4.9.10}$$

与电容的电能公式 $\frac{1}{2}CU^2$ 和物体动能公式 $\frac{1}{2}mv^2$ 相对照，有时人们也把 $L$ 称为电磁容量或电磁惯量(如同 $m$ 是物体惯性大小的度量)。于是，一个回路的自感系数也可以利用它通有恒定电流时的磁场能量来计算

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \tag{4.9.11}$$

从(4.9.6)和(4.8.9)～(4.8.11)式可看出，这样计算的自感能够把内自感也无遗漏地计入，因为 $W_m$ 中也包括位于导线内部的磁场能 $W_{内}$，而 $W_{内}$ 与导线内部的磁场——磁通相联系。

我们也可以利用矢量位来计算 $W_m$。把 $\Psi = \oint_{C_j} \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$(其中 $\boldsymbol{A}$ 为所有 $n$ 个电流产生的合成矢量位在 $C_j$ 上的取值)代入(4.9.7)式，就得到

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i \oint_{C_i} \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{4.9.12}$$

若考虑导线的截面不为零，利用 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{J}\mathrm{d}\tau$ 就可以把上式推广到分布电流的情形：

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{\tau} \boldsymbol{J}\cdot \boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau \tag{4.9.13}$$

这一用电流及矢量磁位表示的磁能公式和用电荷及标量电位表示的电场能公式 $W_e=\frac{1}{2}\int_{\tau}\rho\Phi\mathrm{d}\tau$ 是相对应的。(4.9.13)式的积分体积 $\tau$ 不妨扩大到全空间，因为没有电流的空间对积分的贡献为零。也正因为如此，容易给人造成一种错觉，即没有电流的空间就没有磁能，磁能只存在于有电流的地方，事实并非如此。

下面我们从(4.9.13)式导出用场量表示的磁能计算公式。把 $\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}$ 及矢量恒等式(A2.5)代入(4.9.13)式右边并利用散度定理，可导出：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\tau}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau &= \frac{1}{2}\int_{\tau}\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_{\tau}[\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})+\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})]\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_{\tau}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\oint_{S}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\end{aligned}$$

当 $\tau$ 扩张为全空间时，上式后一积分趋于零。这是因为 $\tau$ 的边界面（不妨设想为球形，半径为 $R$）的面积 $S\propto R^2$，而 $A\propto\frac{1}{R}$，$H\propto\frac{1}{R^2}$ 之故。于是得到

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{\tau}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}\tau \tag{4.9.14}$$

体积 $\tau$ 表示全空间。上式表明，凡是场不为零的空间就对磁能有贡献，磁能是场的能量，而被积函数可视为磁场能量密度（下式中后两个等号仅适用于各向同性介质）：

$$w_m = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu} \tag{4.9.15}$$

从电力储能（可用于每日供电调峰）的角度，表 4.1 显示，在各种实际可行的方式中，磁场所能达到的能量集中程度最高（当然这也是借助超导体的超强持久电流才能实现的）。

**表 4.1 各种储能方式的能量密度**

| 储 能 方 式 | 能量密度(kW·h/m³) |
|---|---|
| 磁场， 10 T | 11 |
| 电场， $10^5$ kV/m | 0.01 |
| 水库， 高100 m | 0.27 |
| 压缩空气， 50 atm | 5 |
| 热水， 100 ℃ | 18 |

例如储存$10^4$ kW·h电能所需的磁场(10 T)的体积仅约为1 000 m³。一个直径为100 m、截面积为5 m见方的超导线螺绕环就大致够了。但对本书着重讨论的电磁波而言，以均匀平面波为例，空间电场和磁场的能量密度是相等的。

2. *磁场力*

两个载流回路间的作用力原则上可用安培力定律计算，但实际上很不方便，因而常常希望用磁场能量对空间的变化率来计算力，也就是采用虚位移法。在阐述该方法时，我们将回路看

成刚体，因而受外力时可当作质点对待。

假设在 $N$ 个载流回路的系统中有一个回路 $C_i$ 在磁场力 $\boldsymbol{f}$ 的作用下产生了微小位移 $\mathrm{d}x$，如图 4.33 所示，而其余回路位置固定不变，则每个回路中套连的磁通和通过各回路的电流都会有一个相应的微小变化 $\mathrm{d}\Psi_k, \mathrm{d}i_k (k=1,2,\cdots,N)$。于是，依(4.9.7)式，磁场能量的变化为

$$\mathrm{d}W_m = \frac{1}{2}\sum_{k}^{N}\mathrm{d}(i_k\Psi_k) = \frac{1}{2}\sum_{k}^{N}(i_k\mathrm{d}\Psi_k + \Psi_k\mathrm{d}i_k) \tag{4.9.16}$$

各回路的电源在 $\mathrm{d}t$ 时间内为克服磁链变化所感生的反电动势所做的功，即电源输入这 $N$ 个载流回路系统的能量为

$$\sum_{k=1}^{N}u_k\mathrm{d}q_k = \sum_{k=1}^{N}\frac{\mathrm{d}\Psi_k}{\mathrm{d}t}i_k\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{N}i_k\mathrm{d}\Psi_k$$

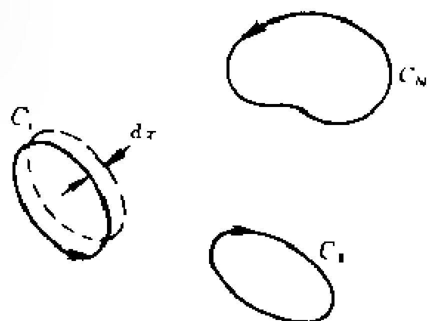



图 4.33 用虚位移法计算磁场力的示意图

根据能量守恒原理，电源做的功应等于磁场能的增量和使回路 $C_i$ 位移做的机械功（假设回路中没有电阻，因而没有焦耳损耗）：

$$\sum_{k=1}^{N}i_k\mathrm{d}\Psi_k = \mathrm{d}W_m + f\mathrm{d}x \tag{4.9.17}$$

下面分两种情况讨论。

(1)假定各回路包围的磁通 $\Psi_k$ 保持不变，即 $\mathrm{d}\Psi_k=0$（这可以在 $C_i$ 位移的过程中调节各回路的电源电压来做到）。此时各回路中不感生反电动势，因而各电源不必克服反电动势做功，(4.9.17)式左端为零。这样，机械功的来源只能是磁场能的减少，因而得到

$$f = -\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}x}\bigg|_{\Psi=\text{const}} \tag{4.9.18}$$

(2)假设各回路电流 $i_k$ 保持不变，即 $\mathrm{d}i_k=0$（这也可以在 $C_i$ 位移的过程中调节各回路电源电压来做到）。这种情形本节前部已论述过，见(4.9.2)～(4.9.3)式。或者，也可把 $\mathrm{d}i_k=0$ 代入(4.9.16)式而得到同样的结果：

$$\mathrm{d}W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}i_k\mathrm{d}\Psi_k$$

它表明磁能的增量恰占电源输入该系统的能量的一半。由于能量守恒，另一半必是被磁场用来对回路作机械功 $\mathrm{d}A$ 了，即 $\mathrm{d}W_m=\mathrm{d}A=f\mathrm{d}x$，故有

$$f = \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}x}\bigg|_{i=\text{const}} \tag{4.9.19}$$

分别假设 $\Psi_k$ 或 $i_k$ 不变所导出的磁场力计算式都是在假设某一回路发生同样的位移的情况下得出的，这两种方法计算出的结果应当是相同的。

由于刚体线圈可视为质点，其位移可更一般地表示为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，磁场力做的功可表为 $\mathrm{d}W_m=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，于是，与静电场中同理，(4.9.18)和(4.9.19)式可更一般地表为：

$$\boldsymbol{F} = -\nabla W_m\big|_{\Psi=\text{const}} \tag{4.9.20}$$

$$\boldsymbol{F} = \nabla W_m\big|_{i=\text{const}} \tag{4.9.21}$$

在 $N=2$ 的简单情形，由(4.9.9)式可看出磁能的变化仅是由 $M$ 的变化引起的，故(4.9.21)式可写成

$$\boldsymbol{F} = \nabla W_m\big|_{i=\text{const}} = I_1 I_2 \nabla M \tag{4.9.22}$$

当 $N=1$，由(4.9.10)式，$I$ 为常数时 $W_e$ 的变化仅仅由 $L$ 的变化所引起，于是(4.9.21)式变为

$$\boldsymbol{F}=\nabla\left(\frac{1}{2}LI^2\right)=\frac{I^2}{2}\nabla L \tag{4.9.23}$$

采用了一般表达式(4.9.20)、(4.9.21)后，虚位移就不仅限于表示受力对象的平动，所受磁力的形式也更多样。例如，若 $W_m=W_m(\varphi)$，则 $\boldsymbol{F}=+\nabla W_m(\varphi)=\pm \boldsymbol{a}_\varphi\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}\varphi}$，表示受力对象转动 $\mathrm{d}\varphi$ 角时会受到力矩 $F\rho$。

***例 4.13** 理想导体平板上方有一与板平行的无限长直导线如图 4.34 所示。导线半径为 $a$，导线的轴线与板面相距为 $D/2$，导线所载电流自平板返回。求作用在导线单位长度上的力。

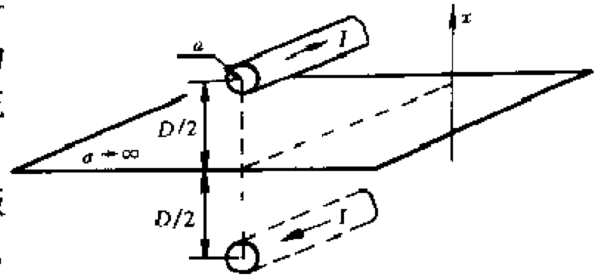



图 4.34 例 4.13 图

**解** 本题须借助第 5 章的镜像法。假想板下方与上方导线对称的位置上有一同样的导线，但电流与 $I$ 反向，由于这样一对导线的系统不改变原来的边界条件(导体板面上 $H_n=0$)，这个系统的上半边磁场就是原题的磁场；上方导线所受的由板面电流产生的作用力等于镜像电流对它的作用力。假设 $D\gg R$，即导线离板足够远(意味着可以忽略导线与导体板之间、也即与镜像导线之间的相互感应)，则可利用例 4.11 的结果(4.8.12)。根据(4.9.23)式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}&=\nabla W_m\Big|_{I=\text{const.}}=\frac{I^2}{2}\nabla L\\&=\boldsymbol{a}_x\frac{I^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{x-a}{a}\right)\Big|_{x=D}=\boldsymbol{a}_x\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\frac{1}{x-a}\Big|_{x=D}\approx\boldsymbol{a}_x\frac{\mu_0 I^2}{2\pi D}\end{aligned}$$

正值表示导线所受的力朝 $x$ 正方向，故为斥力。上式与 $\int_x^{x+1}I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x IB=\boldsymbol{a}_x\dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi D}$ 结果一致。

如果导线距板面很近，则 $L$ 值必须采用根据镜像法得到的更精确的结果。根据(5.4.7)式并利用 $\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，可得到双平行无限长直导线间单位长度的电容：

$$C_0=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{\dfrac{D}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{D}{2}\right)^2-a^2}}{\dfrac{D}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{D}{2}\right)^2-a^2}}}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\operatorname{arccosh}\dfrac{D}{2a}}\approx\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{D}{a}}$$

而双平行无限长直导线间的电感可套用上式直接写出：

$$L_0=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{\dfrac{D}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{D}{2}\right)^2-a^2}}{\dfrac{D}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{D}{2}\right)^2-a^2}}=\frac{\mu_0}{\pi}\operatorname{arccosh}\frac{D}{2a}\approx\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D}{a}$$

由此得到

$$\boldsymbol{f}=\frac{I^2}{2}\nabla L_0=\boldsymbol{a}_x\frac{I^2}{2}\frac{\mu_0}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{arccosh}\frac{x}{2a}\right)_{x=D}=\boldsymbol{a}_x\frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}\Big/\sqrt{\left(\frac{D}{2a}\right)^2-1}$$

物理量这样代换是由于双平行线的静电场和静磁场间具有对偶性[参见(2.3.15)和(4.3.5)式]：

$$\frac{1}{C_0} = \frac{U}{\rho_l} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\rho_l} \qquad\qquad \Phi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho}$$

$$L_0 = \frac{\Psi}{I} = \frac{A_1 - A_2}{I} \qquad\qquad A = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

因而将对应的物理量一一代换即可。如果令任一导线如导线 2 为零位点，将 $\Phi_1$、$A_1$ 按上述 $\Phi$、$A$ 的公式计算，还可得到：

$$L_0 C_0 = \frac{A}{I}\frac{\rho_l}{\Phi} = \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \qquad (c \text{ 为光速})$$

这是一个真空中的完纯导体双平行线单位长度的电感、电容之间的一般关系式，它与导线的截面形状无关。

**例 4.14** 图 4.35 所示的磁能转换器由磁路组成，磁路下部的零件（衔铁）可以在 x、y 两个方向移动，求作用在这个零件上的磁场力。

**解** 一段长 $l$、截面 $S$、磁导率 $\mu$ 的磁路的磁阻为

$$R_m = \frac{F_m}{\Phi} = \frac{nI}{\Phi} = \frac{1}{L} = \frac{\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}}{BS} = \frac{l}{\mu S}$$

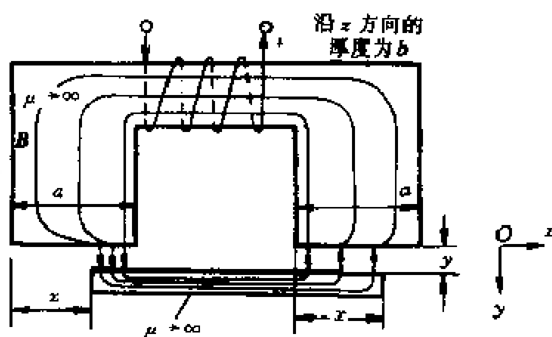



图 4.35 例 4.14 图

其中 $F_m$ 为磁动势。正如电流总是走电阻最小的路径，磁通也是走磁阻最小的路线。由于磁铁的 $\mu\to\infty$，气隙中的 $\boldsymbol{B}$ 线应垂直于磁铁表面，因而衔铁处于如图所示的位置时，磁力线的分布应如图所示；且在磁铁中 $H_i = \frac{B}{\mu}\to 0$，$W_i = \frac{1}{2}\mu H_i^2\to 0$，磁场能主要分布在气隙中。设左（右）侧的气隙体积、气隙中的磁通和磁场强度分别为 $V_1$、$\Phi_1$、$H_1$（$V_2$、$\Phi_2$、$H_2$），根据磁通连续性原理，应有

$$\Phi_1 = B_1 S_1 = \mu_0 H_1 (a-x) b = \mu_0 H_2 x b = B_2 S_2 = \Phi_2$$

故

$$H_1(a-x) = H_2 x$$

由安培定律

$$(H_1 + H_2) y = nI$$

联立解出

$$H_1 = \frac{x}{a-x} H_2$$

$$H_2 = \frac{nI(a-x)}{ay}$$

两边气隙中的磁能总共为

$$W_m(x,y) = \frac{1}{2}\mu_0 (H_1^2 V_1 + H_2^2 V_2)$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 H_2^2\left[\left(\frac{x}{a-x}\right)^2 (a-x) y b + x y b\right]$$

$$= \frac{\mu_0 n^2 I^2 b x (a-x)}{2ay}$$

由(4.9.21)式，衔铁受力为

$$\boldsymbol{F} = \nabla W_m\Big|_{I=\text{const}} = \boldsymbol{a}_x\frac{\partial W_m}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y\frac{\partial W_m}{\partial y}$$

$$\frac{\mu_0 n^2 I^2 b}{2a}\left[\frac{a-2x}{y}\mathbf{a}_x-\frac{x(a-x)}{y^2}\mathbf{a}_y\right]=\mathbf{a}_x F_x+\mathbf{a}_y F_y$$

从上式可看出，$F_y$ 总是负值，即总是向上的吸力；$x<a/2$ 时 $F_x$ 为正，即向右；而 $x>a/2$ 时 $F_x$ 为负，即向左；故衔铁的横向受力总是力图使它维持在横向的正中央位置。不难证明，对于一定的 $y$ 值，这是系统磁能最小的位置。磁力对衔铁作用的过程中伴随着磁能的减少。磁场能量也像静电能量一样，总是自动趋向于减小，以求系统的稳定。

在计算衔铁的受力时，我们用的是就载流回路导出的受力公式。这正如在静电场中我们计算介质的受力时根据的是对导体推出的受力公式。这是因为介质位置的变化也同样导致场能量的变化。

## *4.10 空间的运动电荷与电磁场的相互作用

本章前面主要介绍了传导电流的磁场以及恒定磁场对传导电流回路或铁磁介质的作用力；本节将扼要介绍空间运动的电荷的电磁场以及恒定磁场、静电场对空间运动电荷的作用。

### 一、带电粒子在恒定磁场和静电场中的运动

4.1 节中曾指出，电流受力的本质是运动的电荷在磁场中受力，它称为洛仑兹力。用洛仑兹力分析带电粒子在恒定磁场以及静电场中的运动轨迹在各个领域有着广泛的应用，例如回旋加速器、动量分析器、速度选择器、质谱仪、阴极射线管，等等。

在这一讨论中不考虑带电粒子本身对场的影响。

设带电粒子的电量和质量分别为 $q$、$m$，根据 $\mathbf{F}_L=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$，$\mathbf{F}_L$ 总是与 $\mathbf{v}$ 垂直的，故磁力不对粒子作功，也不会改变 $v$ 的大小，只会改变带电粒子的运动方向。考虑以下两种情况：

当 $\mathbf{v}\parallel\mathbf{B}$，记为 $v_{/\!/}$，则 $\mathbf{F}=0$，无论磁场均匀或非均匀，粒子均以 $v_{/\!/}$ 作匀速直线运动；

当 $\mathbf{v}\perp\mathbf{B}$，记为 $v_\perp$，则 $\mathbf{F}_L\perp v_\perp$，使粒子以速度 $v_\perp$ 作匀速圆周运动，$\mathbf{F}_L$ 为向心力：

$$F_L=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}=qv_\perp B=m\frac{v_\perp^2}{R}$$

由此可算出圆周运动的半径

$$R=\frac{mv_\perp}{qB}=\frac{v_\perp}{\frac{q}{m}B}\tag{4.10.1}$$

和周期

$$T=\frac{2\pi R}{v_\perp}=\frac{2\pi m}{qB}=\frac{2\pi}{\frac{q}{m}B}\tag{4.10.2}$$

可见粒子的圆周运动半径 $R$ 随着粒子速度 $v_\perp$ 的增大而同时加大，而周期 $T$（以至角速度 $\omega$）与粒子的速度无关，只取决于粒子的荷质比 $q/m$ 和磁场 $\mathbf{B}$。回旋加速器就是利用这个原理。

**1. 回旋加速器**

参看图 4-36。扁平盒 $a$、$b$ 处在纵向的匀强磁场 $\mathbf{B}$ 的横断面上，在盒 $a$、$b$ 之间加以 $f=1/T$ 的交变电压 $u$。电子每半周飞过 $a$、$b$ 盒之间的缝隙时适逢电压反向而得到加速，每转一周被

加速两次；进入盒内后则因为无电场而保持原速，转动半径 $R$ 与 $v$ 成正比地不断增大，达到一定数值时，粒子就具有足够的动能去轰击靶子，引起核反应。用这种方法，所加电压 $u$ 无需太高，只要盒半径足够大，磁场足够强，获得的粒子动能就相当大。

当粒子速度加大到与光速相比不可忽略时，按照爱因斯坦的质量-速度公式：

$$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

随着粒子质量的增大，荷质比 $q/m$ 将减小。按照(4.10.2)式，$T$ 将增大，因而交变电压 $u$ 的频率应随之逐渐降低，使与粒子的 $T$ 的增大同步。同时，考虑到巨型加速器磁铁太重，根据(4.10.1)式，可采用不断增强 $\boldsymbol{B}$ 而维持 $R$ 不变的办法。这样，就可以把磁铁做成包围 $a$、$b$ 盒的环状来减小重量，而产生的也是纵向匀强磁场（如4.3节所述）。采用这种原理的设计叫作同步稳相加速器。前苏联在20世纪50年代就已建成能把质子加速到能量高达一百亿电子伏特($10^{10}$eV)的同步稳相加速器，其环形磁铁平均直径达56 m（约合周长175 m），磁铁总重36 000 t。

图4-36　回旋加速器示意图

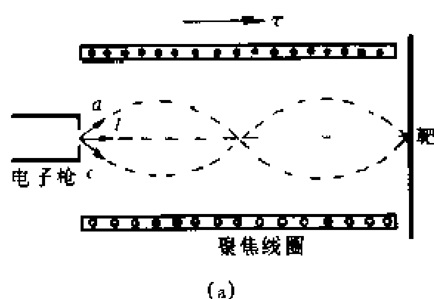
传统的电磁铁是技术上效率最低的设备之一。不但笨重，能量也大部分变成了热损耗，又需用大量的水或油来冷却。由3.1节的介绍，超导体可产生超强、持久电流，因而可形成超强力“永久”磁铁。用超导体做线圈的几公斤重的超导电磁铁就能产生 B = 5T 的磁场，而用传统的中型电磁铁则要重达20 t。由于摆脱了笨重和热损耗，美国的费米实验室用超导电磁铁制做的环形加速器周长达到了6.2 km，能把粒子加速到一万亿电子伏特($10^{12}$eV)的高能量。

回旋加速器是带电粒子的速度只具有 $v_\perp$ 分量的例子。

2. 磁聚焦

当粒子的运动方向任意时，可分解为 $v_\perp$ 和 $v_\parallel$ 两个分量，而粒子的运动轨迹则应为匀速直线运动和圆周运动之合成——螺旋线。

图4-37(a)表示阴极射线管中的电子束的磁聚焦原理。一个螺线管状的磁聚焦线圈产生的是均匀轴向磁场 $B_z$。从电子枪射出的电子是四散的。图中 $a$、$b$、$c$ 是三个典型的飞行方向。显然，只有其初速度中具有横向（即垂直于 $B_z$ 的）速度分量 $v_r$ 的那些电子才会受到洛仑兹力 $F = -ev_rB_z$ 的作用。而 $v_\parallel$（即 $v_z$）则不受磁场的影响。



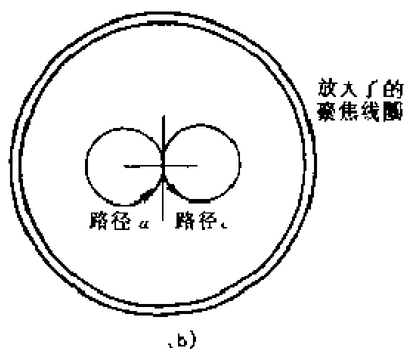




图4-37　磁聚焦

(a)磁聚焦线圈图；(b)图(a)的电子轨迹端视图

图4-37(b)中的两个小圆周表示图4-37(a)中电子 $a$ 和 $c$ 的运动轨迹的端视投影，(4.10.1)和(4.10.2)式分别表示其圆周运动的半径和周期，由它们还可求出圆周运动的角速

度为

$$\omega = \frac{v_t}{R} = \frac{2\pi}{T} = \frac{eB_z}{m} \tag{4.10.3}$$

螺旋运动的螺距为

$$h = v_z T = \frac{2\pi m}{eB_z} v_z \tag{4.10.4}$$

如果从电子枪发出的电子的横向速度 $v_t$ 都比纵向速度 $v_z$ 小得多，则所有电子从电子枪出发到靶面的渡越时间 $t_d = L/v_z$ 将基本相同。因此，我们可以把磁场 $B_z$ 的强度调整到使 $t_d = nT$（$n$ 为整数），则所有电子到达靶面时都将转过整数个圆周而聚焦到一点。

## 二、空间电荷产生的电磁场
### ——麦克斯韦、洛仑兹、牛顿定律所支配的空间电磁场随时间的演变

上面的讨论中没有考虑空间运动电荷本身所产生的电磁场，下面专门探讨一下这个问题。由于源的分布随着电荷的运动而不断变动，使得场也不是恒定的，因而不仅需要洛仑兹力公式，还需用到麦克斯韦方程，并需要回顾牛顿定律。

现在我们用更一般的电流表达式 $\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{v}$ 代替 1.6 节列出的麦克斯韦方程组中表示传导电流的 $\sigma\boldsymbol{E}$ 项，可得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{E}) \tag{4.10.5}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\nabla \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{J}) \tag{4.10.6}$$

$$\rho = \nabla \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{4.10.7}$$

$$0 = \nabla \cdot \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{4.10.8}$$

由非相对论形式的牛顿定律以及洛仑兹力公式，有

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \mu_0 \boldsymbol{H}) \tag{4.10.9}$$

假设在 $t = t_0$ 的初始时刻真空中的场分布 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t_0)$、$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t_0)$ 及所有电荷的速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t_0)$ 都是已知的，则 $t_0$ 时刻电荷密度、电流密度的分布也就是已知的：

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{r}, t_0) &= \nabla \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t_0) \\ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t_0) &= \rho(\boldsymbol{r}, t_0)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t_0) \end{aligned} \tag{4.10.10}$$

由已知的 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t_0)$、$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t_0)$ 可求出 $\nabla \times \boldsymbol{E}$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{H}$（因为 $\nabla \times$ 运算只对空间坐标求导）以及 $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$，把它们和(4.10.10)式代入(4.10.5)、(4.10.6)就得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t_0 + \Delta t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t_0) + \Delta t \left.\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right|_{(\boldsymbol{r}, t_0)} \tag{4.10.11}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t_0 + \Delta t) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t_0) + \Delta t \left.\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right|_{(\boldsymbol{r}, t_0)} \tag{4.10.12}$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t_0 + \Delta t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t_0) + \Delta t \left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|_{(\boldsymbol{r}, t_0)} \tag{4.10.13}$$

沿着时间轴的时间点 $t_0 + n\Delta t$（$n = 1, 2, \cdots$），重复进行上述步骤，就可得到任意时刻的空间电

磁场分布。从这一意义上说，麦克斯韦方程、洛仑兹力公式和牛顿定律是对真空中电磁场和它的源的相互作用作出了完整的描述(参见电动力学的专著)。当然，导电媒质(导体)中带电粒子对场的响应方式比(4.10.9)式更为复杂，需要用传导电流的本构关系 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ 来取代，但该关系式仍然反映了洛仑兹力定律。

## 习　题　4

4.1　四根无限长直导线1、2、3、4垂直于 $xOy$ 平面，分别位于点(0,0)、$(a,0)$、$(a,a)$、$(0,a)$。导线1、3通以电流 $I\boldsymbol{a}_z$，导线2、4通以电流 $-I\boldsymbol{a}_z$，求位于$(a,a)$点的导线上每单位长度受到的磁力。

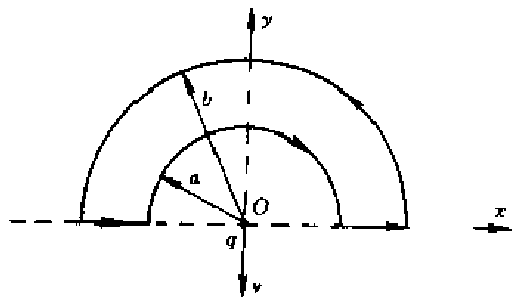
4.2　试证：

①在匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，载有恒定电流的任意闭合回路 $C$ 受的合力为零；

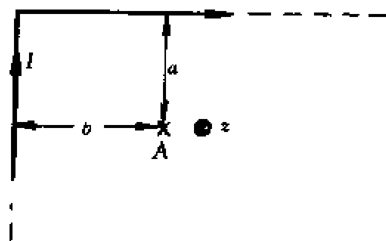
②如果 $C$ 所界定的平面 $S$ 与 $\boldsymbol{B}$ 平行，$C$ 将受到一个方向与 $S$ 面平行的力矩。

4.3　如题4.3图所示的回路通有线电流 $I$，此刻正有一点电荷经过 $O$ 点，速度为 $-\boldsymbol{a}_y v$，求它受的磁力。

4.4　题4.4图所示的呈直角拐弯的导线中通过电流为 $I$，导线两端向远处无限延长，试求图中 $A$ 点处的磁感应 $\boldsymbol{B}$。



题 4.3图



题 4.4图

4.5　一个半径为 $a$、相对电容率为 $\epsilon_r$ 的非磁性圆柱体处于均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，$\boldsymbol{B}$ 平行于该圆柱的轴线。若圆柱以角速度 $\omega$ 绕轴线旋转，求：

①由于旋转而在圆柱中产生的极化强度 $\boldsymbol{P}$；

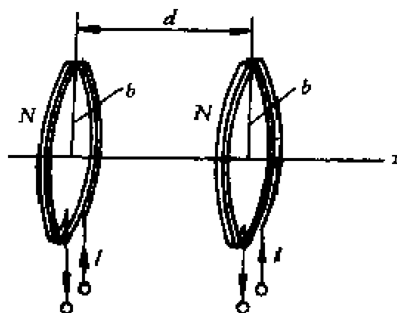
②长 $L$ 的一段圆柱面上出现的面束缚电荷电量。

4.6　两个相同的线圈各有 $N$ 匝，半径为 $b$，同轴，相互隔开距离 $d$，电流 $I$ 以相同的方向流过这两个线圈。

①求两个线圈中点处的 $\boldsymbol{B}(=\boldsymbol{a}_x B_x)$；

②证明在两线圈中点处 $\mathrm{d}B_x/\mathrm{d}x=0$；

③求出 $b$ 与 $d$ 之间的关系，使中点处 $\mathrm{d}^2 B_x/\mathrm{d}x^2=0$，并证明此时在中点处 $\mathrm{d}^3 B_x/\mathrm{d}x^3$ 也为零。如题图4.6所示。



题 4.6图

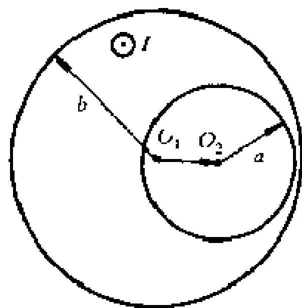
4.7　一个长螺线管，半径为 $a$，长度 $L\gg a$，匝数为 $N$，通过电流 $I$，求管的轴线上任一点的 $\boldsymbol{B}$。

4.8　半径 $R$ 的小球面上有沿 $\varphi$ 方向流动的均匀面电流，其密度为 $J_S$，求球心处的 $\boldsymbol{B}$。

4.9　如题4.9图所示，电流密度均匀的长圆柱导体中有一

平行的圆柱形空腔，计算各部分的磁感应强度，证明空腔内磁场是均匀的。

4.10　阴射线管中的均匀偏转磁场是由放置在管颈上的一对按余弦规律绕制的鞍线圈所产生的。此时可将管颈视为无限长，圆柱的表面上电流密度按 $\boldsymbol{J}_S = \boldsymbol{a}_z J_0\cos\varphi$ 变化，试证明鞍线圈产生的磁场是均匀的



题 4.9 图

4.11　如果场源电流都分布在有限的体积 $\tau$ 中，试证(4.1.7)式可变形为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\nabla \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}\tau$$

4.12　下面的矢量场中，哪些是可能的磁场分布？如果是，求电流分布。

①$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_r kr$

②$\boldsymbol{B} = -ky\boldsymbol{a}_x + kx\boldsymbol{a}_y$

③$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_\varphi A\rho$

4.13　磁场 $\boldsymbol{B}$ 的分布用圆柱坐标可表示为如下形式：

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant \rho < a) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\dfrac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2}\boldsymbol{a}_\varphi & (a < \rho \leqslant b) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\varphi & (b < \rho) \end{cases}$$

求空间各点的电流密度 $\boldsymbol{J}$。如何产生上述磁场？

4.14　电量 $Q$ 在以原点为球心、半径为 $a$ 的球体积中均匀分布。现在使该球绕 $z$ 轴以角速度 $\omega$ 匀速旋转，假设电荷的分布不受旋转的影响，求 $z$ 轴上任一点的 $\boldsymbol{A}$。

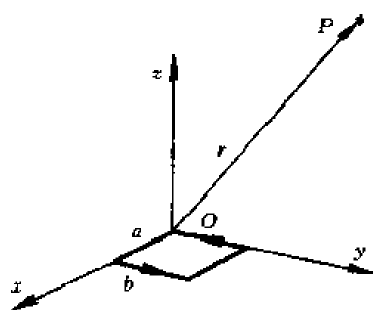
4.15　题 4.15 图所示的矩形线圈中电流为 $I$，矩形边长分别为 $a$ 和 $b$。

①求远处一点 $P(\boldsymbol{r})$ 的 $\boldsymbol{A}$，证明它可写成(4.4.4)式的形式；

②由 $\boldsymbol{A}$ 求 $\boldsymbol{B}$，证明它可以写成(4.4.6)式的形式。

4.16　求几种圆形电流的磁偶极矩，这些圆形电流是以下的电荷运动形成的：

①一个点电荷 $q$ 以角速度 $\omega$ 作半径为 $a$ 的圆周运动；



题 4.15 图

②具有均匀面电荷密度 $\rho_s$ 的球半径为 $a$，绕其一条直径以角速度 $\omega$ 匀速旋转。

(提示：总的磁矩是每个细圆环电流磁矩的矢量迭加。)

4.17　铁制无限长导线的半径为 $a$，$\mu_r = 1\,000$，通有恒定电流 $I$，求：

①空间各点的 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$。若改为铜导线，$a$、$I$ 不变，问 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{B}$ 有何变化？

②空间各点的磁化强度 $\boldsymbol{M}$，束缚体电流密度 $\boldsymbol{J}_m$；

③导线表面上的束缚面电流密度 $\boldsymbol{J}_{mS}$。

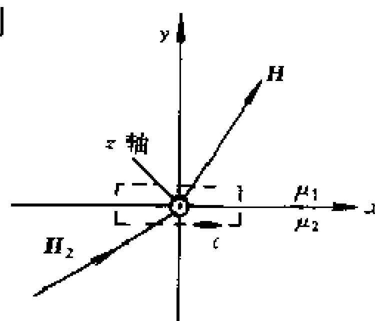
4.18　一根极细的直铁杆和极薄的圆铁盘放在均匀磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中，使它们的轴与 $\boldsymbol{B}_0$ 平行。若已知 $B_0 = 1$ T，铁件的 $\mu_r = 5\,000$，求上述两个铁件中的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$。

4.19　在介质的分界面 $y = 0$ 平面上 $\boldsymbol{H}$ 的矢线如题 4.19 图所示。此时介质分界面上必有束缚面电流，设为 $\boldsymbol{J}_{mS} = \boldsymbol{a}_z J_{mS}$。问 $J_{mS}$ 是正值还是负值？并证明之。

4.20 在 $\mu = 1\,500\mu_0$ 的铁磁体中靠近与空气的交界面处，倘若 $B = 1.5\ \text{Wb/m}^2$，其方向与法线夹角 $\theta_1 = 35°$，试求：

①铁表面上空气中 $\boldsymbol{H}_2$ 的大小和方向(提示：当 $\theta$ 很小时，可利用 $\theta \approx \tan\theta$)；

②面束缚电流密度。




题 4.19图

4.21 半径为 $a$ 的均匀永久磁化介质球，磁化强度为 $\boldsymbol{M}$：

①求球内和球表面上的磁化电流(束缚电流)；

*②求磁荷面密度，并利用 5.18 题均匀极化介质球的束缚电荷产生的静电场分布直接写出 $\boldsymbol{H}$ 的分布。[提示：根据(4.7.7)和(2.5.5)式，磁荷产生的 $\boldsymbol{H}$ 的分布应与束缚电荷产生的 $\boldsymbol{D}$ 的分布相当。]

4.22 一个半径为 $a$ 的磁介质球的磁化强度为

$$\boldsymbol{M} = (Az^2 + B)\boldsymbol{a}_z$$

求磁化电流 $\boldsymbol{J}_m$、$\boldsymbol{J}_{mS}$ 和磁荷 $\rho_m$、$\rho_{mS}$。

4.23 为了对亨利(H)这一单位是多么巨大有一个概念，试计算一个直径2 cm、长度为1 m、600 匝的长直空心螺线管的自感。(提示：螺线管内 $H = nI$，$n$ 为每米匝数。)

*4.24 两个同轴的圆柱导体壳半径分别 $a$ 和 $b(a<b)$，壳厚度近于零，内、外壳通以等值反向电流 $I\boldsymbol{a}_z$ 和 $-I\boldsymbol{a}_z$。

①求空间各处 $\boldsymbol{A}$ 的分布；

②若内导体同外导体是在无限远处闭合的，利用 $\boldsymbol{A}$ 求该同轴线单位长度的自感系数。

4.25 有一个环形螺线管，环的平均半径为15 cm，管的圆形截面半径为2 cm，通过电流为0.7 A，铁心 $\mu_r = 1\,400$，环上共绕 1 000 匝线圈。

①计算螺线管的电感；

②在铁心上开一个0.1 cm的气隙，再计算电感(假设开口后铁心 $\mu$ 不变)。

4.26 两个长的一匝矩形线圈相互平行并置于同一平面上，它们的长度各为 $l_1$ 和 $l_2$，宽度各为 $w_1$ 和 $w_2$，两线圈最近的边距离是 $S$。假设 $l_1 \gg l_2$，略去端部效应，试证两线圈的互感是

$$M = \frac{\mu_0 l_2}{2\pi}\ln\frac{S + w_2}{S\left(1 + \dfrac{w_2}{S + w_1}\right)}$$

*4.27 两组双线输电线的相互位置如题 4.27 图所示，求1 km长的两线路间的互感。

4.28 假设 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 在数值上相同，且均采用国际单位制，试计算真空中恒定磁场和静电场能量密度的比值 $w_m/w_e$。

4.29 不采用把载流线圈从无限远移近的思路，而是假设每个线圈的位置都固定，试从以下两种思路来证明(4.9.8)式：

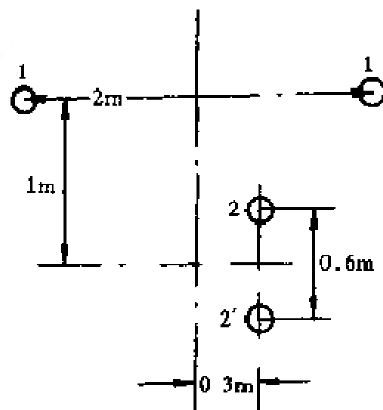
①初始状态下 $n$ 个线圈电流都是 0，先把 $i_1$ 由 0 逐渐增至最终值 $I_1$，其余线圈电流保持为 0；然后把 $i_2$ 由 0 逐渐增至 $I_2$，其余电流维持不变；如此，一个个地把 $i_k$ 增至最终电流 $I_k(k = 1,2,\cdots,n)$。

②初始状态下 $n$ 个线圈电流都是0，然后 $n$ 个电流按同一比例 $\alpha(t)(0<\alpha<1)$ 同时增加，

使 $i_k = \alpha(t)I_k$ 由 0 逐渐增至 $I_k(k=1,2,\cdots,n)$。

*4.30 由(4.9.9)式表达的两个载流回路的系统中磁能只可能是正值。试根据这一事实证明：

$$M_{12} < \sqrt{L_1 L_2}$$



题 4.27 图

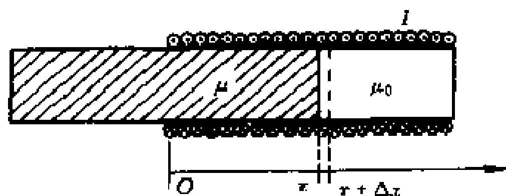
4.31 以空气绝缘的同轴线内外导体半径分别为 $a$ 和 $b$，通过电流 $I$。假设外导体极薄，其中的储能因而可忽略不计，计算单位长度的同轴线储存的磁能，并由磁能计算单位长度的电感。

4.32 题 4.32 图所示的长直螺线管，单位长度上均匀密绕着 $n$ 匝线圈，通过电流 $I$，铁心磁导率为 $\mu$，截面积为 $S$，求作用在铁心截面上的力。

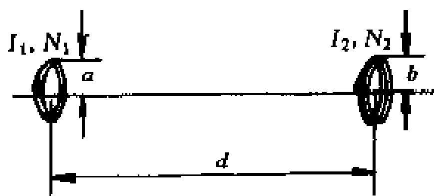
4.33 求证题 4.33 图示的两个相距很远的共轴载流圆线圈 $C_1$ 和 $C_2$ 间的作用力为

$$F_{12} = \mp \frac{3\mu_0 p_{m1} p_{m2}}{2\pi d^4}$$

$C_1$ 和 $C_2$ 相距为 $d$，半径分别为 $a$ 和 $b(d \gg a, d \gg b)$，匝数分别为 $N_1$ 和 $N_2$，电流分别为 $I_1$ 和 $I_2$，$P_{m1} = \pi a^2 I_1$ 和 $P_{m2} = \pi b^2 I_2^2$ 分别为 $C_1$ 和 $C_2$ 的磁矩。当 $I_1$ 和 $I_2$ 同(反)方向时上式取负(正)号，表示吸引(排斥)力。(提示：利用(4.9.22)、(4.8.15)式)。



题 4.32 图



题 4.33 图

4.34 半径为 $r$ 的圆形回路自感为 $L$，若通以电流 $I$，试证使圆环半径扩大的力为 $\frac{I^2}{2}\frac{\partial L}{\partial r}$。

*4.35 一个长直圆柱面形的导体薄壳，半径为 $a$，薄壳上通以沿轴线方向的电流 $I$，试求每单位面积的圆柱面上受的力 $f$ 和长 $l$ 的一段圆柱面上受的力 $F$。并问力 $F$ 是使圆柱壳扩张(向着圆柱外)的还是压皱(向着圆柱内)的？

# 第5章　边 值 问 题

一般说来，电磁场的解是由麦克斯韦方程组和边界条件决定的。对于静态场，则可归结为在给定的边界条件下求解标量位或矢量位的泊松方程或拉普拉斯方程。在第2章至第4章中我们主要讨论的是无界空间或场呈一维分布的简单情形，它们可用特殊的方法，比如直接积分法，高斯面法等。然而，一般情况下场的分布是二维甚至三维的，它们的求解有解析法和近似计算法。解析法如分离变量法、镜像法、复位函数法、保角变换法、格林函数法等限于求解具有规则边界形状的边值问题；而近似计算法如有限差分法、有限元法等则可以得到任意边界形状下场的近似结果。

求解电磁场的各种解析方法都是建立在解的唯一性原理之上的，关于静电场的唯一性原理我们在第2章中已经作了详细的介绍。需要指出的是在大多数情况下，我们处理的是边界上电位函数的值处处给定的问题，相应于唯一性原理中讨论的第一类边值问题。

## 5.1　直角坐标系的分离变量法

由静电场和静磁场的讨论可知，电位和矢量磁位函数满足泊松方程：

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 A = -\mu J$$

在无源空间满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\Phi = 0$$

$$\nabla^2 A = 0$$

泊松方程和拉普拉斯方程的解有无数个，对于某个具体的静态场的问题，要从通解中确定一个具体的解答，必然要涉及在特定区域内给定的边值，即需要利用边界条件才能得到问题的定解。

分离变量法是数学物理方程中求解拉普拉斯方程的一种有效方法，它要求问题所给出的边界面与一个正交坐标系的坐标面相合。用分离变量法求解拉普拉斯方程是方便的。分离变量法可以分三步进行：第一步是根据静场问题的边界形状，选择适当的坐标系，并写出在该坐标系下的拉普拉斯方程的展开式；第二步是应用分离变量法求得拉普拉斯方程的通解；第三步则是根据问题所给定的边界条件，确定通解中的待定系数，从而求得位函数的特解。

当给定问题是限定于长方体的区域时，应该选择直角坐标系。在直角坐标系下，电位的拉普拉斯方程可展开为

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 z}=0 \tag{5.1.1}$$

假设未知位函数 $\Phi$ 可分离为三个一维坐标函数的乘积

$$\Phi = X(x)Y(y)Z(z) \tag{5.1.2}$$

将 $\Phi$ 代入拉普拉斯方程，并用 $X(x)Y(y)Z(z)$ 除以方程两边，得

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\frac{Z''(z)}{Z(z)}=0 \tag{5.1.3}$$

上述方程中的三项分别是坐标 $x$、$y$ 和 $z$ 的函数，对任何 $x$、$y$ 和 $z$ 的值，方程恒为零，说明每项都必须等于常数。于是我们得到三个常微分方程

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-k_x^2 \tag{5.1.4}$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-k_y^2 \tag{5.1.5}$$

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)}=-k_z^2 \tag{5.1.6}$$

式中 $k_x$、$k_y$、$k_z$ 称为分离常数，由(5.1.3)式知，它们满足

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=0 \tag{5.1.7}$$

由(5.1.7)知，三个分离常数 $k_x$、$k_y$ 与 $k_z$ 平方之和为零，因此它们不能全是实数，也不能全是虚数。其中必有一个为实数，也必然有一个为虚数。如果其中一个为零，则其余两个必定一个是实数，另一个是虚数。例如 $k_x$ 为实数时，$X(x)$ 解的形式为三角函数

$$X(x)=A\sin k_x x+B\cos k_x x \tag{5.1.8}$$

如果 $k_x$ 为虚数，即 $k_x=j\alpha_x$，其中 $\alpha_x$ 是实数，则 $X(x)$ 解的形式为双曲函数或指数函数，即

$$X(x)=A_1\sinh \alpha_x x+B_1\cosh \alpha_x x \tag{5.1.9}$$

或

$$X(x)=A_2 e^{\alpha_x x}+B_2 e^{-\alpha_x x} \tag{5.1.10}$$

如果 $k_x=0$，则 $X(x)$ 解的形式为

$$X(x)=A_3 x+B_3 \tag{5.1.11}$$

$Y(y)$ 和 $Z(z)$ 的解的形式与上述讨论的 $X(x)$ 的情形一样。对于具体的问题，$X(x)$、$Y(y)$ 和 $Z(z)$ 的表达式由边界条件决定。典型的情况是 $k_x$ 和 $k_y$ 取实数，而 $k_z$ 取虚数，即 $k_z=j\alpha_z$。于是，根据(5.1.2)式，得到直角坐标系中满足拉普拉斯方程的位函数 $\Phi$ 的一个解为

$$\Phi=(A\sin k_x x+B\cos k_x x)(C\sin k_y y+D\cos k_y y)(E\sinh \alpha_z z+F\cosh \alpha_z z) \tag{5.1.12}$$

**例 5.1** 求图 5-1 中一个长方形体内的电位。设 $z=c$ 面的电位 $\Phi=V$，$V$ 为常数，其他各表面电位都为零。

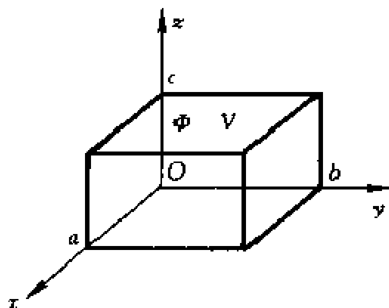


图 5-1 长方形体内的电位

**解** 为了满足 $\Phi|_{x=0}=0$ 和 $\Phi|_{x=a}=0$ 的边界条件，只有取

$$X(x)=A\sin k_x x$$

且 $k_x$ 必须满足

$$\sin k_x a=0$$

即

$$k_x=\left(\frac{m\pi}{a}\right)\quad (m=1,2,3,\cdots)$$

$k_x^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$ 称为本征值，它的意义是，在上述边界条件下，只有取这些特定值的微分方程才有非零解，而相应的函数 $\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$，称为本征函数。这样，$X(x)$ 的一般解可表示为

$$X(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$$

$A_m$ 为待定系数。同样可求得 $Y(y)$的表达式

$$Y(y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

为满足 $\Phi|_{z=0}=0$ 的边界条件，$Z(z)$必须选择$\sinh\alpha z$，其中

$$\alpha=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

这样，得到电位的通解形式为

$$\Phi=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_mB_n\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}\,z\right]$$

代入边界条件 $\Phi|_{z=c}=V$，得到

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)=V$$

其中，$c_{mn}$代替了常数$A_mB_n\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}\,c\right]$

待定系数 $c_{mn}$ 可利用三角函数的正交性来确定，用 $\sin\left(\frac{s\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{t\pi}{b}y\right)$乘上述方程的两边，并对 $x$ 从 $0\to a$ 积分，对 $y$ 从 $0\to b$ 积分。其中方程的左边，由于三角函数的正交性，除开 $m=s$ 和 $n=t$ 的项外，其余项的积分为零。故得

$$\int_0^a\int_0^b c_{st}\sin^2\left(\frac{s\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{t\pi}{b}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^a\int_0^b V\sin\left(\frac{s\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{t\pi}{b}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

算出积分后，得到

$$c_{st}=\frac{16V}{(2s-1)(2t-1)\pi^2}$$

因此，电位的解是

$$\Phi=\frac{16V}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2m-1)\pi x}{a}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{b}}{(2m-1)(2n-1)}\cdot\frac{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{2m-1}{a}\pi\right)^2+\left(\frac{2m-1}{a}\pi\right)^2}\,z\right]}{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{2m-1}{a}\pi\right)^2+\left(\frac{2m-1}{a}\pi\right)^2}\,c\right]}$$

**例 5.2** 如图 5-2 所示，无限长金属槽，两平行侧壁相距为 $a$，高度向上方无限延伸，两侧壁的电位为零，槽底电位为 $\Phi_0$。求槽内电位分布。

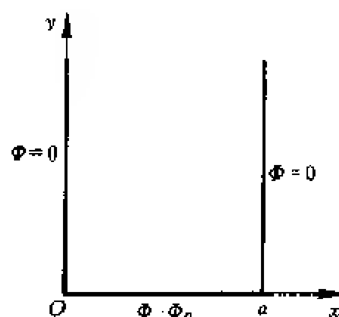



图 5.2 例 5.2 图

**解** 由边界条件容易写出槽内电位解的形式应该为

$$\Phi=\sum_{m=1}^{\infty}c_m e^{-\frac{m\pi}{a}y}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$$

由边界条件 $\Phi|_{y=0}=\Phi_0$，得

$$\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sin\frac{m\pi}{a}x=\Phi_0$$

对上述方程两边乘以 $\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$，并对 $x$ 从 $0\to a$ 积分，得到

$$\frac{a}{2}c_n = \int_0^a \Phi_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x$$

当 $n$ 为奇数时,得到

$$\frac{a}{2}c_n = \frac{a\Phi_0}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

即

$$c_n = \frac{4\Phi_0}{n\pi} \quad (n = 1,3,5,\cdots,\infty)$$

因此,槽内电位的解为

$$\Phi = \frac{4\Phi_0}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}e^{-\frac{m\pi}{a}y}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)(m = 1,3,5,\cdots,\infty)$$

**例 5.3** 一接地无限长矩形金属管如图 5-3 所示,有一线电荷密度为 $\lambda$ 的直线位于管内 $(x_0,y_0)$ 处,且与 $z$ 轴平行。求管内电位分布。

解 在管内作 $x = x_0$ 处的横截面,设此横截面两侧的电位函数分别为 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$。根据边界条件,电位的通解必须具有如下的形式

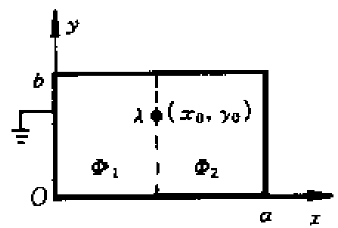



图 5-3 例 5.3 图

$$\Phi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin\frac{m\pi y}{b}\sinh\frac{m\pi x}{b}$$

$$\Phi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{m\pi y}{b}\sinh\frac{m\pi(a-x)}{b}$$

当 $x = x_0$ 时,电位 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 应该满足边界条件

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} = -\lambda\delta(y - y_0)/\varepsilon_0$$

将以上条件,代入 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 的表达式,得到

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin\frac{m\pi y}{b}\sinh\frac{m\pi x_0}{b} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{m\pi y}{b}\sinh\frac{m\pi(a - x_0)}{b}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{m\pi}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}\cosh\frac{m\pi x_0}{b} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{m\pi}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}\cosh\frac{m\pi(a - x_0)}{b} = \lambda\delta(y - y_0)/\varepsilon_0$$

现在,对以上两方程同乘以 $\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$,并对 $y$ 从 $0\to b$ 积分,得

$$a_n\sinh\frac{n\pi x_0}{b} - b_n\sinh\frac{n\pi(a - x_0)}{b} = 0$$

$$a_n\cosh\frac{n\pi x_0}{b} + b_n\cosh\frac{n\pi(a - x_0)}{b} = \frac{2\lambda}{n\pi\varepsilon_0}\sin\frac{n\pi y_0}{b}$$

解出

$$a_n = \frac{2\lambda}{n\pi\varepsilon_0}\frac{\sinh\frac{n\pi(a - x_0)}{b}}{\sinh\frac{n\pi a}{b}}\sin\frac{n\pi y_0}{b}$$

$$b_n = \frac{2\lambda}{n\pi\varepsilon_0}\frac{\sinh\frac{n\pi x_0}{b}}{\sinh\frac{n\pi a}{b}}\sin\frac{n\pi y_0}{b}$$

因此，管内电位

$$\Phi_1 = \frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\frac{n\pi(a-x_0)}{b}\sin\frac{n\pi y_0}{b}}{n\sinh\frac{n\pi a}{b}}\sin\frac{n\pi y}{b}\sinh\frac{n\pi x}{b}\quad(0<x<x_0)$$

$$\Phi_2 = \frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\frac{n\pi x_0}{b}\sin\frac{n\pi y_0}{b}}{n\sinh\frac{n\pi a}{b}}\sin\frac{n\pi y}{b}\sinh\frac{n\pi(a-x)}{b}\quad(x_0<x<a)$$

## 5.2 圆柱坐标系的分离变量法

在本节中，我们将仅限于介绍圆柱坐标系中二维场的分离变量原理。具体考虑当位函数沿 $z$ 方向没有变化的平行平面场的情形。此时电位函数 $\Phi$ 与坐标 $z$ 无关，拉普拉斯方程简化为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0 \tag{5.2.1}$$

令方程有如下的分离变量解

$$\Phi=f(\rho)g(\varphi)$$

其中 $f(\rho)$ 仅为坐标 $\rho$ 的函数，$g(\varphi)$ 仅为坐标 $\varphi$ 的函数。将上式代入方程(5.2.1)，并对方程两边除以 $f(\rho)g(\varphi)$，得到

$$\frac{\rho}{f(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{g(\varphi)}\frac{\partial^2 g(\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

显然，要使上述方程有解，其左边的两项必须都为常数，不妨令

$$\frac{1}{g(\varphi)}\frac{\partial^2 g(\varphi)}{\partial\varphi^2}=-\upsilon^2 \tag{5.2.2}$$

及

$$\frac{\rho}{f(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}\right]=\upsilon^2 \tag{5.2.3}$$

由方程(5.2.2)，解出

$$g(\varphi)=A\sin\upsilon\varphi+B\cos\upsilon\varphi$$

如果 $\varphi$ 的变化范围为从 $0\to2\pi$，则必有

$$\varphi[\upsilon(\varphi+2\pi)]=\varphi(\upsilon\varphi)$$

上式成立的条件是：$\upsilon$ 必须为整数 $m$。特别是当 $m=0$ 时，方程(5.2.2)和(5.2.3)的解分别为

$$g(\varphi)=A_0\varphi+B_0$$

$$f(\rho)=C_0\ln\rho+D_0$$

当 $m\neq0$ 时，方程(5.2.2)的解为

$$g(\varphi)=A_m\sin m\varphi+B_m\cos m\varphi \tag{5.2.4}$$

当 $\upsilon$ 等于整数 $m$ 时，方程(5.2.3)成为

$$\frac{\rho}{f(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}\right)=m^2$$

上式展开即为欧拉方程：

$$\rho^2 \frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} - m^2 f(\rho) = 0 \tag{5.2.5}$$

其解为

$$f(\rho) = C_m \rho^m + D_m \rho^{-m} \tag{5.2.6}$$

故拉普拉斯方程(5.2.1)的通解为

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + B_m \rho^{-m})(C_m \sin m\varphi + D_m \cos m\varphi) \tag{5.2.7}$$

上式中各特征值及积分常数由边界条件确定。

**例 5.4** 半径为 $b$ 的中空长圆柱形导体，等分成四块，轴线为 $z$ 轴，电位分布如图 5-4 所示，求圆筒内的电位分布。

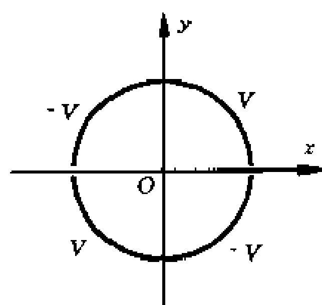



图 5-4 例 5.4 图

**解** 由图 5-4 可以看出，电位函数 $\varphi(\rho,\varphi)$ 应该是圆柱坐标 $\varphi$ 的奇函数，且包括 $\rho = 0$ 点，根据(5.2.7)式，圆筒内电位解的形式应为

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^n \sin(n\varphi)$$

边界上电位满足

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n b^n \sin(n\varphi) = \begin{cases} V & 0 < \varphi < \pi/2 \\ -V & \pi/2 < \varphi < \pi \\ V & \pi < \varphi < 3\pi/2 \\ -V & 3\pi/2 < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

对以上方程两边同乘以 $\sin(m\varphi)$，并对 $\varphi$ 从 $0 \to 2\pi$ 积分，得到

$$A_m = \frac{8V}{m\pi} b^{-m} \quad [m = 2, 6, \cdots, (4k+2), \cdots]$$

因此，圆筒内电位

$$\Phi = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{4n+2} \frac{\sin(4n+2)\varphi}{2n+1}$$

**例 5.5** 在均匀外加电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，垂直于电场方向放置一个半径为 $a$ 的无限长直圆柱体电介质。柱内外介质的介电常数分别为 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$，如图 5-5 所示。求此介质圆柱内外的电位函数。

**解** 选取圆柱坐标系，且圆柱体的轴线与 $z$ 轴重合，并使 $x$ 坐标轴的正方向与外加电场的方向一致，如图 5-5 所示。在圆柱坐标系中，$x = \rho\cos\varphi$，外加电场可用一个电位函数 $\Phi_0 = -E_0 x$ 来表示，故

$$\Phi_0 = -E_0 \rho \cos\varphi$$

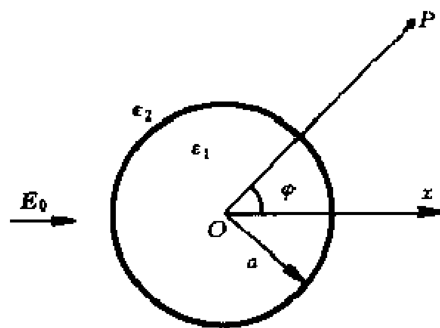



图 5-5 例 5.5 图

由于电位满足拉普拉斯方程，且与 $z$ 坐标无关，因此电位具有(5.2.7)式的通解形式。又由于电位分布对称于 $x$ 轴，因而电位 $\Phi$ 是坐标 $\varphi$ 的偶函数，故介质圆柱内外的电位 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 可表示成

$$\Phi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + B_m \rho^{-m}) \cos m\varphi$$

$$\Phi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \rho^m + D_m \rho^{-m}) \cos m\varphi$$

由于圆柱内包含 $\rho=0$ 的坐标，因而只有系数 $B_m=0$，才能使 $\Phi_1$ 的值有限，所以

$$\Phi_1=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\rho^m\cos m\varphi$$

对于 $\Phi_2$ 来说，当 $\rho$ 足够大时，$\Phi_2$ 趋于 $-E_0\rho\cos\varphi$，即

$$\sum_{m=1}^{\infty}(C_m\rho^m+D_m\rho^{-m})\cos m\varphi\rightarrow -E_0\rho\cos\varphi\quad(\rho\rightarrow\infty)$$

由此式可见，当 $m\neq1$ 时，$C_m$ 应该等于零；当 $m=1$ 时，$C_m=-E_0$，则有

$$\Phi_2=-E_0\rho\cos\varphi+\sum_{m=1}^{\infty}D_m\rho^{-m}\cos m\varphi$$

在圆柱分界面上，电位 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 函数满足的边界条件是

$$\Phi_1\big|_{\rho=a}=\Phi_2\big|_{\rho=a}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=a}=\varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=a}$$

将前面得到的圆柱内外电位函数的表达式分别代入上述分界面上的边界条件，可得

$$\sum_{m=1}^{\infty}A_ma^m\cos m\varphi=-E_0a\cos\varphi+\sum_{m=1}^{\infty}D_ma^{-m}\cos m\varphi$$

$$\varepsilon_1\sum_{m=1}^{\infty}A_mma^{m-1}\cos m\varphi=\varepsilon_2\Big[-E_0\cos\varphi-\sum_{m=1}^{\infty}D_mma^{-(m+1)}\cos m\varphi\Big]$$

以上两方程对任意坐标 $\varphi$ 都应该成立，因而方程两边同类项的系数就必须相等。当 $m=1$ 时，有

$$A_1a=-E_0a+D_1a^{-1}$$

$$\varepsilon_1A_1=-\varepsilon_2E_0-\varepsilon_2D_1a^{-2}$$

以及当 $m\neq1$ 时，

$$A_ma^m=D_ma^{-m}$$

$$\varepsilon_1A_mma^{m-1}=-\varepsilon_2D_mma^{-(m+1)}$$

由以上四个方程联立解得

$$A_1=-\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}E_0$$

$$D_1=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}a^2E_0$$

$$A_m=0\quad(m\neq1)$$

$$D_m=0\quad(m\neq1)$$

将以上所得常数代入圆柱体内、外电位函数的表达式，可得电位

$$\Phi_1=-\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}E_0\rho\cos\varphi\quad(\rho\leqslant a)$$

$$\Phi_2=-E_0\rho\cos\varphi+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{a^2E_0}{\rho}\cos\varphi\quad(\rho\geqslant a)$$

## 5.3 球坐标系的分离变量法

先介绍球坐标系下拉普拉斯方程的变量分离和通解。本节我们仅讨论二维场的情形，仅

限于考虑球坐标系下的电位函数 $\Phi$ 与坐标 $\varphi$ 无关的情形。与坐标 $\varphi$ 无关的拉普拉斯方程是

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)=0 \tag{5.3.1}$$

设待求位函数可以分离变量为

$$\Phi=f(r)g(\theta)$$

将上式代入方程(5.3.1),并经整理后得

$$\frac{1}{f(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right]+\frac{1}{g(\theta)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta}\right]=0$$

为使仅含变量 $r$ 的项与仅含变量 $\theta$ 的项相加为零,必须使以上方程左边的两项大小相等、符号相反的任意常数。根据数理方程的知识,为使方程在区间 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 上有界解,必须使该常数为 $m(m+1)$, $m=0,1,2,\cdots$ 于是得到关于 $f(r)$ 和 $g(\theta)$ 的常微分方程:

$$\frac{1}{g(\theta)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta}\right]+m(m+1)=0 \tag{5.3.2}$$

$$\frac{1}{f(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right]-m(m+1)=0 \tag{5.3.3}$$

作变换 $x=\cos\theta$,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

方程(5.3.2)可以变换成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right]+m(m+1)g(x)=0 \tag{5.3.4}$$

这是勒让德方程。对于 $x$ 的变化范围为从 $-1$ 到 1 的情况,勒让德方程有一个有界解:

$$\mathrm{P}_m(x)=\frac{1}{2^m m!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m \tag{5.3.5}$$

$\mathrm{P}_m(x)$ 称为勒让德多项式。

方程(5.3.3)是欧拉方程,其解为

$$f(r)=A_m r^m+B_m r^{-(m+1)} \tag{5.3.6}$$

因此,方程(5.3.1)的通解为

$$\Phi=\sum_{m=0}^{\infty}\left[A_m r^m+B_m r^{-(m+1)}\right]\mathrm{P}_m(\cos\theta) \tag{5.3.7}$$

(5.3.7)式的系数由问题的边界条件确定。

勒让得多项式 $\mathrm{P}_m(x)$ 的前几项是

$$\mathrm{P}_0(x)=1$$

$$\mathrm{P}_1(x)=x=\cos\theta$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)=\frac{1}{2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

$$\mathrm{P}_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)=\frac{1}{8}(35\cos^4\theta-30\cos^2\theta+3)$$

$$\mathrm{P}_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)=\frac{1}{8}(63\cos^5\theta-70\cos^3\theta+15\cos\theta)$$

⋮

勒让德多项式的正交性

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_m(x)\mathrm{P}_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\mathrm{P}_m(\cos\theta)\mathrm{P}_n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=0\quad(m\neq n)$$

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_m(x)\mathrm{P}_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\mathrm{P}_m(\cos\theta)\mathrm{P}_n(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{2m+1}\quad(m=n)$$

**例 5.6** 如图 5-6 所示，导体球半径为 $a$，外包一层厚度为 $a$，$\varepsilon=2\varepsilon_0$ 的球面介质，将球放在均匀电场 $E_0$ 中，求球内、介质层中以及外层空间中的电位。

**解** 均匀外电场用电位描述为

$$\Phi_0=-E_0 r\cos\theta$$

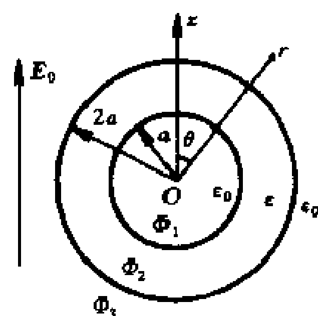


图 5-6 例 5.6 图

根据本问题的情况，可以把电位参考点 $\Phi=0$ 取在导体球的表面。由于导体是等电位体，因此导体球内电位 $\Phi_1=0$。导体球外电位满足拉普拉斯方程，且与球坐标 $\varphi$ 无关，根据(5.3.7)式，它们可以分别写成如下形式：

$$\Phi_2=\sum_{m=0}^{\infty}[A_m r^m+B_m r^{-(m+1)}]\mathrm{P}_m(\cos\theta)\qquad(5.3.8)$$

$$\Phi_3=\sum_{m=0}^{\infty}[C_m r^m+D_m r^{-(m+1)}]\mathrm{P}_m(\cos\theta)\qquad(5.3.9)$$

当 $r\to\infty$ 时，球外电位 $\Phi_3\to\Phi_0$，即 $\varphi_3\to-E_0 r\cos\theta$，因此，(5.3.9)式中除开 $C_1=-E_0$，其他的 $C_m=0$，所以 $\Phi_3$ 简化成

$$\Phi_3=-E_0 r\cos\theta+\sum_{m=0}^{\infty}C_m r^{-(m+1)}\mathrm{P}_m(\cos\theta)\qquad(5.3.10)$$

在 $r=a$ 和 $r=2a$ 的球面上，电位 $\Phi_2$ 和 $\Phi_3$ 必须满足如下边界条件：

$$\Phi_2(a,\theta)=0$$

$$\Phi_2(2a,\theta)=\Phi_3(2a,\theta)$$

$$2\varepsilon_0\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right|_{r=2a}=\varepsilon_0\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial r}\right|_{r=2a}$$

将电位 $\Phi_2$ 的表达式(5.3.8)和电位 $\Phi_3$ 的表达式(5.3.10)分别代入以上的边界条件，得到

$$A_1 2a+B_1(2a)^{-2}=-2aE_0+C_1(2a)^{-2}\qquad(m=1)$$

$$2A_1-4B_1(2a)^{-3}=-2C_1(2a)^{-3}-E_0\qquad(m=1)$$

$$A_m a^m+B_m a^{-(m+1)}=0\qquad(m\neq1)$$

$$A_m(2a)^m+B_m(2a)^{-(m+1)}=C_m(2a)^{-(m+1)}\qquad(m\neq1)$$

$$2mA_m(2a)^{m-1}-2(m+1)B_m(2a)^{-(m+2)}=-(m+1)C_m(2a)^{-(m+2)}\qquad(m\neq1)$$

由以上方程解出：

$$A_1=-\frac{12}{17}E_0$$

$$B_1=\frac{12}{17}E_0 a^3$$

$$C_1 = \frac{52}{17}E_0 a^3$$

$$A_m = B_m = C_m = 0 \quad (m \neq 1)$$

将得到的常数代入电位的表达式,即得介质层中的电位为

$$\Phi_2 = \frac{12}{17}E_0(-r + a^3 r^{-2})\cos\theta$$

介质外空间中的电位为

$$\Phi_3 = E_0(-r + \frac{52}{17}a^3 r^{-2})\cos\theta$$

**例 5.7** 如图 5-7 所示,一点电荷 $q$ 放在半径为 $a$ 的均匀介质球中心,球的介电常数为 $\varepsilon$。球外为真空,试用分离变量法求解球内、外空间的电位分布。

**解** 对于这类在分界面外有电荷的问题,可以将电位看成是由两部分电荷产生的电位叠加而成的,即一部分电位是由分界面外的电荷产生的,而另一部分电位则是由分界面上的面电荷产生的。

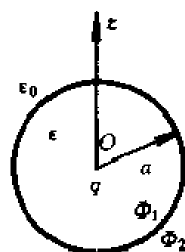


图5-7 例5.7图

点电荷 $q$ 在球内产生的电位是 $\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$;而球面上的束缚电荷在球内产生的电位满足拉普拉斯方程,可用 $\sum_{m=0}^{\infty}[A_m r^m + B_m r^{-(m+1)}]P_m(\cos\theta)$ 表示。故球内电位是

$$\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} + \sum_{m=0}^{\infty}[A_m r^m + B_m r^{-(m+1)}]P_m(\cos\theta)$$

由于球内包含坐标 $r=0$,为保证球内电位的值有限,由上式可以看出待定系数 $B_m$ 应该为零。因此,球内电位函数 $\Phi_1$ 的表达式简化成

$$\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} + \sum_{m=0}^{\infty}A_m r^m P_m(\cos\theta) \tag{5.3.11}$$

另外,点电荷 $q$ 在球外产生的电位是 $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$;而球面上的束缚电荷在球外产生的电位满足拉普拉斯方程,可用 $\sum_{m=0}^{\infty}[C_m r^m + D_m r^{-(m+1)}]P_m(\cos\theta)$ 表示。因此球外电位为

$$\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \sum_{m=0}^{\infty}[C_m r^m + D_m r^{-(m+1)}]P_m(\cos\theta)$$

由于球外包含 $r\to\infty$ 的点即无穷远点,为保证电位 $\Phi_2$ 的值有限,由上式可以看出待定系数 $C_m$ 应该为零。因此,球外电位 $\Phi_2$ 的表达式简化成

$$\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \sum_{m=0}^{\infty}D_m r^{-(m+1)}P_m(\cos\theta) \tag{5.3.12}$$

在 $r=a$ 的球面上,电位函数 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 满足如下条件:

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$\varepsilon\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \varepsilon_0\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

将电位 $\Phi_1$ 的表达式(5.3.11)和电位 $\Phi_2$ 的表达式(5.3.12)代入以上边界条件,得到

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon a} + A_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{B_0}{a} \qquad (m=0)$$

$$0 = \varepsilon_0 B_0 a^{-(m+2)} \qquad (m=0)$$

$$A_m a^m = B_m a^{-(m+1)} \qquad (m \neq 0)$$

$$\varepsilon m A_m a^{m-1} = -\varepsilon_0 (m+1) B_m a^{-(m+2)}, \qquad (m \neq 0)$$

由以上方程容易解出

$$A_0 = \frac{q}{4\pi a}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$B_0 = 0$$

$$A_m = B_m = 0 \quad (m \neq 0)$$

最后得到，球内电位

$$\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} + \frac{q}{4\pi a}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

球外电位

$$\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

**例 5.8** 在半径为 $a$ 的均匀介质球 $\varepsilon_1$ 的中心放置一电偶极子，其偶极矩为 $\boldsymbol{p}$，其极化方向与 $z$ 轴的正方向一致。球外为 $\varepsilon_2$ 的另一种介质，求球内外电位 $\Phi_1$、$\Phi_2$ 和极化电荷分布。

解 球内外电位 $\Phi_1$、$\Phi_2$ 可以看成是电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 与极化电荷产生的电位的叠加，电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 在球内产生的电位是 $\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_1 r^2}$；球面上的束缚电荷在球内产生的电位可用

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[A_m r^m + B_m r^{-(m+1)}\right]\mathrm{P}_m(\cos\theta)$$

表示。因此球内电位

$$\Phi_1 = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_1 r^2} + \sum_{m=0}^{\infty}\left[A_m r^m + B_m r^{-(m+1)}\right]\mathrm{P}_m(\cos\theta)$$

考虑到球内包含 $r=0$ 的点，上式中的待定系数 $B_m$ 应该为零才能保证电位的值有限，因此，球内电位 $\Phi_1$ 的表达式简化成

$$\Phi_1 = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_1 r^2} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^m \mathrm{P}_m(\cos\theta) \tag{5.3.13}$$

另外，电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 在球外产生的电位是 $\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_2 r^2}$；而球面上的束缚电荷在球外产生的电位满足拉普拉斯方程，可用

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[C_m r^m + D_m r^{-(m+1)}\right]\mathrm{P}_m(\cos\theta)$$

表示。因此球外电位

$$\Phi_2 = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_2 r^2} + \sum_{m=0}^{\infty}\left[C_m r^m + D_m r^{-(m+1)}\right]\mathrm{P}_m(\cos\theta)$$

由于球外包含 $r=\infty$ 的点，即无穷远点，为保证电位 $\Phi_2$ 的值有限，上式中的待定系数 $C_m$ 应该为零。因此，球外电位 $\Phi_2$ 的表达式简化成

$$\Phi_2 = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_2 r^2} + \sum_{m=0}^{\infty} D_m r^{-(m+1)} \mathrm{P}_m(\cos\theta) \tag{5.3.14}$$

在分界面 $r=a$ 上，电位函数 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 应该满足

$$\Phi_1=\Phi_2$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\bigg|_{r=a}=\varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

将电位 $\Phi_1$ 的表达式(5.3.13)和电位 $\Phi_2$ 的表达式(5.3.14)分别代入以上边界条件，得到

$$\frac{p}{4\pi\varepsilon_1 a^2}+A_1 a=\frac{p}{4\pi\varepsilon_2 a^2}+\frac{B_1}{a^2}$$

$$\varepsilon_1 A_1 a=-2\varepsilon_2 B_1 a^{-3}$$

$$A_m a^m=B_m a^{-(m+1)}\qquad (m\neq 1)$$

$$\varepsilon_1 m A_m a^{m-1}=-\varepsilon_2(m+1)B_m a^{-(m+2)}\qquad (m\neq 1)$$

解得

$$A_1=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)p}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)a^3}$$

$$B_1=\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)p}{4\pi\varepsilon_2(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)}$$

$$A_m=B_m=0\quad (m\neq 1)$$

因此，球内电位

$$\Phi_1=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_1 r^3}+\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)a^3}$$

球外电位

$$\Phi_2=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_2 r^3}+\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_2(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)r^3}=\frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)r^3}$$

设 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 分别为球分界面内外的极化强度，根据 $\boldsymbol{P}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}=(\varepsilon_0-\varepsilon)\nabla\Phi$，则球介质分界面上的束缚电荷面密度为

$$\rho_{PS}=(-\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{P}_2)\big|_{r=a}=\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}-(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right]_{r=a}$$

$$=\varepsilon_0\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)\bigg|_{r=a}=\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)a^3}$$

**例 5.9** 如图 5-8 所示，半径为 $a$ 的导体球外充满介电常数为 $\varepsilon$ 的介质，导体球接地，在离球心 $d(d>a)$ 处有点电荷 $q$，试用分离变量法求空间电位。

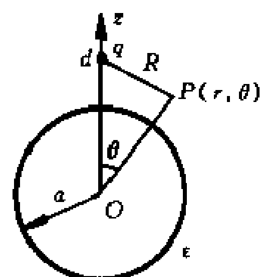



图 5-8 例 5.9 图

解 如图 5-8 所示，将电荷置于极轴 $z$ 上。导体球是等电位体，而由于导体球接地，因此球内及其表面的电位为零。球外电位可以看成是点电荷产生的电位 $\frac{q}{4\pi\varepsilon R}$，与球表面的感应电荷产生的电位 $\sum_{m=0}^{\infty}[A_m r^m+B_m r^{-(m+1)}]P_m(\cos\theta)$ 的叠加，即

$$\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon R}+\sum_{m=0}^{\infty}[A_m r^m+B_m r^{-(m+1)}]P_m(\cos\theta)$$

考虑到在无穷远处的电位应该为有限值，上式中的系数 $A_m$ 必须为零，因此，球外电位的表达式可简化成

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon R} + \sum_{m=0}^{\infty} B_m r^{-(m+1)} \mathrm{P}_m(\cos\theta)$$

根据恒等式

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta}} = \frac{1}{d}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{r}{d}\right)^m \mathrm{P}_m(\cos\theta)$$

及在球面上电位为零,因此得到

$$\frac{q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{d}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a}{d}\right)^m \mathrm{P}_m(\cos\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} B_m a^{-(m+1)} \mathrm{P}_m(\cos\theta) = 0$$

解得

$$B_m = -\frac{qa^{2m+1}}{4\pi\epsilon d^{m+1}}$$

因此,球外电位是

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon R} - \frac{q}{4\pi\epsilon}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{2m+1}}{(rd)^{m+1}} \mathrm{P}_m(\cos\theta)$$

综上所述,对于能够采用分离变量法求解的问题,构成拉普拉斯方程的解的各因式的可能的通解形式实际上在数学物理方程中均已找出。我们上述的求解过程,只不过是根据每个问题的具体边界条件,从各种可能的通解形式中选取适用的项,并确定所选取的项的系数(待定系数)。

## 5.4 镜 像 法

有时,需要求解电荷附近存在有导电面(或介质面)的静电问题。这类问题直接按边值问题来解电位方程就显得较为困难,而采用我们即将介绍的镜像法则较为方便。

镜像法是一种方便的等效方法,它的求解思想是建立在唯一性原理基础之上的。其原则是在所求电场区域之外的某个位置上,假设有一镜像电荷的存在(因而没有改变原区域中的电荷分布),而镜像电荷与原区域中的分布电荷一起产生的电位刚好满足原区域的边界条件。这样,按照唯一性定理,镜像电荷在所求区域中产生的电场与导体面上的感应电荷所产生的电场就完全等效。也可以认为,镜像电荷是导电面(或介质面)上分布电荷的集中等效电荷。我们先从最简单的平面镜像法开始讨论其具体的求解过程。

### 一、平面镜像法

本节先介绍平面镜像的基本原理和方法。问题如图5-9(a)所示,设位于无限大接地导电平面上方($z=h$)有一点电荷 $q$,要求上半空间($z>0$)的电位。

由于点电荷 $q$ 在接地导电平面上感应出的分布电荷还是个未知量,因此采用直接积分的办法是行不通的。但是,如果我们像图5-9(b)那样,在 $z=-h$ 的位置放置一镜像电荷,其电荷量的大小也是 $q$,但符号相反。容易验证上半空间的电荷 $q$ 和此镜像电

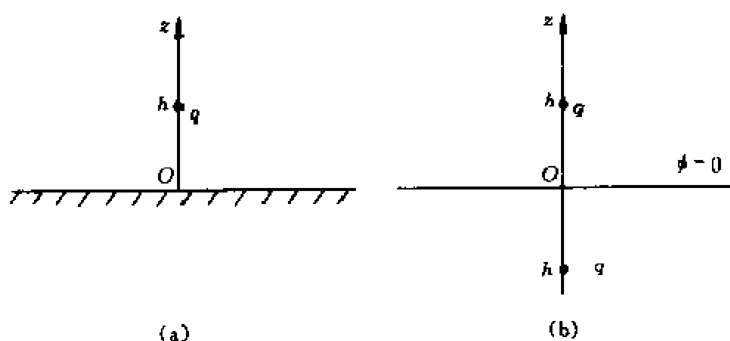



图5-9 平面镜像法原理用图

荷 $-q$ 一起在 $z=0$ 的平面上产生的电位为零。因此，图5-9(b)中上半空间的电荷分布及其边界条件与图5-9(a)完全一样。根据唯一性定理，图5-9(b)与图5-9(a)上半空间电位的解应该是一样的。也就是说，如果我们求出了图5-9(b)上半空间的电位，也就得到了图5-9(a)上半空间的电位。根据点电荷的电位公式，容易写出图5-9(b)上半空间的电位可表达成

$$\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R'}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0[x^2+y^2+(z-h)^2]^{1/2}}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0[x^2+y^2+(z+h)^2]^{1/2}}\quad(z>0)\qquad(5.4.1)$$

既然我们求得了上半空间的电位，进一步就可以得到接地导体表面上的感应电荷分布，根据导体的面电荷公式，有

$$\rho_S=\boldsymbol{a}_z\cdot\boldsymbol{D}\big|_{z=0}=\varepsilon_0\boldsymbol{a}_z\cdot\boldsymbol{E}\big|_{z=0}=\varepsilon_0E_z\big|_{z=0}=-\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial z}\bigg|_{z=0}=-\frac{qh}{2\pi(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}$$

以下我们对面电荷密度 $\rho_S$ 进行积分，以便求出导体表面的感应电荷总量。为方便计，我们改用平面极坐标计算导体表面总电量，根据变换公式

$$x^2+y^2=r^2$$

以及

$$\mathrm{d}S=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

从而，感应电荷总量为

$$Q_{感应}=\int\rho_S dS=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{-qhr\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi}{2\pi(r^2+h^2)^{3/2}}=\frac{qh}{(r^2+h^2)^{1/2}}\bigg|_0^{\infty}=-q$$

可见，导体表面的感应面电荷总量正好等于镜像电荷。

基于以上讨论过的平面镜像基本原理，我们还可以解决一些类似的更为复杂的问题，现举如下几例略加说明。

**例5.10** 如图5-10所示，两个相交成 $\alpha=90°$ 角的接地导电平板 $A$、$B$ 所界定的区域中有一点电荷 $q$，求直角形区域中的电位分布。

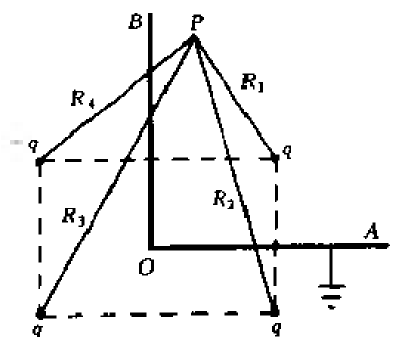



图5-10 例5-10图

**解** 如图5-10所示，三个镜像电荷和原问题的点电荷 $q$ 将能满足原问题中导电板 $A$、$B$ 处的电位为零的条件。由于三个镜像电荷均处于直角形区域之外，根据唯一性定理，此四个点电荷在该区域中产生的电位就与原问题等价。所以，原问题电位的解可用如图5-10所示的四个电荷来计算，即

$$\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right)$$

其中 $R_1$、$R_2$、$R_3$ 和 $R_4$ 分别为图5-10所示的四个电荷到直角形区域中某待求电位点的距离。

可以证明只要两无限大导电平板之间的夹角 $\alpha$ 满足条件 $\pi/\alpha=$ 整数，都可以用有限个镜像电荷求得解答。镜像电荷个数等于 $(2\pi/\alpha)-1$，加上原问题的点电荷 $q$，等价问题的总点电荷数是 $2\pi/\alpha$。

**例5.11** 如图5-11(a)所示，位于无限大接地导电平面($z=0$)上方($z=h$)处有一线电荷 $\lambda$，试求上半空间($z>0$)的电位。

**解** 此问题应用镜像法很容易得到解决。上半空间电位可用图5-11(b)的等效镜像线电

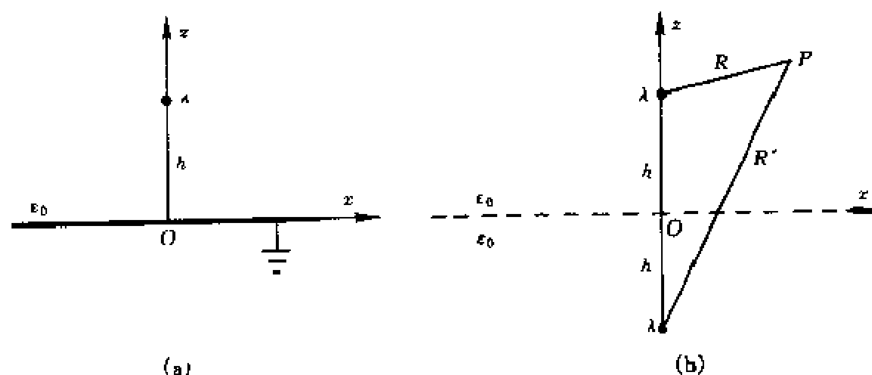



图 5-11　例 5.11 图

荷求出。选择 $z=0$ 的平面上的点为电位参考点，则上半空间的线电荷产生的电位为

$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h}{R}$$

而镜像线电荷产生的电位为

$$-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h}{R'}$$

因此，上半空间电位为

$$\Phi=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h}{R}-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h}{R'}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R'}{R} \tag{5.4.2}$$

其中

$$R=[x^2+(y-h)^2]^{1/2}$$
$$R'=[x^2+(y+h)^2]^{1/2}$$

**例 5.12**　如图 5-12(a)所示，在平面分界面($z=0$)上、下分别充满 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ 的介质，在 $z$ 轴上 $z=h$ 处有一点电荷 $q$，试求空间电位分布。

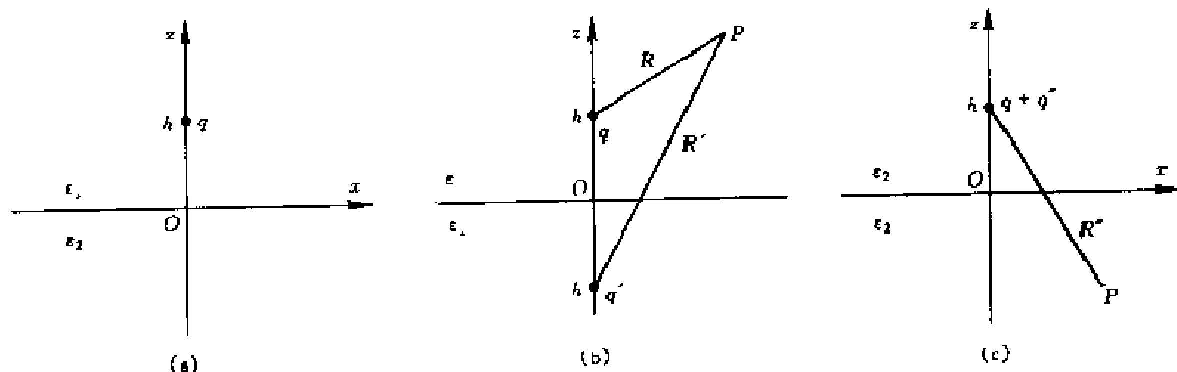



图 5-12　例 5.12 图

**解**　由于本问题中的介质是均匀的，并不存在极化体电荷，只在 $z=0$ 的平面上存在极化面电荷。此类问题可用镜像电荷取代极化面电荷(实际上仅取代了部分极化面电荷)的方法求解。为了求得上半空间的电位，可先假设把下半空间的电介质换成 $\varepsilon_1$(即与上半空间一样)，而把由此引起的极化面电荷的变化用一个点电荷 $q'$ 来等效，并假设此镜像电荷位于 $z$ 轴上 $z=-h$ 的位置，如图 5-12(b)所示。这样，上半空间的电位可表示为

$$\Phi_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1 R}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_1 R'}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1[x^2+y^2+(z-h)^2]^{1/2}}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_1[x^2+y^2+(z+h)^2]^{1/2}}$$

同样，为了求得下半空间的电位，可先假设把上半空间的电介质换成 $\varepsilon_2$（即与下半空间一样），而把由此引起的极化面电荷的变化用一个点电荷 $q''$ 来等效，并假定 $q''$ 位于 $z$ 轴上 $z=h$ 的位置，这样，加上原问题的点电荷 $q$，现在在 $z$ 轴上 $z=h$ 处的总电荷为 $q+q''$，如图 5-12(c) 所示。这样，下半空间的电位可表示为

$$\Phi_2=\frac{q+q''}{4\pi\varepsilon_2 R''}=\frac{q+q''}{4\pi\varepsilon_2[x^2+y^2+(z-h)^2]^{1/2}}$$

电荷 $q'$ 和 $q''$ 的值可由边界条件确定。由于电荷 $q'$ 的引入并没有改变上空间的电荷分布，而 $q''$ 的引入也没有改变下半空间的电荷分布，因此只要以上电位 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 的表达式能够满足介质分界面上的边界条件，根据唯一性定理，以上等效法求得的电位的解就是原问题的真解。而电位 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 应该满足的边界条件是

$$\Phi_1\big|_{z=0}=\Phi_2\big|_{z=0}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}$$

将电位 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 的表达式代入上述边界条件，得到

$$\frac{1}{\varepsilon_1}(q+q')=\frac{1}{\varepsilon_2}(q+q'')$$

$$q'=-q''$$

由此解出

$$q'=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q$$

$$q''=-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q$$

因此，上半空间的电位

$$\Phi_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1[x^2+y^2+(z-h)^2]^{1/2}}+\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)q}{4\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)[x^2+y^2+(z+h)^2]^{1/2}}$$

下半空间的电位

$$\Phi_2=\frac{2q}{4\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)[x^2+y^2+(z-h)^2]^{1/2}}$$

下面求分界面上的极化电荷面密度

根据极化强度矢量 $\boldsymbol{P}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}$，而本问题在 $z=0$ 的分界面上的极化电荷面密度

$$\rho_{PS}=-\boldsymbol{a}_z\cdot(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2)\big|_{z=0}=-\boldsymbol{a}_z\cdot[(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}_1-(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}_2]\big|_{z=0}$$

$$=\boldsymbol{a}_z\cdot[(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\nabla\Phi_1-(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\nabla\Phi_2]\big|_{z=0}=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)hq}{2\pi\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R_0^3}$$

式中 $R_0=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$。

## 二、球面镜像法

前面我们讨论了平面镜像问题，对于当分界面是导体球面时，对于球面附件的点电荷，镜像原理是否仍然有效呢？这就是本节要讨论的内容。我们首先假设采用镜像电荷来等效地替代分界面上的感应电荷，看能否通过适当地选取镜像电荷的电荷量及其位置，使得球形分界面上的电位的边界条件得到满足。

球面镜像的典型问题可以用如图5-13来说明，设有一个点电荷 $q$ 与半径为 $a$ 的接地导体球的球心相距 $h(h>a)$。设点电荷位于极轴（$z$ 轴）上，求球外空间的电位。

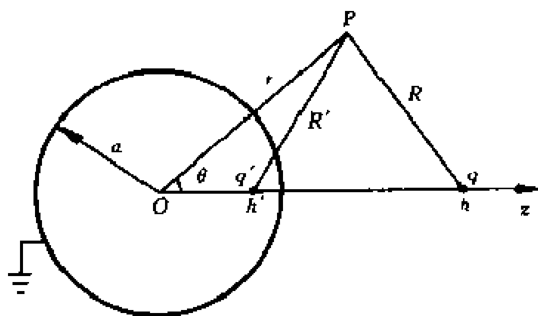



图5-13　球面镜像的典型问题

由于点电荷 $q$ 的存在，它会在接地导体球的表面感应出相反符号的面电荷，显然这些感应电荷的分布相对于 $z$ 轴应该呈现出对称性，且靠近点电荷 $q$ 一侧的感应电荷密度要大些，而离点电荷 $q$ 远的一侧的感应电荷密度相对来说要小些。从感应电荷相对于 $z$ 轴呈对称性分布来看，等效的镜像电荷 $q'$ 就应该选取在 $z$ 轴上；为了不改变球外电荷分布的基本要求，同时感应电荷又主要分布在靠近点电荷 $q$ 这一侧，镜像电荷 $q'$ 应该位于原点与点电荷 $q$ 之间的 $z$ 轴上（如图5-13），设镜像电荷 $q'$ 离球心的距离为 $h'$。这样，点电荷 $q$ 和镜像电荷 $q'$ 在球外产生的电位是

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{R}+\frac{q'}{R'}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(r^2+h^2-2rh\cos\theta)^{1/2}}+\frac{q'}{(r^2+h'^2-2rh'\cos\theta)^{1/2}}\right] \tag{5.4.3}$$

在接地导体球面上（$r=a$）电位为零，因此，有

$$\frac{q}{(a^2+h^2-2ah\cos\theta)^{1/2}}+\frac{q'}{(a^2+h'^2-2ah'\cos\theta)^{1/2}}=0$$

对上述方程稍做整理，即可得到

$$q^2(a^2+h'^2-2ah'\cos\theta)=q'^2(a^2+h^2-2ah\cos\theta)$$

欲使上式对任意 $\theta$ 角都能成立，必须有

$$q^2(a^2+h'^2)=q'^2(a^2+h^2),\quad q^2h'=q'^2h$$

解得

$$h'=\frac{a^2}{h},\quad q'=-\frac{a}{h}q \tag{5.4.4}$$

因此，球外空间电位的解是

$$\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(r^2+h^2-2rh\cos\theta)^{1/2}}-\frac{1}{(a^2+(rh/a)^2-2rh\cos\theta)^{1/2}}\right)$$

根据上述球外电位函数，可以得到球面上的感应电荷面密度为

$$\rho_S=-\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial r}\bigg|_{r=a}=-\frac{q}{4\pi a}\frac{h^2-a^2}{(h^2+a^2-2ah\cos\theta)^{3/2}}$$

从而，导体球面上总的感应电荷量是

$$\oint_S\rho_S\mathrm{d}S=-\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{q}{4\pi a}\frac{(h^2-a^2)a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{(h^2+a^2-2ah\cos\theta)^{3/2}}=-\frac{a}{h}q=q'$$

可见，球面上感应电荷总量等于镜像电荷。

电荷 $q$ 所受的力为

$$F=-\frac{q^2ah}{4\pi\varepsilon_0(h^2-a^2)^2}$$

**例5.13**　如图5-13所示，假设

（1）导体球不接地；

(2)导体球带电量 $Q$；

(3)导体球的电位为 $U_0$

求三种情况下导体球外的电位分布。

**解** 置点电荷 $q$ 位于 $z$ 轴上，如图 5-13 所示。

(1)导体球不带电，也没有接地，意味着导体球表面的总电荷量即使是在外场的作用下也始终保持为零。或者等效地说，作任意包含导体球的闭合面，其内的电荷总量总是零。另一方面，导体球表面的电位应该是一个常数 $c$。当我们对本问题应用镜像法时，镜像电荷的电量及其位置由以下公式给定

$$h' = \frac{a^2}{h}, \quad q' = -\frac{a}{h}q$$

但是，如此确定的镜像电荷 $q'$ 和点电荷 $q$ 在球心在原点，半径为 $a$ 的球面上产生的电位等于零，而当我们在球外表面作闭合面时，所包的电荷量等于 $q'$，而不是为零，没能满足导体球不带电的条件。因此，仅凭增加一个镜像电荷是不能够与原问题在球外等价的。容易看出，既然镜像法使球面的电位为零，那么，只要我们在球心再加上一个点电荷

$$q'' = -q'$$

就既能达到当我们在球外表面作闭合面时，所包含的电荷量等于零，又保证了球表面的电位等于常数的条件。于是，这样配置的电荷 $q'$ 和 $q''$ 就与原问题在球外等效，或者说它们与球表面的感应电荷在球外产生的电位等价。因此，球外电位为

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'} + \frac{q''}{r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{a}{hR'} + \frac{a}{hr}\right)$$

如图 5-14 所示，有

$$R' = \sqrt{r^2 + \left(\frac{a^2}{h}\right)^2 - 2r\frac{a^2}{h}\cos\theta}$$

(2)导体球带电量 $Q$ 时，除镜像电荷

$$h' = \frac{a^2}{h}, \quad q' = -\frac{a}{h}q$$

外，球心还应该有等效电荷 $q'' = Q - q'$ 才能保证球表面为等电位体，以及保证了当在球外表面作闭合面时，所包含的电荷量等于 $Q$ 的条件。于是球外电位

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'} + \frac{q''}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{a}{hR'} + \frac{a}{hr}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$$

(3)导体球电位为 $U_0$，可以先设导体球带电量 $Q$，由问题(2)知球外电位

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'} + \frac{q''}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R} - \frac{aq}{hR'} + \frac{aq + hQ}{hr}\right)$$

其中，$Q$ 由边界条件决定。在球面上，电位 $\Phi|_{r=a} = U_0$，即

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q''}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{aq + hQ}{ha} = U_0$$

$$q'' = 4\pi\varepsilon a U_0$$

因此，球外电位

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{a}{hR'}\right) + \frac{aU_0}{r}$$

**例 5.14** 如图 5-14 所示，在接地的导体平面上，有一半径为 $a$ 的半球形凸部，半球的球

心在导体平面上。设在半球对称轴上离球心 $h(h>a)$ 处有一点电荷 $q$。求

(1)空间任一点的电位；

(2)半球表面的感应电荷总量。

**解** 如图 5-14 所示，本问题可以用平面镜像法和球面镜像法的组合形式解决。具体过程是：$q'_1$ 为点电荷 $q$ 关于球心在原点、半径为 $a$ 的球面的镜像电荷；而 $q'_3$ 为点电荷 $q'_1$ 关于 $z=0$ 的平面的镜像电荷；最后，$q'_2$ 既是点电荷 $q$ 关于 $z=0$ 的平面的镜像电荷，又是点电荷 $q'_3$ 关于球心在原点、半径为 $a$ 的球面的镜像电荷；因此可以验证，$q$ 与 $q'_1$、$q'_2$ 与 $q'_3$，作为球面镜像电荷对，使得球面电位为零；另一方面，$q$ 与 $q'_2$，$q'_1$ 与 $q_3$，作为平面镜像电荷对，使得 $z=0$ 的平面电位为零。根据唯一性定理，以上这四个电荷在上半空间(除半球以外)产生的电位就与原问题等效。

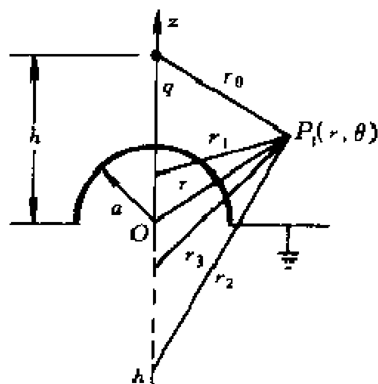



图 5-14 例 5-14 图

三个镜像电荷的电量及其位置由镜像法分别计算为

$$q'_1=-aq/h,\quad h_1=a^2/h$$

$$q'_2=-q,\quad h_2=-h$$

$$q'_3=aq/h,\quad h_3=-a^2/h$$

(1)根据点电荷的电位公式，计算的上半空间(除半球以外)的电位为

$$\Phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_0}+\frac{q'_1}{r_1}+\frac{q'_2}{r_2}+\frac{q_3}{r_3}\right)=\frac{q}{4\pi q}\left[\frac{1}{(r^2+h^2-2rh\cos\theta)^{1/2}}-\frac{a}{(r^2h^2+a^4-2rha^2\cos\theta)^{1/2}}-\frac{1}{(r^2+h^2+2rh\cos\theta)^{1/2}}+\frac{a}{(r^2h^2+a^4+2rha^2\cos\theta)^{1/2}}\right]\quad(r>a,0<\theta<\pi/2)$$

由于导体是等电位体，所以，半球和下半空间的电位为零。

(2)在凸半球表面的感应电荷面密度为

$$\rho_S=-\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big|_{r=a}=-\frac{q}{4\pi a}\left[\frac{h^2-a^2}{(h^2+a^2+2ha\cos\theta)^{3/2}}-\frac{h^2-a^2}{(h^2+a^2-2ha\cos\theta)^{3/2}}\right]$$

感应电荷总量

$$Q=\int_S\rho_S\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\rho_S a^2\sin\theta\mathrm{d}\Phi\mathrm{d}\theta=-q+\frac{q(h^2-a^2)}{h(h^2+a^2)^{1/2}}$$

### 三、圆柱面镜像法

本节我们讨论在无限长导体圆柱附近平行放置一无限长带电直线的静电问题，这类问题也可以用镜像法得到解决，以下我们具体说明其求解过程。

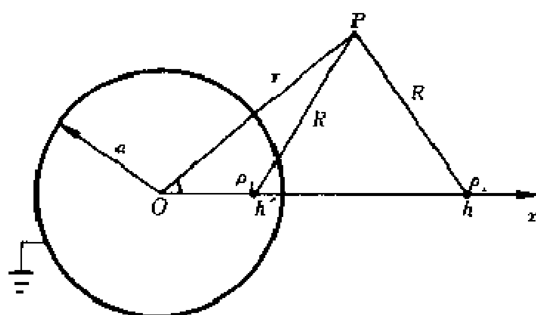



图 5-15 圆柱面镜像法

如图 5-15 所示，一无限长线电荷密度为 $\rho_l$，与半径为 $a$ 的无限长接地圆柱导体平行，直线到圆柱轴线的距离为 $h(h>a)$，求柱面外空间的电位。

圆柱导体为等电位体，由于接地的原因，圆柱导体内部及其表面的电位等于零。圆柱外空间的电位是带电直导线上的电荷和导体表面的感应电荷共同产生

的。当取如图 5-15 所示的坐标时，感应电荷相对于坐标 $\varphi$ 呈现出对称性，且靠近线电荷一侧的感应电荷密度要大些，而离线电荷远一侧的感应电荷密度则要小些。因此，合理的镜像线电荷 $\rho'_l$ 应该位于圆柱导体轴线与线电荷 $\rho_l$ 之间，距圆柱轴线 $h'$ 的地方，并且应该满足 $h'<a$ 的条件。这样，镜像线电荷的引入并没有改变圆柱外电荷的分布，因此，只要我们合理地选取镜像线电荷的电荷量及其位置，使得镜像线电荷和原线电荷在圆柱面上产生的电位为零，那么，根据唯一性定理，镜像线电荷和原线电荷在圆柱外产生的电位就和原问题等价。如图 5-15 所示，线电荷在空间某点 $P$ 产生的电位可表示为

$$\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{C_1}{R}$$

上式中 $C_1$ 为与电位参考点的选择有关的常数。镜像线电荷在 $P$ 点产生的电位可表示为

$$\frac{\rho'_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{C_2}{R'}$$

式中 $C_2$ 为与电位参考点的选择有关的常数。于是，镜像线电荷和原线电荷在圆柱外共同产生的电位就是

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{C_1}{R}+\frac{\rho'_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{C_2}{R'}\\ &= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{C_1}{(r^2+h^2-2rh\cos\varphi)^{1/2}}+\frac{\rho'_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{C_2}{(r^2+h'^2-2rh'\cos\varphi)^{1/2}}\end{aligned} \tag{5.4.5}$$

镜像线电荷 $\rho'_l$ 的引入应该满足圆柱面上电位恒为零的边界条件，即

$$\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{C_1}{(a^2+h^2-2ah\cos\varphi)^{1/2}}+\frac{\rho'_l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{C_2}{(a^2+h'^2-2ah'\cos\varphi)^{1/2}}=0$$

上式成立的条件是

$$\rho'_l=-\rho_l$$

$$\frac{C_1}{(a^2+h^2-2ah\cos\varphi)^{1/2}}=\frac{C_2}{(a^2+h'^2-2ah'\cos\varphi)^{1/2}}$$

令 $C_1/C_2=C$，则有

$$C(a^2+h'^2-2ah\cos\varphi)^{1/2}=(a^2+h^2-2ah\cos\varphi)^{1/2}$$

上式对任意的方位角 $\varphi$ 都成立，必有

$$C^2(a^2+h'^2)=a^2+h^2$$

$$C^2ah'=ah$$

解得

$$h'=\frac{a^2}{h},\quad C=\frac{h}{a}$$

或

$$h'=h,\quad C=\frac{h}{a}$$

后一组解不符合实际情况，应该舍去。故镜像线电荷密度及其位置是

$$\rho'_l=-\rho_l,\quad h'=\frac{a^2}{h} \tag{5.4.6}$$

将以上结果代入圆柱外空间电位的表达式，经整理后得

$$\Phi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R'h}{Ra} \tag{5.4.7}$$

对于圆柱表面上的任意一点，可以推导出以下一些有用的结果。

如图 5-16 所示，在圆柱表面任取一点 $P$ 因为镜像线电荷的位置 $h' = \frac{a^2}{h}$，故有

$$\frac{h'}{a} = \frac{a}{h}$$

即△$OPh'$与△$OPh$ 是相似三角形，因此有

$$\frac{R'}{R} = \frac{h'}{a} = \frac{a}{h} \tag{5.4.8}$$

这一结果也可以根据电位的表达式在圆柱的表面为零这一事实得到。

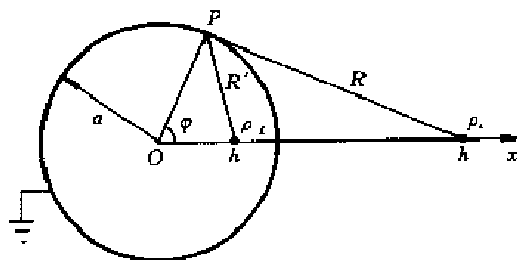



图 5-16

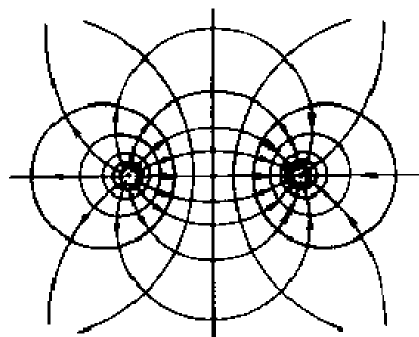


图 5-17 双平行线电荷的等位面和电力线图

另外，由圆柱镜像的电位公式(5.4.3)可以看出，当 $R'/R$ = 常数时，$\Phi$ 为常数，这是圆族的方程。所以等位面是圆柱面族。图 5-17 表示出其中的几个等位面。

现在我们能够计算圆柱导体外表面上的感应电荷面密度，即

$$\rho_S = -\varepsilon_0\frac{\partial\Phi}{\partial r}\bigg|_{r=a} = -\frac{\rho_l(h^2-a^2)}{2\pi a(h^2+a^2-2ah\cos\varphi)}$$

在导体表面单位长度上对感应电荷面密度进行积分，可得单位长度上圆柱导体外表面上总的感应电荷为

$$\int_S \rho_S \mathrm{d}S = -\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\frac{\rho_l(h^2-a^2)a\,\mathrm{d}\varphi}{2\pi a(h^2+a^2-2ah\cos\varphi)} = -\rho_l = \rho'$$

可见，单位长度圆柱面上总的感应电荷等于镜像线电荷密度。

单位长度线电荷所受的力

$$\boldsymbol{f} = \rho_l\boldsymbol{E}' = -\frac{\rho_l^2 h}{2\pi\varepsilon_0(h^2-a^2)}\boldsymbol{a}_x$$

**例 5.15** 无限长线电荷 $\rho_l$ 与半径为 $a$ 的无限长圆柱导体的轴相距 $h(h>a)$，如图 5-15 所示。

(1) 导体圆柱不接地；

(2) 导体圆柱单位长度带电荷 $\rho$，分别求出两种情形下圆柱导体外的电位分布

**解** 参看图 5-15。

(1) 圆柱导体不带电，也没有接地时，则导体表面总电荷量在外场的作用下始终为零。即当我们作任意包含导体的闭合面时，闭合面内电荷总量应该为零。镜像法给定镜像线电荷线

密度及其位置分别为

$$\rho_l' = -\rho_l, \quad h' = \frac{a^2}{h}$$

但是，当我们在圆柱外表面作闭合面时，闭合面内单位长度上的电荷量等于$\rho_l$，而不是零。因此，仅靠一个镜像线电荷是不能够与原问题在圆柱外等价的。由于镜像线电荷和原线电荷使圆柱面的电位为零，那么，只要我们在圆柱的轴线上再加上一个线电荷，其密度等于

$$\rho_l'' = \rho_l$$

就使得当我们在圆柱外表面作闭合面时，闭合面内包含的电荷量等于零，且圆柱表面的电位等于常数。这样，镜像线电荷$\rho_l'$和线电荷$\rho_l''$就与柱导体表面的感应电荷在圆柱外产生的电位等价。于是圆柱外电位为

$$\Phi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R'h}{Ra} + \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{C}{r}$$

上式中$C$是与电位参考点的选取有关的常数。

(2) 导体圆柱单位长度带电荷$\rho_0$时，我们同样可以先定出镜像线电荷的电荷密度及其位置是

$$\rho_l' = -\rho_l, \quad h' = \frac{a^2}{h}$$

为了满足在圆柱外表面沿圆柱轴向作单位长度的闭合面时，闭合面内包含的电荷量应该等于$\rho_0$，以及圆柱表面的电位等于常数的条件，可以断定应该在圆柱轴线上有等效线电荷：

$$\rho_l'' = \rho_0 + \rho_l$$

于是，以上镜像线电荷$\rho_l'$和线电荷$\rho_l''$就与柱导体表面的感应电荷在圆柱外产生的电位等价。因此，圆柱外电位为

$$\Phi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R'h}{Ra} + \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{C}{r} + \frac{\rho_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{r}$$

上式中$C$是与电位参考点的选取有关的常数。

**例5.16** 两根无限长平行导体圆柱，半径均为$a$，轴线距离为$D$，如图5.18所示。求两导体圆柱间单位长度的电容。

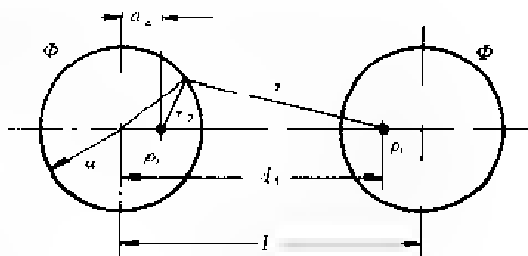


图5.18 例5.16图

**解** 由圆柱镜像法的讨论知道，线电荷$\rho_l$和镜像线电荷$-\rho_l$产生的等电位面是圆柱面族，如图5.17所示。因此，我们可以将本问题的两个导体圆柱面看成是如图5.17中的线电荷$\rho_l$和镜像线电荷$-\rho_l$的场中的两个等位面，只要求出此两线电荷的位置$d_1$和$d_2$，即可得到答案。这里$d_1$和$d_2$可由$D$和$a$定出，它们满足如下关系：

$$D = d_1 + d_2, \quad d_1 d_2 = a^2$$

解出：

$$d_1 = \frac{D}{2} + \left(\frac{D^2}{4} - a^2\right)^{1/2}$$

$$d_2 = \frac{D}{2} - \left(\frac{D^2}{4} - a^2\right)^{1/2}$$

我们可以把电位参考点选在平行双线的正中间，根据式(5.4.3)，电位表达式简化为

$$\Phi = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

对于左边圆柱上的点，根据关系式(5.4.4)，有

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{a}{d_1} = \frac{d_2}{a}$$

$$\left[\frac{r_2}{r_1}\right]^2 = \frac{d_2}{d_1}$$

故左边圆柱上的电位为

$$\Phi_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d_2}{d_1} = -\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d_1}{d_2}$$

同理，右边圆柱上的电位为

$$\Phi_1 = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d_1}{d_2}$$

两圆柱间的电压

$$U = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d_1}{d_2}$$

两圆柱导体间单位长度的电容

$$C = \frac{\rho_l}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{\dfrac{D}{2} + \left(\dfrac{D^2}{4} - a^2\right)^{1/2}}{\dfrac{D}{2} - \left(\dfrac{D^2}{4} - a^2\right)^{1/2}}} \tag{5.4.9}$$

如果 $D$ 远大于 $a$，则

$$C \approx \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{D}{a}}$$

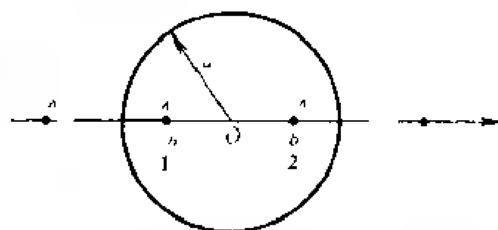



图5.19 例5.17图

**例 5.17** 如图5.19所示，在半径为 $a$ 的接地圆柱导体管内，与管轴等距离地放置着两根导线，当两导线具有等值异号电荷时，要使它们之间不受作用力，试证明它们的间距为 $2(\sqrt{5}-2)^{1/2}a$。

**证** 设两导线之间的距离为 $2b$，线电荷密度为 $\pm\lambda$，如图5.19所示。利用圆柱镜像原理，导线1和导线2的镜像线电荷在圆柱外侧，距圆柱轴线的距离是 $\frac{a^2}{b}$。因此，导线1所受的力为

$$F = \lambda\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b+\dfrac{a^2}{b}} - \frac{1}{2b} + \frac{1}{\dfrac{a^2}{b} - b}\right)\right] = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b}{a^2+b^2} - \frac{1}{2b} + \frac{b}{a^2-b^2}\right)$$

令

$$F = 0$$

得到

$$2b^2(a^2-b^2) + (b^2-a^2)(a^2+b^2) + 2b^2(a^2+b^2) = 0$$

解得

$$2b = 2(\sqrt{5}-2)^{1/2}a$$

即原问题得到证明

由于标量磁位和矢量磁位在 $\boldsymbol{J}=0$ 的空间也满足拉普拉斯方程，因而在不改变恒定磁场边界条件的情况下，磁场也可用镜像法求解，如例 4.13。

## 5.5　复变函数法

解析的复变函数具有保角变换等特性，对于平面二维场的求解是一种很优越的方法。在边界条件较为复杂的情况下，应用分离变量法遇到较大的困难，往往能利用复变函数法使问题迎刃而解，而且在一般情况下，它的解具有较为简洁的形式，从解中还可以直接得到电容的表达式。它一般适合于求解导体边界且为平面二维场的情形。

### 一、复电位函数

设复变函数 $w(z)$ 是复数 $z=x+\mathrm{j}y$ 的函数，因此它的实部和虚部都是 $x$、$y$ 的实函数：

$$w(z)=u(x,y)+\mathrm{j}v(x,y)$$

对于解析复函数，即在给定区域中连续可导。根据复变函数理论，复变函数可导的条件是其实部和虚部满足柯西-黎曼条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{5.5.1}$$

证明如下：

因为
$$\frac{\mathrm{d}w(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{j}\frac{\partial v}{\partial x}=-\mathrm{j}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{j}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{j}\frac{\partial u}{\partial y}$$

故
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

以上即为柯西-黎曼条件。由柯西-黎曼条件进一步可以得出：解析函数的实部和虚部都满足二维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

用二维拉普拉斯算子简记为

$$\nabla_{xy}^2 u=0,\quad \nabla_{xy}^2 v=0$$

其中

$$\nabla_{xy}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

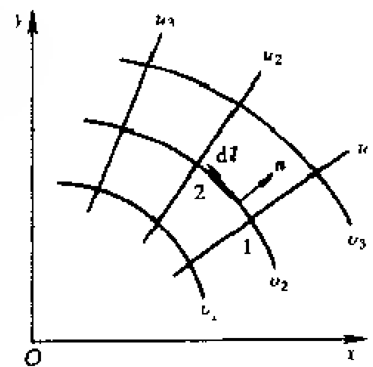


图　5-20

因此，解析函数的实部 $u$ 和虚部 $v$ 都可以代表二维场的电位。以下证明当 $v$ 代表二维场的电位时，则 $u$ 代表二维场的电通量。由于选择了 $v$ 代表静电位，则可用 $-\nabla_{xy}v$ 代表静电场强度。如图 5-20 所示，在等电位线上两点 1,2 之间电场的通量为

$$\begin{aligned}\Psi_e&=-\int_1^2 \nabla_{xy}v\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}l=-\int_1^2 \nabla_{xy}v\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{a}_z)\\&=-\int_1^2 \nabla_{xy}v\cdot[(\boldsymbol{a}_x\mathrm{d}x+\boldsymbol{a}_y\mathrm{d}y)\times\boldsymbol{a}_z]=\int_1^2\left(\boldsymbol{a}_x\frac{\partial v}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cdot(-\boldsymbol{a}_y\mathrm{d}x+\boldsymbol{a}_x\mathrm{d}y)\\&=\int_1^2 -\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x=\int_1^2\mathrm{d}u=u_2-u_1\end{aligned}$$

可见，$u$ 代表二维场的电通量函数，图 5-20 中 1,2 两点之间的电通量为 $u_2-u_1$。

不难看出，在复平面 $z$ 上，等通量线（$u=$ 常数）和等位线（$v=$ 常数）是相互正交的，因为等通量线在某点的梯度

$$\nabla u = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial u}{\partial y}$$

是和等通量线垂直的矢量，而等电位线在该点的梯度

$$\nabla v = \boldsymbol{a}_x \frac{\partial v}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial v}{\partial y}$$

是和等位线垂直的矢量，由于

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

表明 $\nabla u$ 和 $\nabla v$ 互相垂直，也即等通量线和等位线相互正交，所以等通量线与电力线是相合的

但是，上述的 $u$ 和 $v$ 与实际问题中的电位和电场的通量可能会相差一个常数因子，设此度量因子为 $k$，则

$$w = ku + \mathrm{j}kv$$

称为复电位。

如果等位线是闭合的，且由此等位线和沿 $z$ 轴方向单位长度所构成的等位面是导体面，则其上所带的电荷量，由高斯定律，为

$$q = \varepsilon_0(u_2 - u_1)$$

如果 $v_1$ 和 $v_2$ 分别与两个导体的表面相重合，则两导体间单位长度的电容为

$$C = \frac{\varepsilon_0(u_2 - u_1)}{v_2 - v_1} \tag{5.5.2}$$

上式是利用复变函数法计算导体电容的一个非常方便的公式。

电场强度也可以由复电位函数 $w=f(z)$ 直接得出。如果取 $u$ 代表电位函数，则根据 $\boldsymbol{E}=-\nabla u$，有

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{5.5.3}$$

取复电位函数 $w$ 的导数的共轭，并利用柯西-黎曼条件，可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial u}{\partial y}$$

因此

$$\boldsymbol{E} = E_x + \mathrm{j}E_y = -\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{j}\frac{\partial u}{\partial x} = -\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^*$$

注意：以上我们用复数表示电场矢量的方法，j 代表 $y$ 轴方向，而实部表示 $x$ 方向的分量。

如果取 $v$ 代表电位函数，则根据 $\boldsymbol{E}=-\nabla v$，有

$$E_x = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

取 $w$ 的导数的共轭、并利用柯西-黎曼方程，可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^* = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{j}\frac{\partial v}{\partial x}$$

故

$$E = E_x + jE_y = -\frac{\partial v}{\partial x} - j\frac{\partial v}{\partial y} = -j\left(\frac{dw}{dz}\right)^* \tag{5.5.4}$$

因此，对于任何情况，不管是 $u$ 还是 $v$ 代表电位函数，电场强度的绝对值，都可以由下式给定

$$|E| = \left|\frac{dw}{dz}\right| \tag{5.5.5}$$

从以上讨论可知，只要找到复电位函数就可以给出电位分布，相应的静电场问题便可以得到解决。但是，对于给定的二维边值问题，找到需要的复电位并没有一定的方法，而且往往是困难的。一般情况下，先研究各种复变函数的实部和虚部所代表的曲线族的几何特征，看它是否与所给定的静电场问题的边界相吻合，如果一致的话，就可选此解析函数作为所给问题的一般解，接下来只需根据问题的边界条件来决定该解析函数的待定系数，从而得到所给问题的复电位表达式。

## 二、用复位函数法求解二维场的计算过程

下面介绍两种常用的解析函数及其在复位函数法中的应用。

1. 对数函数

设对数函数为

$$w(z) = k\ln z + c_1 + jc_2$$

式中 $k$、$c_1$ 和 $c_2$ 为实常数。令 $z = re^{j\alpha}$，代入上式得

$$w(z) = k\ln r + c_1 + j(k\alpha + c_2)$$

因而

$$u = k\ln r + c_1$$

$$v = k\alpha + c_2$$

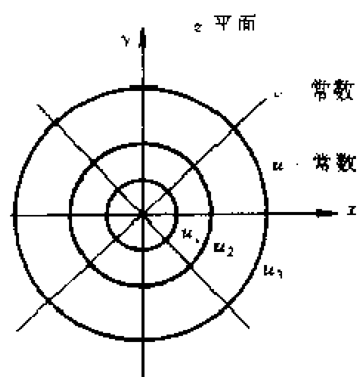


图 5.21

由以上两式可以看出，在 $z$ 平面上，$u$ = 常数的曲线是 $r$ = 常数的同心圆族，而 $v$ = 常数的曲线是 $\alpha$ = 常数的径向辐射线族，如图 5.21 所示。因此，如果取此解析函数的实部 $u$ 作为电位函数，则可用此对数函数求解带电长直圆导线或同轴圆筒电容器的电位。如果取此对数函数的虚部 $v$ 作为电位函数，则可以求解两块夹角为 $\theta$ 的半无限大导体平面间的电位或导体扇形片中的电位。

**例 5.18** 如图 5-22 所示，圆心角为 $\theta$ 的扇形电阻片的厚度为 $h$，电导率为 $\sigma$。已知 $\alpha = 0$ 处电位 $\Phi = 0$，$\alpha = \theta$ 处电位 $\Phi = \Phi_0$。求导电片内扇形区域中的电位分布和两个导电片之间的电导。

**解** 根据复对数函数 $w(z) = k\ln z + c_1 + jc_2$ 的实部和虚部的特性，可选取 $v = k\alpha + c_2$ 作为电位函数，因此，则 $u = k\ln r + c_1$ 表示电场的通量函数。根据图 5-22 中电位的边界条件：

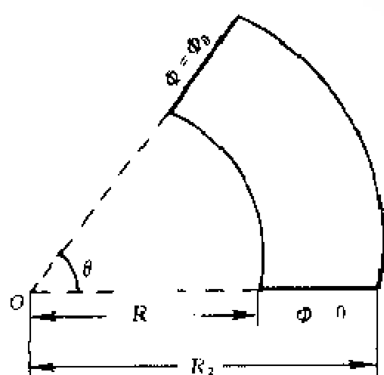


图 5-22 例 5.18 图

$$v|_{\alpha=0} = 0, \quad v|_{\alpha=\theta} = \Phi_0$$

可知

$$c_2 = 0, \quad k\theta + c_2 = \Phi_0$$

解得

$$c_2 = 0, \quad k = \frac{\Phi_0}{\theta}$$

故导电片中的电位分布为

$$u = \frac{\alpha\Phi_0}{\theta}$$

圆弧之间的电场通量为

$$\psi = \varepsilon(u_2 - u_1)h = h\varepsilon\ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{\varepsilon\Phi_0}{\theta}h\ln\frac{R_2}{R_1}$$

导电片两端间的电容为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon(u_2 - u_1)h}{\Phi_0} = \frac{\varepsilon h}{\theta}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

根据静电比拟的方法可知，导电片两端间的电导为

$$G = \frac{\sigma h}{\theta}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

2. 反余弦解析函数

设反余弦函数的形式为

$$w(z) = u + jv = d\arccos\frac{z}{k} + c_1 + jc_2$$

式中 $d$、$k$、$c_1$ 和 $c_2$ 均为实常数。由余弦函数的性质可以得到

$$z = x + jy = k\cos\left(\frac{u - c_1}{d} + j\frac{v - c_2}{d}\right)$$

由此得到

$$x = k\cos\left(\frac{u - c_1}{d}\right)\cosh\left(\frac{v - c_2}{d}\right) \tag{5.5.6}$$

$$y = -k\sin\left(\frac{u - c_1}{d}\right)\sinh\left(\frac{v - c_2}{d}\right) \tag{5.5.7}$$

从以上两式中消去 $u$，得

$$\frac{x^2}{k^2\cosh^2\left(\frac{v - c_2}{d}\right)} + \frac{y^2}{k^2\sinh^2\left(\frac{v - c_2}{d}\right)} = 1 \tag{5.5.8}$$

消去 $v$，得

$$\frac{x^2}{k^2\cos^2\left(\frac{u - c_1}{d}\right)} - \frac{y^2}{k^2\sin^2\left(\frac{u - c_1}{d}\right)} = 1 \tag{5.5.9}$$

可见，当 $v=$ 常数时，式(5.5.8)表示一族中心在原点的共焦椭圆，如图 5-23 所示。椭圆的长半轴、短半轴和半焦距分别为

$$a = k\cosh\left(\frac{v - c_2}{d}\right) \tag{5.5.10}$$

$$b = k\sinh\left(\frac{v - c_2}{d}\right) \tag{5.5.11}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = k \tag{5.5.12}$$

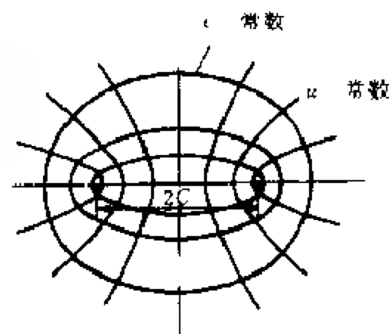



图 5-23 共焦椭圆—共焦双曲线

因此，如果取此反余弦函数的虚部 $v$ 为电位函数，这个解析函数就能表示无限长带电椭圆导体周围的电场，或两个共焦椭圆柱导体之间的电场。显然，当 $v=c_2$ 时，$a=k$，$b=0$，等位线退化为两焦点之间的一段直线，因此，此解析函数还能用来求解有限

宽度为 $2k$ 的无限长导体平板周围的电场问题。

当 $u=$ 常数时，式(5.5.9)表示一族共焦的双曲线(如图 5-23)，此双曲线的半实轴、半虚轴和半焦距分别是

$$a=k\cos\left(\frac{u-c_1}{d}\right),\quad b=k\sin\left(\frac{u-c_1}{d}\right),\quad c=\sqrt{a^2+b^2}=k$$

因此，如果取此反余弦函数的实部 $u$ 为电位函数，这个解析函数就能表示无限长带电双曲面导体周围的电场，或两个共焦双曲面导体之间的电场。显然，当 $u=c_1$ 时，$a=k$，$b=0$，等位线退化为从焦点 $x=k$ 起向右延伸至无穷远处的直线。而当 $\frac{u-c_1}{d}=\pi$ 时，双曲线退化为从焦点 $x=-k$ 起向左延伸至无穷远处的直线。因此，此解析函数还能用来求解一双曲柱面电极与另一从焦点延伸至无穷远的平面电极间的电场，或两个处于同一平面并隔开一定距离的半无限大导体平面间的电场问题。

**例 5.19** 如图 5-24 所示，一个由共焦椭圆柱面构成的电容器的内、外长半轴分别为 $a_1$ 和 $a_2$，短半轴分别为 $b_1$ 和 $b_2$，极间为真空。已知内导体电位 $\Phi=0$，外导体电位 $\Phi=U_0$。求此电容器单位长度的电容。

解 因为电容器的两个极板是由共焦椭圆柱面构成的，因此可用反余弦解析函数求解，取 $v$ 为电位函数，由式(5.5.12)可知，椭圆的半焦距

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a_2^2-b_2^2}=k$$

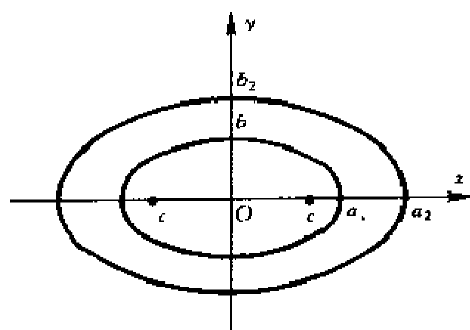


图 5-24 例 5.19 图

选定电场的通量函数 $u$ 的参考线为

$$u=0\quad(a_1\leqslant x\leqslant a_2,\ y=0)$$

代入式(5.5.7)，得

$$0=-k\sin\frac{0-c_1}{d}\sinh\frac{v-c_2}{d}$$

上式对任意 $v$ 的取值都成立，必须有 $c_1=0$。根据式(5.5.10)，得到

$$v=d\operatorname{arccosh}\frac{a}{k}+c_2$$

由于 $\operatorname{arccosh}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，因此有

$$v=d\ln\frac{a+b}{k}+c_2$$

将电位函数 $v$ 的边界条件代入上式得

$$0=d\ln\frac{a_1+b_1}{k}+c_2$$

$$U_0=d\ln\frac{a_2+b_2}{k}+c_2$$

由以上两式可以解出

$$d=\frac{U_0}{\ln\dfrac{a_2+b_2}{a_1+b_1}}$$

$$c_2=-\frac{U_0}{\ln\dfrac{a_2+b_2}{a_1+b_1}}\ln\frac{a_1+b_1}{k}$$

从而得到反余弦函数的表达式为

$$w(z) = \frac{U_0}{\ln\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1}}\left(\arccos\frac{z}{k} - \mathrm{j}\ln\frac{a_1+b_1}{k}\right)$$

为了确定电容，必须求出电场的通量。为此，先计算 $z=\mathrm{j}b_1$ 点的通量函数值 $u_2$，此时，$v(0,b_1)=0$，再由式(5.5.6)和(5.5.7)可得

$$0 = k\cos\frac{u_2}{d}\cosh\frac{c_2}{d} \tag{5.5.13}$$

$$b_1 = k\sin\frac{u_2}{d}\sinh\frac{c_2}{d} \tag{5.5.14}$$

由式(5.5.13)得到

$$\frac{u_2}{d} = \pm\frac{\pi}{2}$$

由于$\frac{c_2}{d} = -\ln\frac{a_1+b_1}{k}<0$，因此由式(5.5.14)知 $-\pi<\frac{u_2}{d}<0$

所以得

$$\frac{u_2}{d} = -\frac{\pi}{2}$$

内导体单位长度上的电荷量

$$q_1 = 4\varepsilon_0 u_2 = -2\pi\varepsilon_0 d = -\frac{2\pi\varepsilon_0 U_0}{\ln\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1}}$$

根据电容的定义，本问题的共焦椭圆电容器单位长度的电容

$$C = \frac{q_2}{U_0} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1}}$$

当椭圆内导体退化为带线(即 $b_1=0, a_1=c=k$)时，令 $a_2=a, b_2=b$，则内、外两导体间的电容为

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\operatorname{arcsinh}\frac{b}{k}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\operatorname{arccosh}\frac{a}{k}}$$

### 三、保角变换法

复电位函数能够给出电场的电位函数与电通量函数相对于平面坐标$(x,y)$的整体性描述。但是，利用它能够求解的问题是很有限的。对于边界条件较为复杂的二维静态场问题，采用本节介绍的保角变换法往往是能奏效的。保角变换法利用解析函数变换的保角性质，将 $z$ 平面上边界形状较为复杂的二维场变换为 $w$ 平面上边界形状较为简单的场问题，再反变换回去从而得到原来 $z$ 平面上场的解。

#### 1. 解析函数的保角变换性质

解析函数 $w=f(z)$代表着 $z$ 平面上的点与 $w$ 平面上点之间的变换。对于 $z$ 平面上任意一点，$w$ 平面上都有一点与之对应。这样，$z$ 平面上的曲线在 $w$ 平面上也就有相对应的曲线，如图 5-25 所示。如果 $f(z)$在 $z_0$ 和 $z_0$ 的邻域内解析，且处处有 $f'(z)\neq0$，根据导数的定义

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$$

它的模 $|f'(z)|=\left|\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|=\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|$ 表示线段的放大率。由于 $f'(z)$ 不是常数，因此，在 $z$ 平面上的图像经变换到 $w$ 平面上后，形状可能发生较大的改变，而这正是要加以利用的

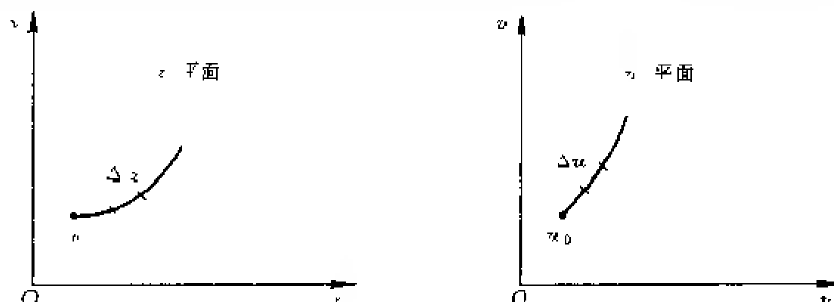



图 5-25

其次再看 $f'(z)$ 的幅角的意义。已知 $z$ 平面上的一小线段 $(z, z+\Delta z)$ 与实轴之间的夹角为 $\arg\Delta z$，而在 $w$ 平面上相应的小线段 $(w, w+\Delta w)$ 与实轴之间的夹角为 $\arg\Delta w$，两者之差

$$\arg\Delta w-\arg\Delta z=\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}$$

当 $\Delta z\to 0$ 时，有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}=\arg f'(z)$$

可见，$f'(z)$ 的幅角的意义是，当 $z$ 平面上的一小线段 $dz$ 变换到 $w$ 平面上相应的小线段 $dw$ 时，$dw$ 与实轴的夹角比 $dz$ 与实轴的夹角大 $\arg f'(z)$。亦即 $dw$ 的方向可看成是经 $dz$ 沿逆时针方向旋转 $\arg f'(z)$ 得到的。

如果在 $z$ 平面上有两条曲线 $C_1$ 和 $C_2$ 相交于 $z_0$ 点，它们的夹角为 $\alpha$［如图 5-26(a)］，而变换到 $w$ 平面上，相应的两条曲线 $C'_1$ 和 $C'_2$ 相交于 $w_0$ 点，如图 5-26(b) 所示。曲线 $C_1$ 和 $C_2$ 在 $z_0$ 点的幅角分别是 $\beta_1$ 和 $\beta_2$，夹角 $\alpha=\beta_2-\beta_1$。从 $z$ 平面变换到 $w$ 平面，两曲线都旋转过了 $\arg f'(z_0)$ 角，因而，曲线 $C'_1$ 和 $C'_2$ 在 $w_0$ 点的幅角分别是 $\varphi_1=\beta_1+\arg f'(z_0)$ 和 $\varphi_2=\beta_2+\arg f'(z_0)$，夹角为 $\varphi_1-\varphi_2=\beta_2-\beta_1=\alpha$，因此两曲线的夹角经变换后，其大小和转向保持不变。由于有这种保角性，这类 $f'(z)\neq 0$ 的解析函数所实现的变换常称为保角变换。

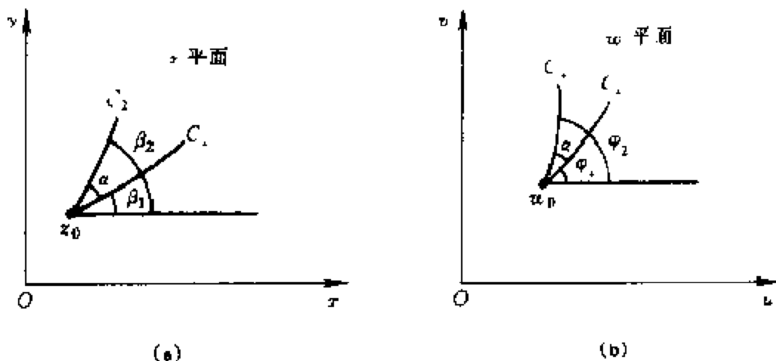



图 5-26

下面介绍有关保角变换的几点重要的推论：

(1)拉普拉斯算符的变换

如果一函数 $\Phi(x,y)$ 在 $z$ 平面上满足拉普拉斯方程，经保角变换 $w=f(z)=f(x+jy)=u+jv$ 后，在 $w$ 平面上变成 $u,v$ 的函数 $\Phi[x(u,v),y(u,v)]$，此函数仍然满足新坐标系下的拉普拉斯方程。证明如下，因为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

因此

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}$$

类似地

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$$

将以上两式相加，得到

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}+\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial u}+$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial v}+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}$$

由于保角变换的函数必须是解析函数，根据柯西-黎曼条件，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

另外

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-j\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+j\frac{\partial v}{\partial x}$$

从而

$$|f'(z)|^2=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\quad\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

因此

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\right)|f'(z)|^2$$

因为变换 $w=f(z)$ 具有保角性质的充分必要条件是在所考虑的区域中处处有 $f'(z_0)\neq 0$，所以由上式可得

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)|f'(z)|^{-2}$$

如果 $\Phi(x,y)$ 在 $z$ 平面上满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=0$$

则在 $w$ 平面上，$\Phi[x(u,v),y(u,v)]$ 仍然满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}=0$$

如果 $\Phi(x,y)$ 在 $z$ 平面上满足泊松方程：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=-\frac{\rho(z)}{\varepsilon}$$

则经过保角变换后，在 $u$ 平面上，$\Phi(u,v)$ 仍然满足泊松方程：

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}=-\frac{\rho(z)}{\varepsilon}|f'(z)|^{-2}=-\frac{\rho(w)}{\varepsilon}$$

式中 $\rho(z)$ 和 $\rho(w)$ 分别为 $z$ 平面上和 $w$ 平面上的体电荷密度，满足

$$\rho(w)=\rho(z)|f'(z)|^{-2}$$

上式结果说明，经过由 $z$ 平面到 $w$ 平面的保角变换后，场源体电荷密度为原场源体电荷密度的 $|f'(z)|^{-2}$。但是，总的电荷量保持不变，证明如下：

$$\iint\rho(w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\rho(z)|f'(z)|^{-2}\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|$ 是雅可比行列式，即

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}\\\frac{\partial v}{\partial x}&\frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=|f'(z)|^2$$

将雅可比行列式的结果代入电荷总量的积分公式，有

$$\iint\rho(w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\rho(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2)保角变换对电场强度的影响

在 $z$ 平面和 $w$ 平面上电场强度的大小分别是

$$|E|_{(z)}=\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2}$$

$$|E|_{(w)}=\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2}$$

由于

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

故

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}$$

由于

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

根据柯西-黎曼条件，上式也可写成

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}$$

故

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}$$

因此

$$\sqrt{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}}=\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$$

所以

$$|E|_{(z)}=|E|_{(w)}|f'(z)|$$

上式表明，保角变换虽然不改变电位函数的大小，但是却使电场强度的大小在 $w$ 平面上为 $z$ 平面上相应值的 $|f'(z)|^{-1}$ 倍。

因为导体表面上的面电荷密度 $\rho_s = D_n = \varepsilon E_n$，所以，经过保角变换后，导体表面的面电荷密度大小在 $w$ 平面上为 $z$ 平面上相应值的 $|f'(z)|^{-1}$ 倍。

(3)保角变换前后，导体表面上的电荷总量保持不变

设 $C$ 为 $z$ 平面上导体表面的曲线，而 $C'$ 为经过保角变换后 $w$ 平面上导体表面相应的曲线，导体表面单位长度的 $C$ 和 $C'$ 上的电荷量分别为 $Q_C$ 和 $Q'_C$。根据前面获得的保角变换的性质，有

$$Q_C = \int_C \varepsilon E_{n,z}\,\mathrm{d}l = \int_{C'} \varepsilon E_{n(w)}|f'(z)||f'(z)|^{-1}\mathrm{d}l' = Q'_C$$

(4)保角变换前后，两导体之间的电容量保持不变

因为保角变换前后两导体表面的电荷总量和电位都保持不变，因此，变换前后必有电容不变的结论。这一结论对于求解较为复杂的边界问题的电容是很重要的。

2. 常用的保角变换函数及其应用

保角变换法特别适用于边界形状较为复杂的位场问题，既然它把 $z$ 平面上的拉普拉斯方程变换为 $w$ 平面上的拉普拉斯方程，那么问题的关键就在于如何找到一个能把给定的较为复杂形状的边界变换为较为简单形状边界的保角变换，使得变换后在 $w$ 平面上场域的边值问题可以较为容易地得到解决，从拉普拉斯方程 $\nabla^2\Phi(u,v)$ 加上边界条件，求出 $\Phi(u,v)$ 后，再通过逆变换求出原问题的解 $\Phi[u(x,y),v(x,y)]$。但是，对于如何找到一个合适的保角变换解析函数，却没有一个普遍适用的方法。以下介绍几种具体的保角变换及其应用。

(1)对数函数的保角变换

设对数函数为

$$w = k\ln z = u + \mathrm{j}v$$

采用极坐标形式，变换可表示为

$$u = k\ln r$$
$$v = k\theta$$

显然，它把 $z$ 平面上以原点为圆心的圆($r=$ 常数)变换成 $w$ 平面上平行于虚轴的直线，或者把 $z$ 平面上过原点的射线变换成 $w$ 平面上平行于实轴的直线。

**例 5.20** 如图 5-27(a)所示，内、外半径分别为 $a$ 和 $b$ 的同轴电缆加有电压 $U_0$，求此电缆的电位分布和单位长度的电容。

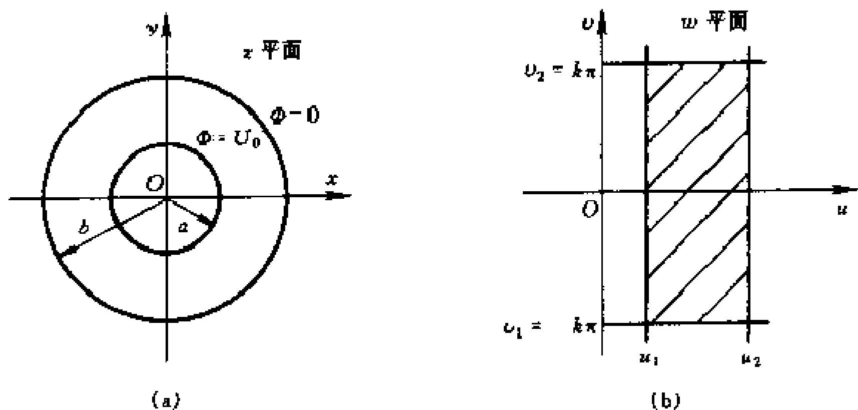



图 5-27 例 5.20 图

解 设内导体电位 $\Phi = U_0$，外导体电位 $\Phi = 0$。利用对数变换 $w = k\ln z = u + \mathrm{j}v$，可将在 $z$ 平面上半径分别为 $a$ 和 $b$ 的圆变换成 $w$ 平面上的平行线 $u_1$ 和 $u_2$，如图 5-27(b)所

示。由于保角变换保持电位不变，因此，在 $w$ 平面上 $u_1$ 和 $u_2$ 处的电位分别是 $U_0$ 和 0，故平行板电容器电位

$$\Phi(u)=U_0+\frac{U_0}{u_1-u_2}(u-u_1)$$

通过逆变换可以得到 $z$ 平面上的同轴电缆电位分布为

$$\Phi(r)=U_0+\frac{U_0}{k\ln a-k\ln b}(k\ln r-k\ln a)=U_0+\frac{U_0}{\ln(b/a)}\ln\frac{a}{r}=\frac{U_0}{\ln(b/a)}\ln\frac{b}{r}$$

同轴线单位长度的电容

$$C=\frac{\varepsilon(v_1-v_2)}{u_1-u_2}=\frac{\varepsilon(-k\pi-k\pi)}{k\ln a-k\ln b}=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}}$$

(2)幂函数的保角变换

设变换函数为

$$w=z^p=u+\mathrm{j}v$$

其中 $p$ 为实常数。

采用极坐标，令 $z=re^{\mathrm{j}\theta}$，有

$$u=r^p\cos p\theta$$
$$v=r^p\sin p\theta$$

可以看出，解析变换 $w=z^p$ 把 $z$ 平面上与正实轴夹角为 $\theta=\pi/p$ 的角形区域变换成 $w$ 平面的上半平面。

**例 5.21** 在两块成任意夹角 $\alpha$ 的半无限大理想导体平板的角形区域内，有一与导体平面平行的线电荷密度为 $\lambda$ 的无限长直导线，其位置用极坐标如图 5-28(a)所示。设两导体平板的电位为零，求角形区域的电位分布。

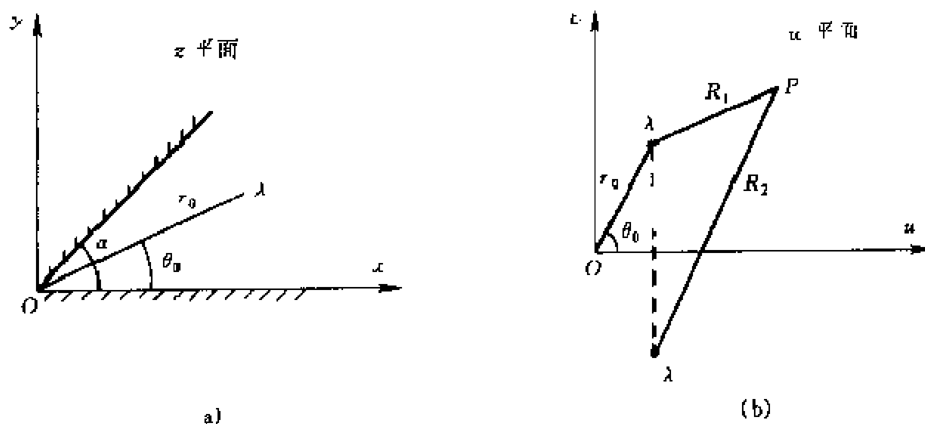



图 5-28 例 5-21 图

**解** 若 $\pi/\alpha$ 为整数，可以采用镜像法求解。本问题中的夹角 $\alpha$ 是任意的，一般不能用镜像法求解，但可以用保角变换法，使边界形状简化，从而易于求解。采用幂函数变换

$$w=z^{\pi/\alpha}$$

式中

$$w=r'e^{\mathrm{j}\theta'}=u+\mathrm{j}v$$
$$z=re^{\mathrm{j}\theta}=x+\mathrm{j}y$$

可见

$$\rho' = \rho^{\pi/\alpha}$$

$$\theta' = \frac{\pi\theta}{\alpha}$$

显然，以上变换将 $z$ 平面上的角形区域 $\theta = 0$ 和 $\theta = \alpha$，变换成 $w$ 平面上的上半空间。已知细导线在 $z$ 平面上的位置是 $Z_0 = r_0 e^{j\theta_0}$，变换到 $w$ 平面相应的位置为 $W_0 = r_0^{\pi/\alpha} e^{j\pi\theta_0/\alpha}$。因为变换后的线电荷密度 $\lambda(w) = \rho(w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \rho(z)|f'(z)|^{-2}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lambda(z)$，即线电荷密度 $\lambda$ 保持不变。

在 $w$ 平面上，可用镜像法求解电位，如图 5-28(b)。设 $v = 0$ 的平面为零电位参考点，而镜像线电荷 $-\lambda$ 位于 $w_0^* = r_0^{\pi/\alpha} e^{-j\pi\theta_0/\alpha}$ 处。于是 $w$ 平面上半空间的电位：

$$\Phi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{w - w_0^*}{w - w_0}\right|$$

对以上结果进行逆变换，可得原问题的电位函数：

$$\Phi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{z^{\pi/\alpha} - (z_0^*)^{\pi/\alpha}}{z^{\pi/\alpha} - z_0^{\pi/\alpha}}\right| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{r^{\pi/\alpha}e^{j\pi\theta/\alpha} - r_0^{\pi/\alpha}e^{-j\pi\theta_0/\alpha}}{r^{\pi/\alpha}e^{j\pi\theta/\alpha} - r_0^{\pi/\alpha}e^{j\pi\theta_0/\alpha}}\right|$$

以上例子说明，运用保角变换法的关键是正确选择合适的变换函数，使原问题的边界形状变得简单。有时，经过一次变换后问题的边界形状仍旧较为复杂，还可进行多次变换，直至变得简单易解为止。

## 5.6 许瓦尔兹-克利斯托夫变换

如前所述，保角变换只适用于二维静电场，电位分布满足拉普拉斯方程。在实际应用中，对于大量简单的边界条件，可从专门书籍中查到相应的解析变换函数。但是有些问题的边界条件比较复杂，需要多次运用保角变换才能成为易于求出电容的简单边界，还有些实际问题，只有对其作了某些近似处理后，才能获得满足工程需要的答案。将多边形变换成矩形（相应于平板电容）是一类具有广泛应用价值的保角变换，许瓦尔兹（Schwarz）和克利斯托夫（Christoffel）各自独立完成了这类问题的研究。

本节我们介绍在保角变换中起着很大作用的许瓦尔兹-克利斯托夫变换方法，它在应用上特别重要，因为它使我们能够写出一个函数（固然，一般地讲，只能写成复积分的形式），把上半平面保角变换成预先给定的一个多角形区域。尤其是许瓦尔兹-克利斯托夫变换方法在求解复杂带状传输线参数方面方便而且有效。

我们知道，幂函数

$$w = z^p$$

有这样的性质：它把 $z$ 平面上以 $z = 0$ 为顶点、张角为 $\alpha(0 < \alpha < 2\pi)$ 的角形区域变换成 $w$ 平面上以 $w = 0$ 为顶点、张角为 $p\alpha$ 的角形区域。因此，变换

$$w - w_1 = (z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}} \tag{5.6.1}$$

将 $x$ 轴上的 $x_1$ 点［如图 5-29(a)］变换成 $w$ 平面上的 $w_1$ 点，$z$ 平面的上半平面变换成 $w$ 平面上在 $w_1$ 点的张角为

$$\frac{\alpha_1}{\pi}\cdot\pi = \alpha_1$$

的角形区域〔图 5-29(b)〕。

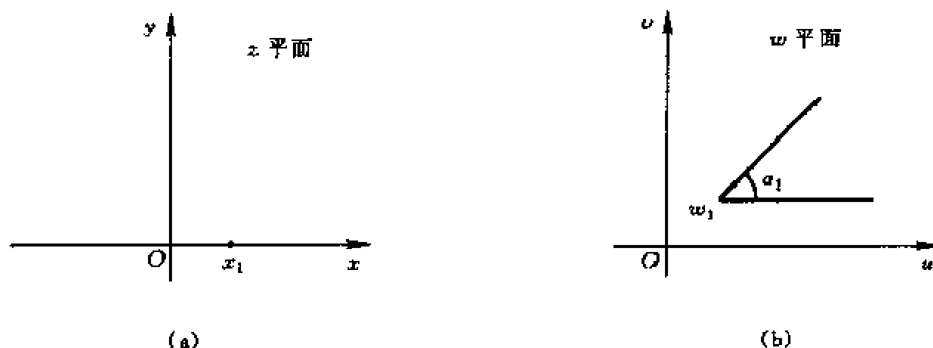



图 5-29

变换(5.6.1)可由方程

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\alpha_1}{\pi}(z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1} \tag{5.6.2}$$

确定。这个角形区域可以看成是一个特殊的多角形区域。由此使我们想到，把上半平面变换成一般的多角形区域(如图 5-30 所示)的变换是否能用下列方程实现

$$\frac{dw}{dz}=c(z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(z-x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\cdots(z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} \tag{5.6.3}$$

上式中 $c$ 是复常数，$x_1$、$x_2$、…、$x_n$ 和 $\alpha_1$、$\alpha_2$、…、$\alpha_n$ 都是实的常数，且 $x_1<x_2<\cdots<x_n$。下面我们来验证这一点。

让 $z$ 从 $x_1$ 的左边沿 $x$ 轴向右移动，从而观察点 $w$ 的轨迹。由式(5.6.3)得

$$\arg dw=\arg c+\left(\frac{\alpha_1}{\pi}-1\right)\arg(z-x_1)+\left(\frac{\alpha_2}{\pi}-1\right)\arg(z-x_2)+\cdots+$$

$$\left(\frac{\alpha_n}{\pi}-1\right)\arg(z-x_n)+\arg dz \tag{5.6.4}$$

可以看出，在 $z$ 没有达到 $x_1$ 以前，上式右边的每一项都不变，表明 $dw$ 的幅角保持不变，即像点沿一条直线移动。但是，当 $z$ 经过 $x_1$ 时，差值 $z-x_1$ 发生从负到正的突变，$\arg(z-x_1)$ 变化了 $-\pi$，而其他各项都没有变化，因此，$\arg dw$ 改变了

$$\left(\frac{\alpha_1}{\pi}-1\right)(-\pi)=\pi-\alpha_1$$

从图 5-30(a)可以看出，$\pi-\alpha_1$ 是 $w$ 在顶点 $w_1$ 开始沿着多角形下一条边的方向移动所必须转

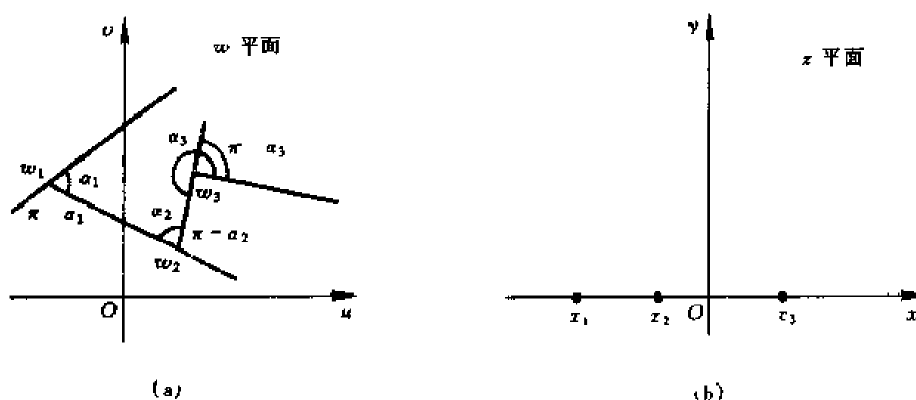



图 5-30

过的角,即是多角形的外角。在 $z$ 从 $x_1$ 变化到 $x_2$ 的过程中,(5.6.4)式右边的每一项都不变,也就是 $\mathrm{d}w$ 的幅角保持不变,因此 $w$ 沿着直线移动。当 $z$ 经过 $x_2$ 时,这时 $z-x_2$ 发生从负到正的突变,$\arg(z-x_2)$ 变化了 $-\pi$,而其他各项都没有变化,结果,$\arg\mathrm{d}w$ 又改变了 $\pi-\alpha_2$,而这刚好是 $w$ 在顶点 $w_2$ 要到达多角形下一条边的方向所必须转过的角。依次下去,当 $z$ 经过整个 $x$ 轴时,$w$ 则沿着多角形的周边移动,而多角形的各边转过的角依次为 $\pi-\alpha_1,\pi-\alpha_2,\cdots,\pi-\alpha_n$。由于当 $z$ 沿 $x$ 轴从左向右移动时,上半平面留在它的左边,因而当 $w$ 从 $w_1$ 到 $w_2$ 沿着多角形的周边移动时,留在它的左边的区域就是上半平面映射成的多角形区域。将变换(5.6.3)改写成积分的形式

$$w=c\int_{z_0}^{z}(z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(z-x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\cdots(z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}\mathrm{d}z+c_1 \tag{5.6.5}$$

其中 $z_0$、$c$ 与 $c_1$ 是三个待定的复常数,且多角形内角之和满足 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=(n-2)\pi$。现在我们看看如何确定(5.6.4)式的待定常数,才能将上半平面变换成一个已知的多角形。首先应当适当地选取 $x_i$ 的值,使(5.6.4)式把上半平面变换成的多角形与给定的多角形相似。我们知道,两个多角形相似的条件是对应角相等且对应边成比例。(5.6.4)式已经满足了对应角相等的条件。由相似条件容易知道,$x_i$ 中只能有三个可以任意;其次经过线性变换,即通过选定复常数 $c$ 与 $c_1$ 的值,使这两个多角形重合。

以上普通多边形的许瓦尔兹-克利斯托夫变换式(5.6.4)是远不能满足实际问题的条件与要求的。比如有时我们选取∞作为多角形的一个顶点的象。另外还有 $z$ 面上的广义多角形的情形。此时变换式(5.6.4)必须作相应的调整。

(1)当 $x_i=\infty$

此时,只需去掉相应的因子 $(z-x_i)^{\frac{\alpha_i}{\pi}-1}$,则变换为

$$w=c\int_{z_1}^{z}(z-x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(z-x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1}\cdots(z-x_{i-1})^{\frac{\alpha_{i-1}}{\pi}-1}(z-x_{i+1})^{\frac{\alpha_{i+1}}{\pi}-1}\cdots(z-x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}\mathrm{d}z+c_1 \tag{5.6.6}$$

由于变换式(5.6.5)中被积函数比(5.6.4)减少了一个因子 $(z-x_i)^{\frac{\alpha_i}{\pi}-1}$,因此求原函数的过程将被简化。在实际应用中,可以利用以上积分简化许瓦尔兹-克利斯托夫变换。

(2)变态多角形的情形

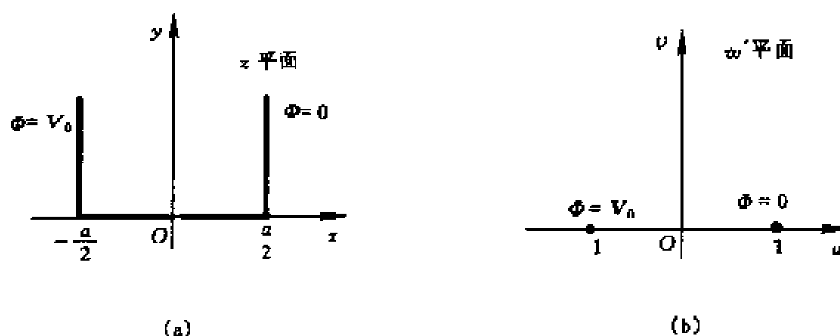
在实际问题中,我们经常遇到的多角形是变态多角形,也就是说,它的顶点有一个或多个在无穷远。对于已知的变态多角形,许瓦尔兹-克利斯托夫变换式(5.6.4)仍然有效,只需把顶点在无穷远处的那两条直线的交角,用这两条直线在有限点处的那个交角反号代替。

**例 5.22** 有两块一端变成直角形的导体板,中间有一小缝,如图 5-31(a)所示。设导体板在 $y$ 轴和 $z$ 轴方向的长度远大于两导体板间的距离 $a$,左导体电位为 $V_0$,右边导体接地。求两板间电位分布。

**解** 这是一个广义三角形,取如下的许瓦尔兹变换:

$$z=k\int(w'+1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1}(w'-1)^{\frac{\pi/2}{\pi}-1}\mathrm{d}w'+c_1=k\int\frac{\mathrm{d}w'}{\sqrt{w'^2-1}}+c_1=k\,\mathrm{arccosh}\,w'+c_1$$

由 $z=0,w'=0$ 及 $z=a/2,w'=1$,得




(a)　　　　(b)

图 5 31　例 5.22 图

$$c_1 = \frac{a}{2}, \quad k = \mathrm{j}\frac{a}{\pi}$$

故

$$z = \mathrm{j}\frac{a}{\pi}\operatorname{arccosh} w' + \frac{a}{2}$$

或

$$w' = \cosh\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{a}z + \mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right)$$

容易找到在 $w'$平面上的复电位为

$$w = \frac{V_0}{\pi}\ln w'$$

$w$ 的虚部代表电位函数。于是在 $z$ 平面上

$$w = \frac{V_0}{\pi}\ln\left(\sin\frac{\pi}{a}z\right)$$

因此,电位

$$\Phi = \frac{V_0}{\pi}\mathrm{Im}\left[\ln\left(\sin\frac{\pi}{a}x\cosh\frac{\pi}{a}y + \mathrm{j}\cos\frac{\pi}{a}x\cosh\frac{\pi}{a}y\right)\right]$$

$$= \frac{V_0}{\pi}\operatorname{arctanh}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{a}x\cosh\frac{\pi}{a}y}{\sin\frac{\pi}{a}\sinh\frac{\pi}{a}y}\right) = \frac{V_0}{\pi}\operatorname{arctanh}\left(\cot\frac{\pi}{a}x\tanh\frac{\pi}{a}y\right)$$

## *5.7　格林函数法

格林函数法是求解非齐次二阶偏微分方程的得力方法。它属于积分方程法,即通过求解关于待求函数的积分方程来获得微分方程的解答。得到的解式为积分形式。与此相对照,分离变量法是求解微分方程,得到的解式为级数形式。

为了介绍这种方法,首先需要回顾一种广义函数——狄拉克 $\delta$ 函数。

### 一、$\delta$ 函数的性质

令 $\boldsymbol{r}$ 和$\boldsymbol{r}'$分别表示场点和源点的位置矢量,$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$(参看图 1-21),则

$$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \begin{cases} \infty & (\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}') \\ 0 & (\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}') \end{cases}$$

或写为 $\delta(R)=\begin{cases}\infty & (R=0)\\ 0 & (R\neq 0)\end{cases}$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\begin{cases}\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') & \text{(直角坐标系)}\\ \dfrac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z') & \text{(圆柱坐标系)}\\ \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi') & \text{(球坐标系)}\end{cases} \tag{5.7.1}$$

$\delta$ 函数有如下性质：

$$\int_\tau \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau=\begin{cases}1 & (\boldsymbol{r}'\text{ 点在 }\tau\text{ 内})\\ 0 & (\boldsymbol{r}'\text{ 点在 }\tau\text{ 外})\end{cases} \tag{5.7.2}$$

$$f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=f(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{5.7.3}$$

$$\int_\tau f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau=\begin{cases}f(\boldsymbol{r}') & (\boldsymbol{r}'\text{ 点在 }\tau\text{ 内})\\ 0 & (\boldsymbol{r}'\text{ 点在 }\tau\text{ 外})\end{cases}\quad (\delta\text{ 函数的取样特性}) \tag{5.7.4}$$

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\quad (\delta\text{ 函数对于场点和源点的对称性}) \tag{5.7.5}$$

## 二、点电荷的 $\delta$ 函数表示　格林函数

点电荷的数学模型是一个体积无限小($\tau_0\to 0$)而密度($\rho_\infty$)无限大，$\rho_\infty\tau_0=q$ 的电荷，这恰如 $\delta$ 函数的图像。如果我们把位于 $\boldsymbol{r}'$ 的点电荷表示为 $q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$，就可把这种不连续的电荷分布在数学形式上"连续化"。于是，点电荷的位场 $\psi$ 在包含 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 点在内的区域中满足如下的泊松方程：

$$\nabla^2\Psi=-\frac{\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\varepsilon}$$

可见，$\delta$ 函数的引入使点电荷的位场可以像连续分布电荷的位场一样地处理。如若不引入 $\delta$ 函数，就只有挖去奇点(点电荷所在的 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 点)，在 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'$ 的区域中求解拉普拉斯方程 $\nabla^2\Psi=0$。

我们已知无界空间(或自由空间)中位于 $\boldsymbol{r}'$ 的点电荷 $q=1$ 的位场为 $\Psi=\frac{1}{4\pi\varepsilon R}$($\varepsilon$ 为无限大均匀介质的介电常数)，$\Psi$ 的 $\varepsilon$ 倍

$$G=\varepsilon\Psi=\frac{1}{4\pi R} \tag{5.7.6}$$

就是无界空间的格林函数，所以格林函数可以理解为就是单位点源的位场。用工程术语，格林函数就是系统的冲激响应，在系统理论中相当于系统的转移函数或传递函数(这里的"系统"应理解为媒质和边界都给定的一个空间)。用格林函数法求解的基本思想就相当于把冲激函数(点电荷)同系统的冲激响应(格林函数)相乘，再对源区积分，得到的"总响应"就是泊松方程(5.7.8)的解。

可以证明，(5.7.6)式确是方程

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\text{或}\nabla^2 G(R)=-\delta(R) \tag{5.7.7}$$

的解。当 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}'$，有

$$\nabla^2 G=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial G}{\partial R}\right)=0$$

积分两次得

$$G \quad \frac{C}{R}$$

为了确定常数 $C$，做一个 $R \quad |\boldsymbol{r} \quad \boldsymbol{r}' \quad - R_0$ 的、以源点($\boldsymbol{r}'$)为球心的小球。在球体积 $\tau$ 中对(5.7.7)式的两边进行体积分

$$\int_{\tau} \nabla^2 G \mathrm{d}\tau \quad \int_{\tau} \nabla \cdot (\nabla G) \mathrm{d}\tau \quad \oint_S \nabla G \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad \int_{\tau} \delta(R) \mathrm{d}\tau$$

将 $G(R) \quad \dfrac{C}{R}$ 代入，得

$$\frac{C}{R_0^2} 4\pi R_0^2 \qquad 1$$

$$C - \frac{1}{4\pi}$$

故(5.7.6)式是方程(5.7.7)的解。

对任何非齐次二阶偏微分方程都可定义其相应的格林函数，只须把其非齐次项换成 $\delta$ 函数来求解即可得到。在静态电(磁)场中我们关心的非齐次偏微分方程是泊松方程，在时变场中则是非齐次标量波动方程(参 6.10 节)。

**三、用格林函数法求解泊松方程**

设待解的位函数 $\Phi$ 满足泊松方程

$$\nabla^2 \Phi \qquad \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{5.7.8}$$

则其相应的格林函数 $G$ 应满足式(5.7.7)：

$$\nabla^2 G = -\delta(\boldsymbol{r} \quad \boldsymbol{r}')$$

用 $G$ 乘以(5.7.8)式，$\Phi$ 乘以(5.7.7)式，得

$$G \nabla^2 \Phi - -\frac{\rho G}{\varepsilon}, \quad \Phi \nabla^2 G - \quad \Phi \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$$

把两式相减并在所欲求解的区域 $\tau$ 中积分：

$$\int_{\tau} (G \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 G) \mathrm{d}\tau - \quad \int_{\tau} \frac{\rho G}{\varepsilon} + \int_{\tau} \Phi(\boldsymbol{r}) \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \mathrm{d}\tau$$

把上式左边代入格林定理(2.8.4)并利用 $\delta$ 函数的性质(5.7.3)～(5.7.5)，上式就变为

$$\oint_S \left( G \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) \mathrm{d}S - -\int_{\tau} \frac{\rho G}{\varepsilon} + \Phi(\boldsymbol{r})$$

于是得到泊松方程的积分解式

$$\Phi(\boldsymbol{r}) \quad \int_{\tau} \frac{\rho G}{\varepsilon} + \oint_S \left( G \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) \mathrm{d}S$$

$$\int_{\tau} \frac{\rho(\boldsymbol{r}') G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\varepsilon} \mathrm{d}\tau + \oint_S \left[ G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{r}')}{\partial n} + \Phi(\boldsymbol{r}') \frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n} \right] \mathrm{d}S \tag{5.7.9}$$

上式右边的面积分和体积分就分别是解式的齐次部分 $\Phi_2$ 和非齐次部分 $\Phi_1$。体积分 $\Phi_1$ 代表所论的体积 $\tau$ 中的电荷(如果存在的话)对 $\boldsymbol{r}$ 点电位的贡献，它满足 $\nabla^2 \Phi_1 = -\rho/\varepsilon$；面积分 $\Phi_2$ 代表 $\tau$ 的全部边界面 $S$ 上的源的贡献。$S$ 有时是真实的物理界面，有时只是人为划定的计算表面，此时 $S$ 上的源实际上是 $S$ 之外的源在 $S$ 上的等效源。$\Phi_2$ 满足 $\nabla^2 \Phi_2 = 0$。$\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 的

迭加使 $\Phi$ 在给定的边界条件 $\Phi|_S$ 和 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_S$ 之下满足泊松方程(5.7.8)。

根据 $\rho_S = -\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n}$，(5.7.9)式面积分中的第一项相应于 $S$ 上的面电荷对位值的贡献，而后一项则相应于电偶层(即相距 $l\to 0$ 的两层等密度的异性电荷)对位值的贡献(证明从略)。

(5.7.9)式要求在边界上 $\Phi$ 和 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ 都是已知的。这一要求过高，致使(5.7.9)式不实用。格林函数法的便利在于我们可以通过使 $G$ 满足更简单的、如下的齐次边界条件来消除(5.7.9)式两项面积分中的一项。

当已知的边界条件是 $\Phi|_S$ 时，称为第一类(Dirichlet)边值问题。此时为了消除未知的 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_S$ 项，我们可要求 $G$ 在 $S$ 面上满足齐次边界条件

$$G|_S = 0 \tag{5.7.10}$$

当已知 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_S$ 时，称为第二类(Neumann)边值问题，此时为了消除未知的 $\Phi\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S$ 项，我们可要求 $G$ 在 $S$ 面上满足如下的齐次边界条件：

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S = 0 \tag{5.7.11}$$

当已知的边界条件是 $\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \alpha\Phi = f$，称为第三类边值问题，此时应要求 $\Phi$ 在 $S$ 上满足

$$\left(\frac{\partial G}{\partial n} + \alpha G\right)\Big|_S = 0 \tag{5.7.12}$$

这样，(5.7.9)式的面积分项就会被简化为一项：$\oint_S fG\mathrm{d}S$(推导从略)。

当边界面 $S$ 无限扩大(半径 $R\to\infty$)而包容全空间时，应要求 $G$ 满足有限性条件(即要求 $G$ 在无限远处是正则的，意为 $G$ 减小的速率不低于 $R^{-1}$)：

$$\lim_{R\to\infty} RG = 有限值 \tag{5.7.13}$$

这样，(5.7.9)式的面积分项就会完全消失。满足"边界条件"(5.7.13)的方程(5.7.7)的解就是无界空间的格林函数。

从以上的分析可以看出，只要能根据给定的边值问题类型求出满足相应的简单边界条件(5.7.10)～(5.7.13)的格林函数 $G$，则 $\Phi$ 的积分解式中就没有未知函数了，剩下的就只是积分计算问题。所以，格林函数法的一个首先要解决的问题是如何求出或构造出合乎要求的格林函数。

## 四、构造格林函数的方法

如前所述，由于格林函数可以看作是单位点源的"电位"，因此，在给定的边界条件下求解电位的解析方法：镜像法、分离变量法(本征函数展开法)、复位函数法、保角变换法、积分变换法等等，都可以用来构造格林函数。

我们之所以不直接求解电位函数，而是转而去求解格林函数这种"电位"，就是因为在原问题的边界上，格林函数的边界条件更简单，都是齐次的；而且其场源只是一个单位点电荷(在二维平面场就是一根单位线源)。把格林函数代入积分式(5.7.9)后，积分问题利用计算机数值

计算总是可以解决的。

无界空间中的格林函数就是(5.7.6)式。因为它显然满足条件(5.7.13)。事实上,该条件就是由 $\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon R}$ 导出的:当 $R\to\infty$, $R\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon}$ 为有限值。

有限区域中的某些格林函数可利用静态场边值问题中已解出的电位函数直接写出。例如,我们可以利用由镜像法求出的电位公式直接写出一些第一类边值问题的格林函数。这类格林函数都可以看成是由单位点源的场 $G_1$ 和它的镜像点源的场 $G_2$ 迭加而成的:

$$G=G_1+G_2$$

$G_1$ 和 $G_2$ 相加使得 $G$ 在所论空间 $\tau$ 的边界面 $S$ 上满足第一类边值问题所要求的齐次边界条件:

$$G|_S=(G_1+G_2)|_S=0$$

1. 半空间的格林函数

由图 5-9 及(5.4.1)式(把式中的 $R$ 和 $R'$ 分别用 $R_1$ 和 $R_2$ 代替,以下同此),可直接写出上半空间的格林函数为:

$$G=G_1+G_2=\frac{1}{4\pi R_1}-\frac{1}{4\pi R_2}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{5.7.14}$$

其中

$$R_1=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}$$
$$R_2=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2]^{1/2}$$

2. 球内外空间的格林函数

利用导体球面镜像法的结果(5.4.3)和(5.4.4)式可直接写出:

$$G=G_1+G_2=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{a}{r'R_2}\right) \tag{5.7.15}$$

式中

$$R_1=[r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma]^{1/2}$$
$$R_2=\left[r^2+\left(\frac{a^2}{r'}\right)^2-2r\left(\frac{a^2}{r'}\right)\cos\gamma\right]^{1/2} \tag{5.7.16}$$

我们总是以 $R_1$ 表示场点到单位点源的距离,$R_2$ 表示场点到镜像点源的距离。$r'$ 和 $h'$ 分别表示点源和镜像点源至坐标原点的距离。虽然球内外的 $G$ 公式形式上相同,但是点源和镜像的位置互换了。$r$、$r'$、$R_1$、$R_2$、$\gamma$ 的具体所指,对于球内问题应根据图 5-32(a),而对球外问题应根据图 5-32(b)。

3. 圆柱内外空间的格林函数

根据导体圆柱面镜像法,参看图 5-32b,利用(5.4.6)式或 $r'h'=a^2$,可得

$$G=G_1+G_2=\begin{cases}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R_1}{r'-a}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R_2}{a-h'} & (\text{圆柱外})\\ -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R_1}{a-r'}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R_2}{h'-a} & (\text{圆柱内})\end{cases}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R_2r'}{R_1a} \tag{5.7.17}$$

对于圆柱内、外的问题,仍应分别根据图 5-32(a)、(b)来理解 $R_1$、$R_2$、$r$、$r'$ 的含义,$R_1$、$R_2$ 也仍按(5.7.16)式计算,但此时单位点源变成了单位线源,图 5-32 表示的是平行平面场,$R_1$、$R_2$、$r$、$r'$ 也都代表的是二维平面上的距离。

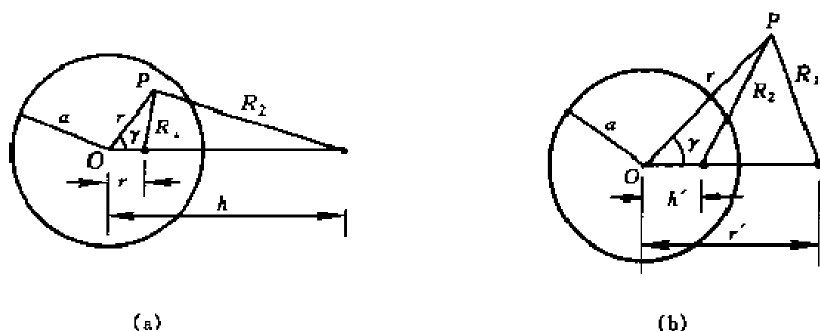



图 5-32　格林函数中各参数的含义

(a)球(圆柱)内问题,(b)球(圆柱)外问题。

4. 二维的半空间的格林函数

当图 5-11 中线电荷密度为 $\lambda = 1$ c/m时,(5.4.2)式所表示的无限大平面上方的位函数的 $\epsilon$ 倍就是二维的上半空间的格林函数:

$$G = G_1 + G_2 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_1} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_2} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} \tag{5.7.18}$$

式中

$$R_1 = [(x-x')^2+(y-y')^2]^{1/2}$$

$$R_2 = [(x-x')^2+(y+y')^2]^{1/2} \tag{5.7.19}$$

需要指出,虽然上面我们求格林函数时利用的是导体表面的镜像法,但并不意味着只能解决边界面 $S$ 是导体的问题。$S$ 也可以是其他的物理表面,或仅只是一个计算表面。我们是出于简化积分算式(5.7.9)的需要而人为地按照 $G|_S = 0$ 的齐次边界要求来构造格林函数。

**例 5.23**　求证半径为 $a$ 的球内的点电荷 $q$ 在球面 $S$ 上的电位平均值为 $\frac{q}{4\pi\epsilon a}$(球外无电荷)。

**证**　这是一个球内问题。参阅图 5-32(a),令点源位置 $r' = h$,利用球内第一类边值问题的格林函数(5.7.15)和消去了 $G\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ 项的(5.7.9)式,得球心电位为

$$\frac{q}{4\pi\epsilon h} = \int_\tau \frac{\rho}{\epsilon}\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{a}{hR_2}\right)\mathrm{d}\tau - \oint_S \Phi\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S$$

因 $\tau$ 为球内空间,故 $S$ 上的外法线为 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_r$。因上式中的场点为球心 $O$ 点,故 $r = 0$。对 $S$ 上的面源而言,$r' = a$ 于是,根据(5.7.16)式在球面 $S$ 上就有

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r'}\bigg|_S = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r'}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{a}{r'R_2}\right)\bigg|_{r'=a} = \frac{r^2-a^2}{4\pi a(r^2+a^2-2ra\cos\gamma)^{3/2}}\bigg|_{r=0} = -\frac{1}{4\pi a^2}$$

因场点 $O$ 的 $r = 0$,源点 $P$ 的 $r' = h$,故

$$R_1 = (r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma)^{1/2} = r' = h$$

$$R_2 = \left[r^2+\left(\frac{a^2}{r'}\right)^2-2r\left(\frac{a^2}{r'}\right)\cos\gamma\right]^{1/2} = \frac{a^2}{r'} = \frac{a^2}{h}$$

又

$$\frac{a}{hR_2} = \frac{1}{a}\qquad \int \rho\mathrm{d}\tau = q$$

因而

$$\frac{q}{4\pi\epsilon h} = \frac{q}{\epsilon}\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{a}\right)+\oint_S\frac{\Phi}{4\pi a^2}\mathrm{d}S$$

球面上电位的平均值为

$$\frac{1}{4\pi a^2}\oint_S \Phi \mathrm{d}S - \frac{q}{4\pi\varepsilon a}$$

**例 5.24** 已知半径为 $a$ 的无限长圆柱面上电位为 $\Phi_S = \Phi(a,\varphi)$，求此圆柱内外的电位分布。

**解** 圆柱内外的格林函数形式上都是(5.7.17)：

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = G(\rho,\rho') = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{a(\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\gamma)^{1/2}}{\rho'\left[\rho^2+\left(\frac{a^2}{\rho'}\right)^2-2\rho\frac{a^2}{\rho'}\cos\gamma\right]^{1/2}}$$

当 $\rho<a$ 时 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}_\rho$，而 $\rho>a$ 时 $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{a}_\rho$，故

$$\frac{\partial G}{\partial n_S} = \pm\frac{\partial G}{\partial \rho'}\bigg|_{\rho'=a} = \mp\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos\gamma} \qquad \begin{cases}\rho<a: -\\ \rho>a: +\end{cases}$$

由于圆柱内外无电荷，故由(5.7.9)式得

$$\Phi(\rho,\varphi) = \mp\oint_S \frac{\partial G}{\partial n}\Phi(a,\varphi')\mathrm{d}S = \mp\,\varepsilon_0\oint\frac{\partial G}{\partial n}\Phi(a,\varphi')\mathrm{d}l'$$

$$= \pm\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-\rho^2)\Phi(a,\varphi')}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos\gamma}\mathrm{d}\varphi' \qquad \begin{cases}\rho<a: +\\ \rho>a: -\end{cases}$$

上式第二个等号是由于我们把 $S$ 取为单位长的圆柱表面。

由于 $\Phi(a,\varphi)$ 可以是任意函数形式，这一结果可用来计算柱面电位为任意的二维分布时空间各点的电位。例如曾用分离变量法求解的 5.4 例，也可用上式来计算。

**例 5.25** 如图 5-33 的无限大导体平板 $y=0$ 中间沿 $z$ 轴有一细缝将导体板一分为二。两板之间加电压 $U_0$，利用格林函数求空间电位分布。

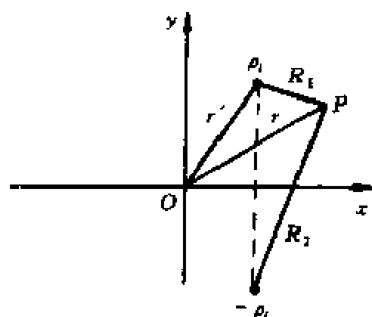


图 5-33 例 5.25 图

**解** 这是二维的半空间的问题。把(5.7.19)代入(5.7.18)式可得

$$G = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}$$

因为所论区域 $\tau$ 为上半空间，故界面上 $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{a}_y$

$$\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_S = -\frac{\partial G}{\partial y'}\bigg|_{y'=0} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{-2(y-y')}{(x-x')^2+(y-y')^2}-\frac{2(y+y')}{(x-x')^2+(y+y')^2}\right]_{y'=0}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-x')^2+y^2}$$

因 $\tau$ 中无电荷，故按照(5.7.9)式有

$$\Phi(x,y) = -\oint_S \Phi(x',0)\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S = -\int_{-\infty}^{0} U_0\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}x' - \int_0^{\infty} 0\cdot\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}x'$$

$$= \frac{U_0}{\pi}\theta \quad \left(\theta = \arctan\frac{y}{x}\right)$$

**例 5.26** 对于例 5.3 的矩形管内部空间，试求第一类边值问题的格林函数。

**解** 例 5.3 中求解的恰是矩形管壁上电位皆为零时内部空间的一根线源产生的电位。因此，只需在 $\Phi$ 的解式中令线电荷密度 $\lambda=1$，并乘以 $\varepsilon_0$，得到的就是所求的格林函数：

$$G(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y_0}{b}}{n\sinh\frac{n\pi a}{b}}\begin{cases}\sinh\frac{n\pi}{b}(a-x_0)\sinh\frac{n\pi}{b}x & (0\leqslant x<x_0)\\ \sinh\frac{n\pi x_0}{b}\sinh\frac{n\pi}{b}(a-x) & (x_0\leqslant x<a)\end{cases}$$

综上所述，格林函数法的基本思想是：先求得场点对单位点源的响应，再对源区积分，迭加出场点对所有源的总响应。利用格林函数建立的泊松方程的积分解式(5.7.9)不受坐标系的限制，物理含义显明，具有普遍意义，而且格林函数可用多种数理方法来构造。格林函数的用途主要是用来建立积分方程，而积分方程便于用数值方法计算，计算机技术的高度发展又使繁重的数值计算不成为问题。所有这些优点，使格林函数法获得了广泛应用。

## 5.8 有限差分法

前面我们讨论的分离变量法、镜像法、复位函数法等都是求解边值问题的解析方法。解析方法要求问题的边界形状规则，即能与某种坐标系的方向保持一致，实际上大多数的工程问题并不能满足这种条件。对于不规则边界的问题，只能用近似方法求解。本节我们简略介绍有限差分法这种求近似解的数值方法。

有限差分法是一种较为容易应用的数值法。其基本思想是把求解的区域划分成网格，将区域内连续的场分布，用网格节点上离散的数值解代替，当网格划分得越细时，离散数值解就越接近真实解。以下我们介绍用正方形网格求解二维平面场的情形。

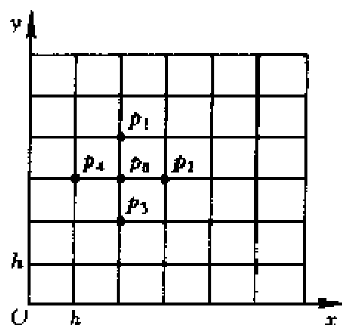


图 5.34

如图5.34所示，将求解区域划分成正方形网格，每个格子的边长都是 $h$。设某点 $P_0$ 的电位为 $\Phi_0$，其周围网格节点 $P_1$，$P_2$，$P_3$ 和 $P_4$ 的电位分别为 $\Phi_1$、$\Phi_2$、$\Phi_3$ 和 $\Phi_4$。下面我们来推导这些点的电位之间的近似关系。为此，假设电位函数 $\Phi(x,y)$ 在二维平面上满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\Phi(x,y)=0$$

利用泰勒级数将电位函数 $\Phi(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点附近近似展开为

$$\Phi(x_0+h,y_0)\approx\Phi_0+h\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\tag{5.8.1}$$

$$\Phi(x_0-h,y_0)\approx\Phi_0-h\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\tag{5.8.2}$$

以上两式相加得到

$$\Phi(x_0+h,y_0)+\Phi(x_0-h,y_0)\approx2\Phi_0+h^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\tag{5.8.3}$$

类似地可以得到

$$\Phi(x_0,y_0+h)+\Phi(x_0,y_0-h)\approx2\Phi_0+h^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\tag{5.8.4}$$

再将上述两式相加，有

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\approx\frac{1}{h^2}[\Phi(x_0+h,y_0)+\Phi(x_0-h,y_0)+\Phi(x_0,y_0+h)+\Phi(x_0,y_0-h)-4\Phi(x_0,y_0)]$$

由于已经假定

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=0$$

所以,我们最后得到

$$\Phi(x_0,y_0)=\frac{1}{4}[\Phi(x_0+h,y_0)+\Phi(x_0-h,y_0)+\Phi(x_0,y_0+h)+\Phi(x_0,y_0-h)] \tag{5.8.5}$$

式(5.8.5)表明,拉普拉斯方程在某点$(x_0,y_0)$的近似解是四个邻点值的平均值。

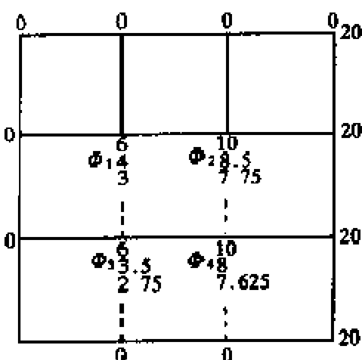


图 5-35 求拉普拉斯方程近似解

现在举例说明应用式(5.8.5)来求解拉普拉斯方程近似解的过程。如图 5-35 所示,边界条件已经在图上标出,并将场域划分为 9 个小的正方形网格,共有 12 个边界节点和四个内点。边界上节点的电位由边界条件给定,而内点的电位可利用迭代法由式(5.8.5)求出。为此,根据内点的位置首先假定各内点的初始电位值 $\Phi_1=\Phi_3=6,\Phi_2=\Phi_4=10$,这些假定值都已列出。

接着是根据这些假定的初始值,利用式(5.8.5)来计算 $\Phi_1$、$\Phi_2$、$\Phi_3$ 和 $\Phi_4$ 的改进值,分别记为 $\Phi_1^1$、$\Phi_2^1$、$\Phi_3^1$ 和 $\Phi_4^1$,即

$$\Phi_1^1=\frac{1}{4}(0+0+10+6)=4$$

$$\Phi_2^1=\frac{1}{4}(4+0+20+10)=8.5$$

$$\Phi_3^1=\frac{1}{4}(0+4+10+0)=3.5$$

$$\Phi_4^1=\frac{1}{4}(3.5+8.5+20+0)=8$$

以上电位值即为第一次迭代结果,它们应该比假定值更接近真实值。再进行一次类似的迭代过程,可得到更加精确的结果,记为 $\Phi_1^2$、$\Phi_2^2$、$\Phi_3^2$ 和 $\Phi_4^2$,它们分别是

$$\Phi_1^2=\frac{1}{4}(0+0+8.5+3.5)=3$$

$$\Phi_2^2=\frac{1}{4}(3+0+20+8)=7.75$$

$$\Phi_3^2=\frac{1}{4}(0+3+8+0)=2.75$$

$$\Phi_4^2=\frac{1}{4}(2.75+7.75+20+0)=7.625$$

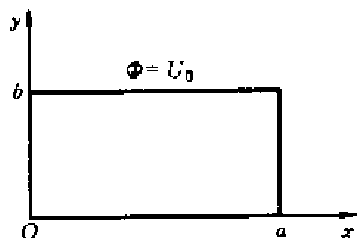
我们可以看出，第二次迭代的结果与第一次的差别在减少，也即是在进一步接近电位函数的真实值。反复进行以上的迭代过程，迭代结果同前一次的值就越来越接近，即与真实值越来越接近了。经过有限次的迭代过程，前后两次的迭代值总是可以达到我们所要求的误差范围。

实际工作中,都是采用计算机来完成迭代计算的,因此我们可以将电位函数的区域分得更细,设定一个允许的误差范围,就能得到更加精确的电位数值解。

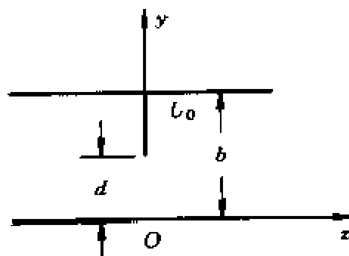
# 习 题 5

5.1　如题5.1图所示，有一长方形的导体槽，设槽的长度为无限长，槽上有一块与槽相绝缘的盖板，槽的电位为零，盖板的电位为 $U_0$，求槽内的电位分布。

5.2　如题5.2图所示，两相互平行的无限大导体平面，相距为 $b$，它们之间有一厚度可视为零的导体薄片，尺寸由 $y=d$ 到 $y=b(-\infty<x<\infty)$。薄片与上板相接触，且电位为 $U_0$，下板的电位为零。求板间电位函数。设薄片上的电位按线性变化，$\Phi=U_0y/d$。




题 5.1图

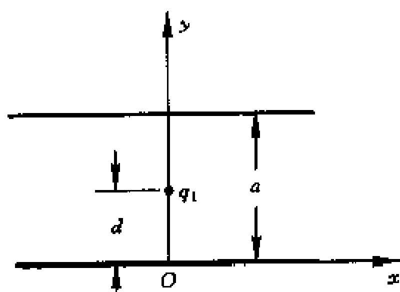



题 5.2图

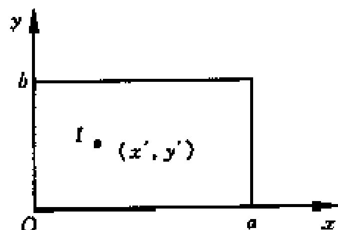
5.3　如题5.3图所示，两相互平行的无限大导体平面，相距为 $a$，它们之间有一与 $z$ 轴平行的线电荷 $q_1$(C/m)，位于$(0,d)$处。求板间电位函数。

提示：把 $x=0$ 的平面当作分界面，分别求两个区域的解，然后在分界面上匹配边界条件。在 $x=0$ 处的边界条件为

$$\Phi_1=\Phi_2,\quad -\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}=\frac{q_1}{\varepsilon_0}\delta(y-d)$$




题 5.3图




题 5.4图

5.4　如题5.4图所示，有一矩形槽，槽的电位为零。槽中有一与槽平行的线电荷1 C/m，求槽内电位函数。

5.5　$z$ 方向无限长的矩形横截面场域，如题5.5图所示。域内无空间电荷分布。已知边界条件如下：

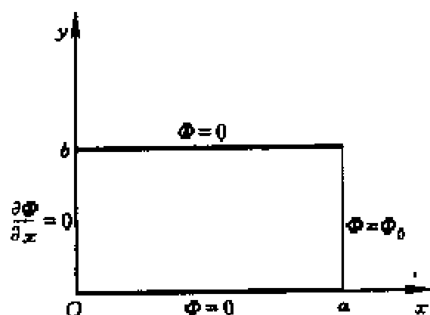
①在 $y=0(0<x<a)$处，$\Phi=0$；

②在 $y=b(0<x<a)$处，$\Phi=0$；

③在 $x=0(0<y<b)$处，$\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=0$；

④在 $x=a(0<y<b)$处，$\Phi=\Phi_0$。

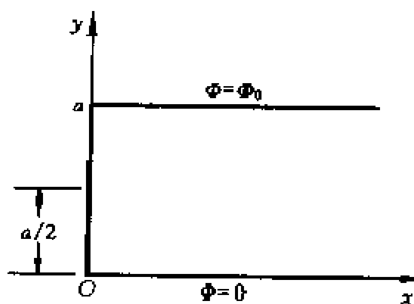
求场域内电位分布。




题 5.5图

5.6　两块相互平行的半无穷大导电平板，板间距离为 $a$。

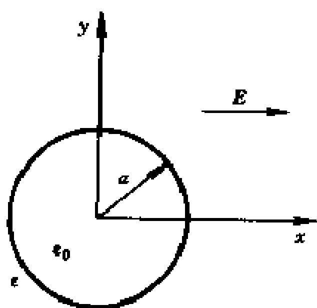
在同一端各取 $a/2$ 长，折成直角，将板相对，并设中间留有一极窄的绝缘间隙，其横界面形状如题 5.6 图所示。域内无空间电荷分布。已知上板电位为 $\Phi_0$，下板电位为 0。求板间电位分布。



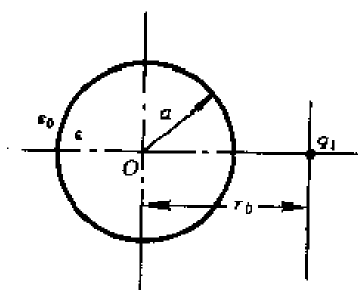

题 5.6 图

5.7 在均匀电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_x E_0$ 中垂直于电场方向放置一导体圆柱，圆柱半径为 $a$。设导体放入前，导体轴线所在位置的电位为零。导体单位长总电荷为零。导体外空间无电荷分布。求圆柱外的电位函数和电场强度。

5.8 在一电容率为 $\varepsilon$ 的无限大介质中沿 $z$ 方向开一个半径为 $a$ 的圆柱形空腔。如题 5.8 图，沿 $x$ 方向加一均匀电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_x E_0$。求空腔内、外的电位分布。




题 5.8 图

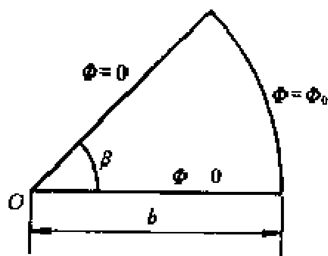



题 5.9 图

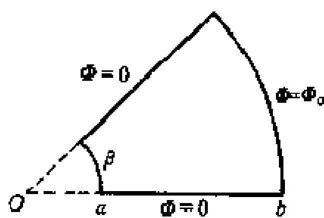
5.9 如题 5.9 图所示，一无限长介质圆柱，在距离轴线 $r_0(r_0>a)$ 处，有一与圆柱平行的线电荷 $q_l$(C/m)。计算空间各部分的电位函数。

5.10 一无限长柱形空间的横截面为扇形，扇形的圆心角为 $\beta$，扇形的圆弧半径为 $b$，见题 5.10 图，柱形空间内无空间电荷分布。场沿柱的轴线方向不变。已知外圆柱面电位为 $\Phi_0$，两侧面电位为零。求此柱形空间内的电位分布。

5.11 一无限长柱形空间的横截面为部分圆环，部分圆环的圆心角为 $\beta$。内、外圆弧半径分别为 $a$ 和 $b$，柱形空间内无空间电荷分布，见题 5.11 图。场沿柱的轴线方向不变。已知半径为 $b$ 的外圆柱面电位为 $\Phi_0$，内圆柱面和两侧面电位均为零。求此柱形空间内的电位分布。




题 5.10 图

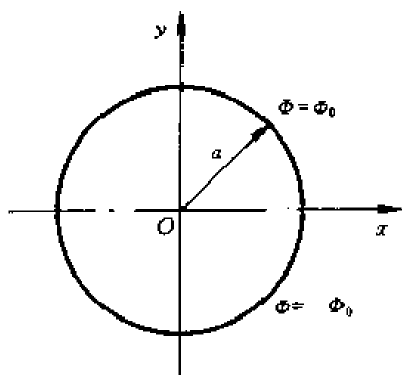



题 5.11 图

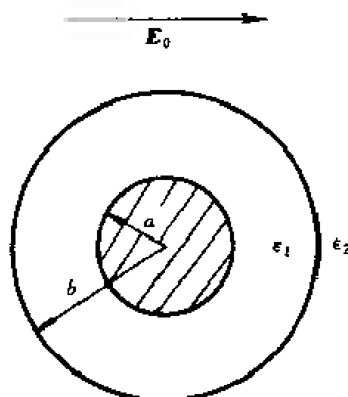
5.12 一半径为 $a$ 的无限长直薄导体圆管沿轴线剖分成两部分，两部分互相绝缘又紧密相近，如题 5.12 图所示。上半部分电位为 $\Phi_0$，下半部分电位为 $-\Phi_0$。空间无电荷分布。求导体管内、外空间的电位分布。

5.13 在均匀外电场中，垂直于电场方向放置一无限长的外包介质层的圆柱形导体，见题 5.13 图。导体的半径为 $a$，介质层的外半径为 $b$。设导体放入前，导体轴线所在位置的电位为零。介质层的介电常数为 $\varepsilon_1$，介质层外部区域的介电常数为 $\varepsilon_2$。均匀电场的电场强度为 $\boldsymbol{E}=$

$E_0 \boldsymbol{a}_x$。导体单位长度的总电荷为零。导体外无自由电荷分布。求介质层内、外区域电位。



题 5.12图



题 5.13图

5.14 一内半径为 $a$ 的半无穷长金属圆筒,金属筒底与圆筒之间有一无穷窄的绝缘。已知筒底电位为 $\Phi_0$,圆筒电位为 0。筒内无空间电荷分布。求圆筒内的电位函数。

5.15 在均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中放入半径为 $a$ 的导体球,电场的方向和极轴一致,设

①导体电位为 $U_0$(V);

②导体带电量为 $Q$。

在以上两种情形下计算球外的电位

5.16 在均匀外电场中,放置一个半径为 $a$ 的介质球,均匀外电场的电场强度 $\boldsymbol{E} = E_0 \boldsymbol{a}_z$。球内、外介质的介电常数分别为 $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$,空间无自由电荷分布。介质球放入前,球心处电位为 0。求介质球内、外的电位和电场强度。

5.17 在一个半径为 $a$ 的球面上,给定电位分布 $\Phi(a,\theta) = \Phi_0(1+\cos\theta)$。球内外均无空间电荷分布。求此球面内和球面外的电位函数和。

5.18 一个半径为 $a$ 的介质球被永久极化,具有均匀极化强度 $\boldsymbol{P}$(参见题 2.13 图),求证:

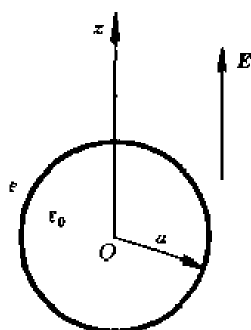
①球内的电场是均匀的,且 $\boldsymbol{D} = \frac{2}{3}\boldsymbol{P}$;

②球外的电场同一个位于球心的电偶极子 $P\tau\left(\tau = \frac{4\pi a^3}{3}\right)$产生的电场相同,且

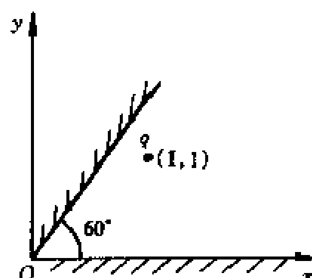
$$\boldsymbol{D} = \frac{P\tau}{4\pi r^3}(\boldsymbol{a}_r 2\cos\theta + \boldsymbol{a}_\theta \sin\theta)$$

(提示:参照例 4.10 的解法。)

5.19 在一电容率为$\varepsilon$的无限大介质中开一个半径为$a$的球形空腔。如题5.19图,沿$z$



题 5.19图



题 5.21图

方向加一均匀电场 $E_0$。求空腔内的电场 $\boldsymbol{E}$ 和空腔表面的极化电荷密度。(提示:参考例 4.10 或习题 5.18 的解法)

5.20 一点电荷 $q$ 与无限大导体平面距离为 $d$,试计算将此点电荷移到无穷远处,所需作的功?

5.21 一点电荷 $q$ 放在 $60^\circ$ 的导体角内的 $x=1, y=1$ 点,如题 5.21 图所示。求 $x=2$, $y=1$ 点的电位。

5.22 试证明:点电荷 $q$ 和一个带电量为 $Q$ 的半径为 $R$ 的导体球之间的力是

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q+\frac{Rq}{D}}{D^2}-\frac{Rq}{D\left(D-\frac{R^2}{D}\right)^2}\right]$$

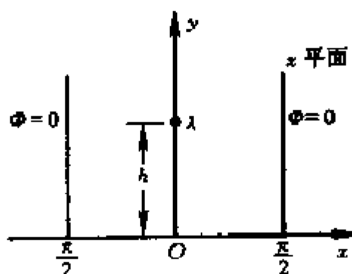
5.23 一与地面平行架设的圆截面导线,半径为 $a$,离地高度为 $h$。试证明导线与地之间单位长度的电容为

$$C=\frac{\pi\varepsilon_0}{\operatorname{arccosh}\left(\frac{h}{a}\right)}$$

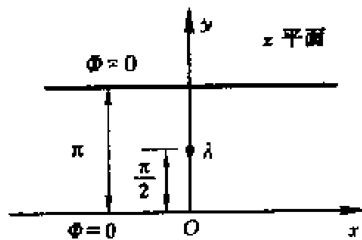
5.24 有一无限大导电平板,中间有一缝隙,将其一分为二,在这两部分之间加上电压 $U_0$,用复电位法求空间电场分布。

5.25 一无限长直线(电荷线密度为 $\lambda$)对称地放置在弯成直角的接地导体平板内侧,导线与平板平行,它们之间的距离为 1 个单位,试求此直角区域内的电位分布。

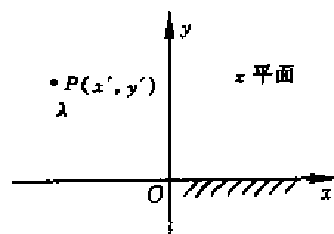
5.26 如题 5.26 图所示,一接地很深的开口槽,宽度为 $\pi$,在其中心线上高为 $h$ 处放置一长直导线,电荷线密度为 $\lambda$,导线与槽的边平行,求此槽内的电位分布。



题 5.26 图



题 5.27 图



题 5.28 图

5.27 如题 5.27 图所示,在两个无限大接地平行板中间放置一根无限长直导线,其电荷线密度为 $\lambda$,求此区域内的电位分布。

5.28 如题 5.28 图所示,在半无限大导体附近 $P(x', y')$ 处放置一长直导线,其电荷线密度为 $\lambda$,求空间的电位分布,并求当 $x'=-a, y'=0$ 时,导体表面上的感应电荷分布。

* 5.29 试证:在无电荷的区域中,任何一点的电位值等于以该点为球心的任一球面上的电位的平均值。

* 5.30 已知一半径为 $a$ 的球面上电位为 $U(\theta, \Phi)$,求此球内部的电位分布。

5.31 用格林函数法重解例 5.4。

5.32 试求出图 5.14 所示的上半空间中半球外部的第一类边值问题的格林函数。

# 第6章　时变电磁场　电磁波

迄今为止我们所研究的电场和磁场可用如下四个基本方程来描述

$$\left.\begin{array}{ll}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0 & \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\ \nabla\times\boldsymbol{E}=0 & \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}\end{array}\right\}\tag{6.1.1}$$

从这个方程组看,电场和磁场是彼此无关的。所以,即使对于静电场和静磁场同时存在的情况,例如由恒定电流产生的场,我们也是分开讨论的。这是静态场的情况。而时变的电荷、电流将产生时变的场。麦克斯韦根据法拉第电磁感应定律提出的涡旋电场假说表明变化的磁场会激发电场,他进而提出的位移电流假说又表明变化的电场会激发磁场;电场和磁场将相互为源,不再是可分的了。

既然这种相互作用是由于场的时变而发生的,那么相互作用的程度就取决于时变的快慢。对于缓变场或准静态场,电(磁)场的源还主要是电荷(电流),场强的分布仍主要由基于库仑定律、比奥-沙伐定律的方程组(6.1.1)所描述。对于变化越迅速的场,电场和磁场由相互感应而激发出的场越强。这种感应场将不可能完全由(6.1.1)中的方程所描述。

上述的两个假说直接导致了著名的麦克斯韦方程组。它对宏观电磁场的运动规律作出了完整的概括,是从牛顿力学直到爱因斯坦相对论的提出这段时期中物理学史上最重要的理论成果。以麦克斯韦方程组为核心的经典电磁理论已成为研究宏观电磁现象和现代工程电磁问题的基础。

本章首先介绍了麦克斯韦的涡旋电场、位移电流假说,并由此导出了麦克斯韦方程组和它在电磁边界上的形式;然后介绍了最基本、最常见的时变场——时谐场及其复数表示法以及反映电磁能量流动规律的玻印廷定理;由麦克斯韦方程组又进一步导出了场量的波动方程以及位函数的波动方程,并介绍了电磁波的一般概念。在本章的最后几节详细介绍了求解齐次和非齐次标量波动方程的解析方法。它们是学习平面波、导行波和天线辐射场的数学基础;最后,简单介绍了在时域直接求解麦克斯韦方程组的数值方法。

## 6.1　电磁感应　涡旋电场

在奥斯特发现电流的磁效应的启发下,法拉第经过近十年的大量实验,终于发现了电磁感应定律。参看图6-1,一个空间导电回路 $C$ 所包围的磁通 $\Phi$ 由于某种原因发生变化时,回路 $C$ 中会感应出电流 $i$,说明回路中感应(induce)出了电动势 $e$(也称为反电动势 $e$)。法拉第总结出 $e$ 和 $\Phi$ 之间的数量关系为

$$e=-\frac{\partial\Phi}{\partial t}\tag{6.1.2}$$

这就是法拉第电磁感应定律。式中的负号表示感应电动势的方向总是使感生电流的磁场阻碍产生它的磁通变化(楞次定律)。

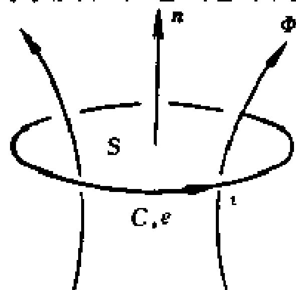


图6-1　电磁感应定律中的正方向规定

$e$ 的正方向和 $C$ 的绕行方向一致。磁感应 $\boldsymbol{B}$ 的正方向规定与此无

关,是任意的。但是,按 1.3 节中开曲面 $S$ 的法线规定,$C$、$e$ 的正方向同 $\boldsymbol{n}$ 的正方向构成右旋关系,因而也必然同穿过 $S$ 的磁通 $\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 的正方向构成右旋关系。

麦克斯韦提出的感应电场或涡旋电场假说更进一步指出了电磁感应现象的实质:是变化的磁通在它所在的空间中感应出了连续存在的涡旋电场(记为 $\boldsymbol{E}$),它与导体回路是否存在无关。导体回路只不过使我们感觉到这个电场的存在。因而,对于这个空间中任取的闭合曲线 $C$,都应有

$$e=\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{6.1.3}$$

感应电动势不过是这个涡旋电场的环量。这正如 3.2 节中指出的:电动势等于非保守场(局外场)的环量。此处的非保守场就是涡旋电场。如果媒质是导电的,这个涡旋电场就将引起涡旋电流(例如铁心中的"涡流")。(6.1.3)式可进一步写成如下形式:

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{6.1.4}$$

因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 放在积分号之外,(6.1.4)式是个普遍适用的表达式,包括了使磁通变化的所有时变因素。下面我们把这个一般表达式作进一步的分解。

为了不失一般性地计入产生 $e$ 的所有各种因素,须假设回路 $C$ 对于磁场是有相对运动的(这个运动可能是一个假想的闭合曲线 $C$ 所在的媒质或系统在相对于磁场运动,也可能是一个导体回路 $C$ 本身在移动、转动、变形……),$C$ 上各点的速度可以不同,且 $\boldsymbol{v}$ 也可以是时变的。

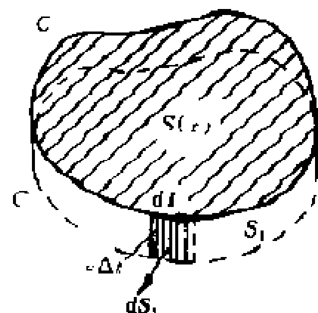


图 6-2 运动回路 $C$ 中 $e$ 的计算

设 $t$ 和 $t+\Delta t$ 时刻回路的位置分别如图 6-2 中的 $C$ 和 $C'$ 所示。$C$ 所包围的曲面 $S(t)$ 在 $t+\Delta t$ 时刻扩张为最终边线 $C'$ 包围的盆形曲面 $S(t+\Delta t)=S+S_1$,$S_1$ 为边线 $C$ 在 $\Delta t$ 时间内扫过的面积(它是位于 $C$ 和 $C'$ 之间的环状带),$S_1$ 上的一个由速度为 $\boldsymbol{v}(t)$ 的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在 $\Delta t$ 时间内扫过的面元就是图中阴影所示的 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1$:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1=(\boldsymbol{v}\Delta t)\times\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{6.1.5}$$

该面元矢量的方向是按照 1.3 节中的规定:开表面上所有的面元法线的指向应同开表面的边线走向成右旋关系,于是在图 6-2 所示的情况下,"盆壁"$S_1$ 上的面元矢量应同"盆底"$S(t)$ 上的面元一样指向盆外(若 $\boldsymbol{v}$ 反向,则是指向盆内)。

利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{B}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$(读者不难自证),可得

$$e=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_S \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}-\int_S \boldsymbol{B}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) \tag{6.1.6}$$

上式右边第二项实际上是 $\boldsymbol{B}$ 保持着 $t$ 时刻的值 $\boldsymbol{B}(t)$ 不变而仅仅由于积分曲面 $S(t)$ 变为 $S(t+\Delta t)$ 所引起的磁通变化率 $\frac{\Delta\Phi_s}{\Delta t}$ 的极限,其中 $\Delta\Phi_s$ 正是穿过侧壁 $S_1$ 的磁通量,显然它应按 $t$ 时刻的值 $\boldsymbol{B}(t)$ 来计算:

$$\Delta\Phi_s=\int_{S_1}\boldsymbol{B}(t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1=\oint_C \boldsymbol{B}\cdot[(\boldsymbol{v}\Delta t)\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}]=\Delta t\oint_C(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$\oint_C(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\Delta\Phi_s}{\Delta t}=\frac{\int_{S_1}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1}{\Delta t}=\frac{\Delta\left[\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right]}{\Delta t}$$

$$\int_S \boldsymbol{B} \cdot \frac{\Delta(\mathrm{d}\boldsymbol{S})}{\Delta t} \to \int_S \boldsymbol{B} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}) \quad (\Delta t \to 0))$$

上式的后两个等号是考虑到面积增量 $S_1$ 是 $S$ 上的各个面元 $\mathrm{d}S$ 扩张的结果 把上式代入(6.1.6)式,就有

$$e = -\int_S \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = e + e \qquad (6.1.7)$$

(6.1.7)式表明,运动回路中的感应电动势可以看成是两部分组成的:一部分是单纯由磁场的变化感生的,通常也称为感生电动势($e_n$);另一部分是单纯由于回路的运动产生的,通常也称为动生电动势($e_v$) (6.1.7)式也可写成

$$\oint_C \boldsymbol{E}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_C (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (6.1.8)$$

移项得

$$\oint_C (\boldsymbol{E}' - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (\text{积分形式}) \qquad (6.1.9)$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{E}' - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{微分形式}) \qquad (6.1.10)$$

(6.1.9)和(6.1.10)式就是运动系统中用场量表示的法拉第电磁感应定律

在这同一磁场中,如果该系统是相对静止的,则系统中的任一闭合曲线 $C$ 也是静止的,即 $\boldsymbol{v} = 0$;设此时 $C$ 中产生的感应电动势为 $e = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$,按照(6.1.7)式,就应有

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (\text{积分形式}) \qquad (6.1.11)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \qquad (\text{微分形式}) \qquad (6.1.12)$$

这就是静止系统中用场量表示的法拉第电磁感应定律。它表明,当回路 $C$ 静止不动时,其中包围的磁通的变化仅由磁场的变化引起

把(6.1.10)和(6.1.12)式对照,可发现运动系统中的电场多了一项 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}$$

电场力 $q\boldsymbol{E}$ 就是洛仑兹力。在4.1节中我们就曾指出过它本质上是一种电场力,曾称 $\boldsymbol{E}$ 为"动生电场",因为它是只有运动媒质中的电荷才能"感觉"到的电场。对于这一点可解释如下:

先假设磁场是恒定的 设想观察者以运动媒体(或称运动系统)为参照系,随着媒体或系统一起在磁场中运动,则他见到的媒体上的电荷自然是静止的 而静止的电荷是不受磁场力的,但却发现电荷受到了作用力 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$,于是只能认为 $\boldsymbol{F}$ 是一种电场力,其场强为 $\frac{\boldsymbol{F}}{q} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$。如果媒体相对于磁场静止,$\boldsymbol{v} = 0$,当然就观察(检测)不到这个电场。

再考虑磁场是变化的。此时,无论以运动的或静止的媒体为参照系,都能观察到 $\boldsymbol{B}$ 的变化以及由 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$ 所感应出的电场

一个最简单的例子是图6.3所示的在恒定磁场 $\boldsymbol{B}$ 中平动的导体棒 $PQ$ 虽然在实验室中观察(测量)不到动生电场 $\boldsymbol{E}$(即图6.3中的 $\boldsymbol{E}$),却能观察到它的效应:随棒运动的电荷在场强为 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ 的电场的作用下,会在长度为 $l$ 的棒两端积累起数值为 $e = \int_Q^P F \, \mathrm{d}l$ 的电动

势，它在数值上等于被局外场（指动生电场）$\boldsymbol{E}$ 分别搬运到$P$、$Q$端的正负电荷形成的库仑电场（无旋场、保守场）的电压 $U$，而 $U$ 是能够在实验室中测量到的。

我们在图6-3中看到：$PQ$棒中感应电场 $\boldsymbol{E}$、感应电动势 $e$ 的箭矢和表示库仑电场 $\boldsymbol{E}_t$、电压 $U$ 的箭矢的指向正相反，但它们都表示正电荷受力的方向。这与图3-4中电源内的情形类似。

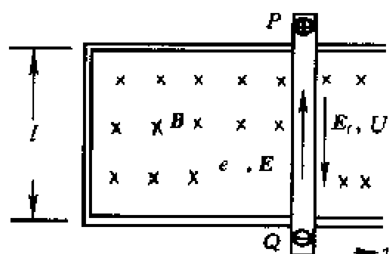


图6-3　垂直于磁场运动的导体棒

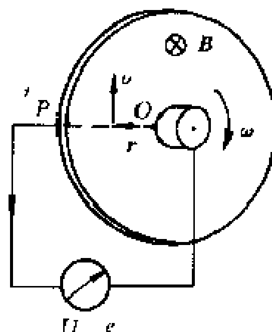


图6-4　法拉第圆盘

又例如图6-4所示的法拉第圆盘（单极发电机），它由一个在恒定磁场 $\boldsymbol{B}$ 中以角速度 $\omega$ 匀速转动的金属盘（半径为 $a$）和外接负载电路构成。这是法拉第最早设计出的一种能实现其"从磁获得电"的愿望的装置。

把 $OP$ 看作一个导体棒（如虚线所示），则棒上距盘中心 $r$ 处的线速度为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_\varphi\omega r$，故 $OP$ 之间积累起的电动势为

$$e=\int_0^P(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_0^a\omega rB\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\omega Ba^2$$

$\frac{1}{2}\omega Ba^2$ 也就是该发电机的输出电压 $U$。这个电压在实验室中是能观测到的。

**例6.1**　一个单匝矩形线框的长、宽分别为 $l$ 和 $w$，置于均匀的时变场 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_yB_0\sin\omega t$ 中。起始时刻线圈平面的法线与 $y$ 轴夹角为 $\alpha$，求下述两种情况下，线圈中的感应电动势：

(1)线圈静止；

(2)线圈以角速度 $\omega$ 绕 $x$ 轴旋转。

**解**　按照图6-5中所示的法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向，线圈的绕行方向和 $e$ 的正方向应是 $P_1\to P_2\to P_3\to P_4$。

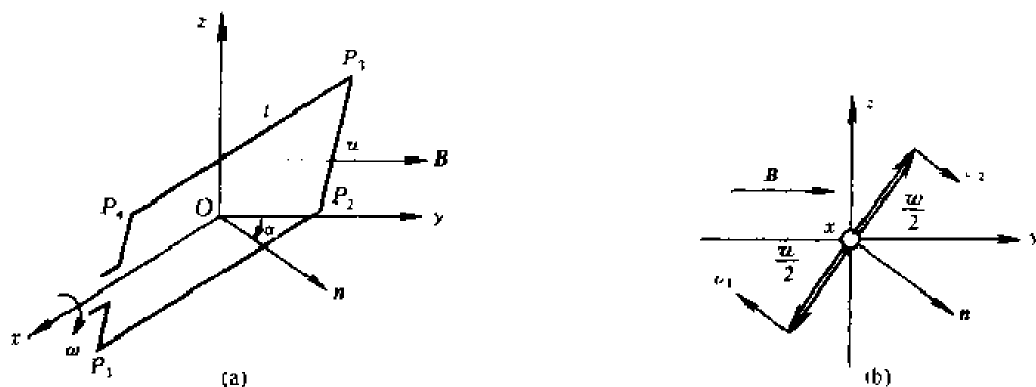


图6-5　在时变磁场中旋转的矩形线圈

(a)立体图，(b)向 $-x$ 轴方向看时的端视图。

(1)　　$$\Phi=\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=SB_0\sin\omega t\cos\alpha$$

故感生电动势为 $$e_m = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega S B_0 \cos\omega t \cos\alpha$$

(2) 方法一、分别计算感生电动势 $e_m$ 和动生电动势 $e_v$。

$e_m$ 已在第(1)问中求出，以下计算 $e_v$。参看图 6-5(b)。因为线框的 $P_2P_3$、$P_4P_1$ 段上 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\perp d\boldsymbol{l}$，故只需计算其余两段上的积分。

$$e_v = \int_{P_1}^{P_2}(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{P_3}^{P_4}(\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$= \int_{-l/2}^{l/2}\left(-\boldsymbol{n}\frac{\omega w}{2}\times\boldsymbol{a}_y B_0\sin\omega t\right)\cdot\boldsymbol{a}_x dx + \int_{l/2}^{-l/2}\left(\boldsymbol{n}\frac{\omega w}{2}\times\boldsymbol{a}_y B_0\sin\omega t\right)\cdot\boldsymbol{a}_x dx$$

$$= 2\frac{\omega w}{2} l B_0\sin\omega t\sin\alpha$$

$$= \omega S B_0 \sin^2\omega t$$

上式中利用了 $\alpha=\omega t$。总的感应电动势为

$$e = e_m + e_v = \omega S B_0(\sin^2\omega t - \cos^2\omega t) = -\omega S B_0\cos 2\omega t$$

$e$ 为正时 $P_4$ 端为高电位。

方法二、利用 $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ 计算

在 $\Phi(t)$ 表达式中，把所有的时变因素全部列出，然后求 $\Phi(t)$ 的时间导数：

$$\Phi(t) = \int_{S(t)}\boldsymbol{B}(t)\cdot\boldsymbol{n}(t)dS = B(t)\cos\alpha(t)S = SB_0\sin\omega t\cos\omega t = \frac{1}{2}SB_0\sin 2\omega t$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\omega S B_0\cos 2\omega t$$

电磁感应现象在超导体中的表现是很典型的。3.2 节中曾提到超导体中可存在持久电流；根据电磁感应定律，这会导致磁悬浮。例如把一根小磁棒丢进一个超导铅碗，二者的相对运动使铅碗中产生感应电流，如图 6-6 所示。感应电流的磁场是抵抗磁棒下落所引起的磁通变化的，因而将对磁棒产生斥力。磁棒越下落，铅碗中感应电流越大；当电流增长到它所产生的磁场的斥力与棒的重力相平衡时，棒就不再下落。铅碗中将持续着这一大小的涡旋电流，从而维持着磁场，形成磁悬浮。若是一般导体，因有电阻，棒还将一直下落，使穿入铅碗的磁通持续变化来感生电动势、克服电阻，才能维持电流。因而磁悬浮现象也是验证超导物质的一个证据。(当然，有实验表明，通常的金属导体电阻足够小时，也能出现轻度的磁悬浮。)反过来，把超导物体置于铁磁体之上，同样会悬浮，例如列车的悬浮。

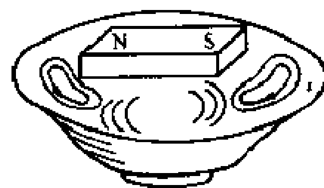


图 6-6 磁棒悬浮于超导铅碗上方

此外，由于超导体内部 $\boldsymbol{E}$ 总为零，根据电磁感应定律，其体内的磁通也不能变化，否则就会感应出反电动势，说明出现了涡旋电场而与 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 矛盾。由此可导出超导体内磁场也必须为零，这是因为在超导体内，变化的磁场会被它感应出的相应大小的电流所产生的相反磁场完全抵消掉。如若不然，未被抵消的变化磁通还会继续感应出反电动势来，加大感应电流，直至磁场被完全抵消。所以，磁力线不能进入超导体。而在超导体外部，超导表面的感应电流的磁场与外磁场迭加，使合成的磁力线总是绕过超导体，如图 6-7 所示。不但如此，即使导体内原来有磁力线，在降温而进入超导状态后，这些磁力线也会被排出体外，这就是 1933 年发现的迈斯纳效应。这说明在向超导体转变的过程中，由于导体内磁通发生变化，在导体上感应出了表面电流，而该电流的磁场完全抵消了导体内原

来的磁场。因此,超导体具有完全的抗磁性,这一特点已被利用来制造电磁推进船等许多装置

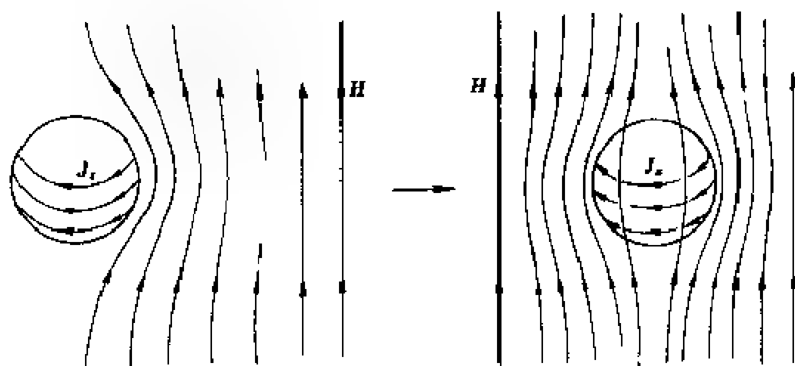



图6-7 超导体样品放入磁场中 超导体的完全抗磁性

上面探讨了产生感应电动势的多种因素。其中,与后续的讨论有关的只是(6.1.8)式中右边的第一项,即回路不动而磁场在变化的情形。因为本书主要研究时变场的分布,电磁波的传播,其基本问题是在给定的区域求解场的方程,而区域中的各种媒质的位置都是固定的。

## 6.2 位移电流 安培定律的推广

变化的磁场能产生电场,变化的电场是否也能产生磁场? 对这一问题的肯定回答是麦克斯韦的又一大贡献。

在恒定磁场中曾指出,安培定律(4.2.10)式中的电流 $I$ 必须能穿过 $C$ 所张的任意曲面,即 $I$ 必须是闭合的;但在时变场中常有电流不闭合的情形,如图 6-8 所示。如果分别按穿过曲面 $S_1$ 和 $S_2$ 的电流来计算,(4.2.10)式中 $\oint_C \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的值应分别是 $\mu_0 i$ 和 0,但同一个线积分的值应是唯一的;并且,实践也证明并未伴随着传导电流 $i_c$ 的缺口而出现 $\boldsymbol{B}$ 的缺口,就好像电容极板间有另外一种电流接替了导线上的传导电流一样。注意到电容器中的电场随着电容的充放电而变化,麦克斯韦大胆地假设这一电场的变化也像电流一样同磁场相联系,并且从理论的要求出发给出了这一联系应有的定量关系:

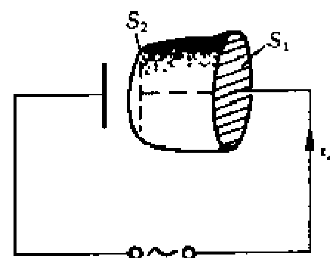



图6-8 交流电路中的电容器

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \Phi_e}{\partial t} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_2}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (6.2.1)$$

其中 $\Phi_e$ 为电通量。按照上式以及高斯定律,应有

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{\mu}_0\int_{S_2}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mu_0\frac{\partial q}{\partial t} = \mu_0 i_c = \mu_0\int_S \boldsymbol{J}_c\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\mu_0\oint_S \boldsymbol{J}_c\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

(上式中 $S$ 是由 $S_1$ 和 $S_2$ 构成的闭合面,因而使 $S_1$ 的法线反向,故上式右端出现负号。)这就解决了对 $S_1$ 和 $S_2$ 两种曲面而言 $\boldsymbol{B}$ 的环量不一致的矛盾,同时也使安培定律与表示电荷守恒的(3.2.1)式不相矛盾。这就是说,应当把电位移通量的时变率 $\varepsilon_0\frac{\partial \Phi_e}{\partial t}$ 也看成一种电流,其定义如下:

位移电流
$$i_d = \varepsilon_0\frac{\partial \Phi_e}{\partial t} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (6.2.2)$$

样，导电性介于金属和绝缘材料之间的许多物质对于在该种物质中传播的电磁波而言是作为良导体还是良介质来处理，就不是绝对的。在较低的频率下视为良导体，在某一较高的频率以上就可能视为良介质。从上例看，海水即使在频率相当高时仍属于良导体，而金属更是在微波频率($f \geqslant 800$ MHz)时 $J_d$ 也可以忽略；极端的情形是理想导体(超导体)，$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \to \infty$。相反，在绝缘体中，即使在很低的频率下也是以 $J_d$ 为主；极端的情形是理想介质，$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \to 0$。

## 6.3 麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组是在总结库仑、高斯、安培、法拉第等人的研究成果的基础上所取得的划时代的理论性成果。这个方程组是他所提出的创见——涡旋电场(感应电场)概念和位移电流概念的必然结果。

### 一、非限定形式的麦克斯韦方程组

描述涡旋电场的电磁感应定律和恒成立的高斯定律给出了时变的电场的旋度和散度方程，它们就是麦克斯韦方程组的第二、第四方程；而用位移电流假说修正过的安培环路定律以及恒成立的磁通连续性方程则分别描述了时变的磁场的旋度和散度，它们就是麦克斯韦方程组的第一和第三方程。

综上所述，时变电磁场的基本方程——麦克斯韦方程组为：

| 积分形式 | | 微分形式 | |
|---|---|---|---|
| $\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ | (6.3.1) | $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ | (6.3.5) |
| $\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ | (6.3.2) | $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ | (6.3.6) |
| $\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$ | (6.3.3) | $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ | (6.3.7) |
| $\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\tau \rho \mathrm{d}\tau$ | (6.3.4) | $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ | (6.3.8) |

麦克斯韦方程组以数学形式概括了宏观电磁场的基本性质，成为经典电磁理论的核心。它描述了电磁场和它的场源之间的全部联系，表明变化的磁通会成为电场的涡旋源，感应出环绕它的有旋涡的电场；变化的电通量也会成为磁场的涡旋源，感应出环绕它的有旋涡的磁场。而在时不变的情况下，麦克斯韦方程组就退化成彼此无关的静电场和静磁场的基本方程——电场只取决于 $\rho$ 的分布，磁场只取决于 $\boldsymbol{J}$ 的分布。所以，前面介绍的几种静态场的基本方程都被概括在内了，仅有恒定电场的一个基本方程——电流连续性方程形式上未包括在内。实际上，它并不是独立的，是可以由麦克斯韦方程组的第一、四方程导出的：

把方程(6.3.5)两端取散度，并把(6.3.8)式代入，得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

由于$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = 0$，故有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{6.3.9}$$

麦克斯韦方程组中的两个旋度方程(6.3.5)和(6.3.6)是基本的，因为两个散度方程可以由它们和电流连续性方程(6.3.9)共同导出，读者不难自行证明。

## 二、限定形式的麦克斯韦方程组

关于 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 四个场量的麦克斯韦方程组称为非限定形式的麦克斯韦方程组，它是适合于任何媒质的。“非限定”是指在媒质没有确定之前这四个场量仍无法确定。即使已知场源的分布也是如此(类似的现象我们在静态电场已经遇到，如 3.2 节及例 3.2)。场论中已指出，确定每个场矢量都必须同时知道其旋度和散度，这就需要八个矢量方程。显然，非限定形式的麦克斯韦方程组是不足的。为了确定四个场矢量，还需要一些新的方程。

任何电磁场都存在于一定的媒质(包括真空)之中。不同的媒质规定了这四个场量的不同的内在联系。联系不同媒质中场量的方程，就是这种媒质中的本构关系(也称组成关系)，也可以说是这种媒质的电磁特性。

真空是大家熟悉的最简单的媒质，它的本构关系十分简单：

$$\boldsymbol{D}(t) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(t)$$

$$\boldsymbol{B}(t) = \mu_0 \boldsymbol{H}(t)$$

$$\boldsymbol{J}(t) = 0$$

这表明 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 随时间的变化规律是完全一致的。

对于常见的各向同性的线性媒质，在变化速率不太高的情形，可近似认为

$$\boldsymbol{D}(t) = \varepsilon \boldsymbol{E}(t) \tag{6.3.10}$$

$$\boldsymbol{B}(t) = \mu \boldsymbol{H}(t) \tag{6.3.11}$$

$$\boldsymbol{J}_c(t) = \sigma \boldsymbol{E}(t) \tag{6.3.12}$$

$\boldsymbol{J}_c$ 表示在电场的作用下导电媒质中产生的传导电流，它是激励电流 $\boldsymbol{J}$(例如发射天线上的电流。$\boldsymbol{J}$ 在场的求解中应是已知的)这一“原因”产生的“结果”。但 $\boldsymbol{J}_c$ 一旦产生，也和 $\boldsymbol{J}$ 一样出现在方程(6.3.5)的同一位置上，同样按照(6.3.5)式的规律产生磁场。

当媒质中的场量随时间变化很快时，以上三式一般不完全成立。这是由于媒质的电磁特性表现为时间上的滞后(详见 6.5 节)。只有在时谐场中，将它们变换到频域才能利用复数形式仍写成线性关系式。这时($\mu$、$\varepsilon$、$\sigma$ 可能有一个或全部成为频率 $\omega$ 的函数。

除了各向同性的线性媒质，还有各向异性的线性媒质、非线性媒质以及电场与磁场相关联的复杂媒质(如旋波媒质)，可用

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = f\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$$

来描述，这时电磁场表现出许多奇妙的性质。

电磁场所在的空间往往不止有一种媒质，所论空间的几何结构、材料或媒质组成给定了，其中可能存在的基本场型(或称模式，见第 8 章)的集合就确定了，而与场源 $\rho$、$\boldsymbol{J}$ 如何分布无关。不同的场源无非引起基本模式的重新组合。换言之，不同的几何参数和电磁特性(本构关系)的媒质构成的系统具有不同的固有特性。这正象一个给定的电路网络系统具有其固有的传输函数 $H(\omega)$，一个给定边界条件和媒质的空间对点源也具有其固有的“响应”——格林函数 $G$。不同分布的场源产生的场无非是把这个 $G$ 对不同的源分布进行积分。

将 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{J}$ 用 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 表示后，麦克斯韦方程组中就只含两个未知矢量了。称只含有 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 两个场量的麦克斯韦方程组：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{6.3.5*}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{6.3.6*}$$

$$\nabla \cdot (\mu \boldsymbol{H}) = 0 \tag{6.3.7*}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \boldsymbol{E}) = \rho \tag{6.3.8*}$$

为限定形式的麦克斯韦方程组。其中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都各有它们的散度和旋度方程，共相当于八个标量方程。按照亥姆霍兹定理，确定一个矢量场需要散度和旋度两个矢量方程，即四个标量方程，故限定形式的麦克斯韦方程组足够确定 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 两个矢量场。

由于限定形式的麦克斯韦方程组已经考虑了媒质的性质和分布，因而在特定的边界条件下求解特定媒质中的限定形式的麦克斯韦方程组就成为时变场求解的基本问题。

## 三、无源区的麦克斯韦方程组

$J = 0$、$\rho = 0$ 且 $\sigma = 0$ 的区域，通常称为无源区。无源区中确定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 所需的场方程则仅是两个旋度方程

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{6.3.13}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{6.3.14}$$

这种 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 交叉在一起的形式并不便于用解析法直接求解。(用数值方法还是可以直接求解麦克斯韦方程组的，见6.11节)。在6.7节中将由上述无源区的麦克斯韦旋度方程导出波动方程，使 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分离在两个方程中。但利用波动方程也只能求出一种场；在已知一种场的情形下，就需要利用旋度方程去求出另一种场。

**例6.4** 同轴线内导体直径为 $2a = 2\ \mathrm{mm}$，外导体直径为 $2b = 8\ \mathrm{mm}$，内充均匀介质 $\mu_r = 1$，$\varepsilon_r = 2.25$，$\sigma = 0$。已知内外导体之间的电场强度为 $\boldsymbol{E} = \dfrac{100}{\rho}\cos(10^8 t - \beta z)\boldsymbol{a}_\rho\ \mathrm{V/m}$，试利用麦克斯韦方程求出：①$\beta$；②$\boldsymbol{H}$；③在 $0 \leqslant z \leqslant 1\ \mathrm{m}$ 的一段同轴线内总的位移电流。

**解** 因为介质 $\sigma = 0$，故内外导体间为无源区。因为有两个旋度方程，故不但可求出一个未知场量 $\boldsymbol{H}$，还可以求出一个未知参数 $\beta$。

①由(6.3.14)式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \dfrac{\boldsymbol{a}_\rho}{\rho} & \boldsymbol{a}_\varphi & \dfrac{\boldsymbol{a}_z}{\rho} \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_\rho}{\partial z}\boldsymbol{a}_\varphi = \boldsymbol{a}_\varphi \frac{100\beta}{\rho}\sin(10^8 t - \beta z) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B} = -\int \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}t = \boldsymbol{a}_\varphi \frac{10^{-6}\beta}{\rho}\cos(10^8 t - \beta z)$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} = \boldsymbol{a}_\varphi \frac{2.5\beta}{\pi\rho}\cos(10^8 t - \beta z) \tag{6.3.15}$$

又，由(6.3.13)式得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\begin{vmatrix}\dfrac{\boldsymbol{a}_\rho}{\rho} & \boldsymbol{a}_\varphi & \dfrac{\boldsymbol{a}_z}{\rho}\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \rho H_\varphi & 0\end{vmatrix}=-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\boldsymbol{a}_\rho=-\frac{2.5\beta^2}{\pi\rho}\sin(10^8t-\beta z)\boldsymbol{a}_\rho=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\quad(6.3.16)$$

$$\boldsymbol{E}=\int\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\mathrm{d}t=\boldsymbol{a}_\rho\frac{2.5\times10^4\beta^2}{\pi\rho2.25\times8.854}\cos(10^8t-\beta z)\quad(6.3.17)$$

上式的 $\boldsymbol{E}$ 应和题给的 $\boldsymbol{E}$ 相等：

$$\frac{2.5\times10^4\beta^2}{2.25\times8.854\pi\rho}\cos(10^8t-\beta z)=\frac{100}{\rho}\cos(10^8t-\beta z)$$

故
$$\beta=\sqrt{\frac{2.25\pi\times8.854\times100}{2.5\times10^4}}=0.50\quad(\mathrm{rad/m})$$

②把 $\beta$ 代入(6.3.15)，在内外导体间的区域中就得到

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{2.5\beta}{\pi\rho}\cos(10^8t-\beta z)=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{0.398}{\rho}\cos(10^8t-0.5z)\quad(\mathrm{A/m})\quad(6.3.18)$$

③$\sigma=0$ 时，电容器内外导体之间不存在漏电流 $J_c$，但存在着电场的变化——位移电流。由(6.3.16)式，得

$$\boldsymbol{J}_d=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\nabla\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{a}_\rho\frac{2.5\beta^2}{\pi\rho}\sin(10^8t-\beta z)=-\boldsymbol{a}_\rho\frac{0.199}{\rho}\sin(10^8t-0.5z)$$

1 m长的一段同轴线上的总位移电流为

$$i_d=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\boldsymbol{J}_d\cdot\boldsymbol{a}_\rho\rho\mathrm{d}\varphi=-2\pi\frac{0.199}{0.5}\cos(10^8t-0.5z)\Big|_0^1$$
$$=-2.5[\cos(10^8t-0.5)-\cos10^8t]\quad(\mathrm{A})$$

## 6.4 时变电磁场的边界条件

实际的电磁场与电磁波总是存在于有着各种各样界面的空间。这些界面例如波导壁、天线罩，光纤的纤芯、包层和护套之间的界面，等等；均匀无界空间只是一个理想的假设。从数学上说，有了边界条件，麦克斯韦方程组也才成为定解问题。

时变电磁场的边界条件是积分形式的基本方程在电磁边界上的特殊形式或极限形式。把场量分解为切向和法向分量，并把时变场的基本方程——麦克斯韦方程(6.3.1)～(6.3.4)用于介质或导体的界面处，就得到相应的边界条件。

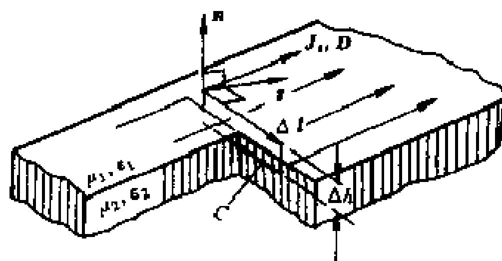



图 6-10　时变场中两种介质分界面上切向边界条件的推导

### 一、不同介质分界面上的边界条件

**1. $\boldsymbol{H}$ 的切向分量**

按照(6.3.1)式和图 6-10，应有

$$\oint\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\cdot\Delta\boldsymbol{l}=\boldsymbol{J}_S\cdot\boldsymbol{S}\Delta l+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$$

因 $\Delta S=\Delta l\cdot\Delta h\to0$，$\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ 又是有界量，故 $\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\Delta\boldsymbol{S}\to0$；再利用 $\Delta\boldsymbol{l}=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}\Delta l$，就得到

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_S \quad 或 \quad H_{1t}-H_{2t}=J_S \tag{6.4.1}$$

2. $\boldsymbol{E}$ 的切向分量

由(6.3.2)式,应有

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)\cdot\Delta\boldsymbol{l}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\Delta\boldsymbol{S}\to 0$$

与上同理,可导出

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0 \quad 或 \quad E_{1t}=E_{2t} \tag{6.4.2}$$

这样,虽然时变场中 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的环量方程与静态场中有本质的不同,但由于界面两侧的 $\Delta l$ 无限靠近,使矩形环路 $C$ 包围的面压缩成了线,致使穿过 $\Delta S$ 的电通量或磁通量趋于零,故而时变场中切向分量的边界条件在形式上仍然同静态场中一样。

由于方程(6.3.3)、(6.3.4)与静态场中形式相同,故可直接写出两个法向边界条件:

3. $\boldsymbol{B}$ 的法向分量

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0 \quad 或 \quad B_{1n}=B_{2n} \tag{6.4.3}$$

4. $\boldsymbol{D}$ 的法向分量

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_S \quad 或 \quad D_{1n}-D_{2n}=\rho_S \tag{6.4.4}$$

## 二、完纯导体表面的边界条件

完纯导体也称理想导体,其电阻为零。在发现超导之前,这只是一个理想化的模型。实际上,银、铜等良导体在许多工程问题中都可近似作为完纯导体对待,以便使问题简化。

完纯导体内应有 $\boldsymbol{E}=0,\boldsymbol{B}=0$(参见 6.1 节对超导体的介绍)。于是,在介质分界面上的四个边界条件(6.4.1)~(6.4.4)式中,令带有脚标 2 的所有分量都为零,就得到完纯导体表面的边界条件:

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{J}_S \quad 或 \quad H_{1t}=J_S \tag{6.4.5}$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1=0 \quad 或 \quad E_{1t}=0 \tag{6.4.6}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}_1=0 \quad 或 \quad B_{1n}=0 \tag{6.4.7}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_1=\rho_S \quad 或 \quad D_{1n}=\rho_S \tag{6.4.8}$$

从上述四式可看出,完纯导体表面上不可能有切向的电场和法向的磁场。换言之,电场若不为零,只可能是垂直于完纯导体表面的;而磁场总是与完纯导体表面相切,数值上与表面上的感应电流密度相等。并且,表面上的 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{J}_S$ 三者之间的方向关系必如图 6-11 所示。

**例 6.5** 如果例 6.4 的已知条件不变,且同轴线内外导体皆为理想导体:①验证同轴线中的电磁场满足理想导体的边界条件;②求出单位长度的内、外导体上分布的面电荷电量 $\rho_l(a)$、$\rho_l(b)$和面电流 $i(a)$、$i(b)$。

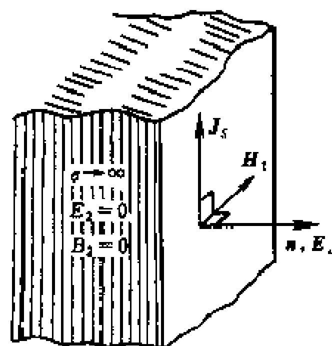


图 6-11 完纯导体表面的边界条件

**解** ①由例 6.4 的已知条件和(6.3.18)式,知 $\boldsymbol{E}=E_\rho\boldsymbol{a}_\rho,\boldsymbol{H}=H_\varphi\boldsymbol{a}_\varphi$,故

$$E_t=E_\varphi=E_z=0 \qquad H_n=H_\rho=0$$

满足导体表面的切向电场、法向磁场分量皆为零的边界条件。

②当 $\rho=a$ 时

$$\rho_S=D_n=\varepsilon_r\varepsilon_0 E_\rho\big|_{\rho=a}=\frac{100\times 2.25}{36\pi\times 10^9\rho}\cos(10^8 t-0.5z)\big|_{\rho=a}$$

$$=\frac{1.25\times10^{-8}}{2\pi a}\cos(10^8 t-0.5z)$$

由(6.3.15)式，有

$$\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}\big|_{\rho=a}=\boldsymbol{a}_\rho\times\boldsymbol{a}_\varphi\frac{2.5\times0.5}{\pi\rho}\cos(10^8 t-0.5z)\big|_{\rho=a}=\boldsymbol{a}_z\frac{2.5}{2\pi a}\cos(10^8 t-0.5z)$$

故 $$\rho_l(a)=\rho_S(a)\cdot2\pi a=1.25\times10^{-8}\cos(10^8 t-0.5z)=-\rho_S(b)2\pi b=-\rho_l(b)\tag{6.4.9}$$

$$i(a)=J_S(a)\cdot2\pi a=2.5\cos(10^8 t-0.5z)=-J_S(b)2\pi b=-i(b)\tag{6.4.10}$$

把以上四式中的 $\rho_l$ 与 $D$，$i$ 与 $H$ 相比照，可看出

$$D=\frac{\rho_l}{2\pi\rho}\rightarrow\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_\rho\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon\rho}\tag{6.4.11}$$

$$H=\frac{i}{2\pi\rho}\rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}\tag{6.4.12}$$

可见，在 $z$ 为任意常数的横截面上，同轴线中的场分布都与静态场相同；所不同的只是场量沿 $z$ 轴呈波动状态[按 $\cos(\omega t-\beta z)$分布]，在第 8 章我们将看到：凡由两根以上柱状导体构成的导波系统都能传输。这种场型，它只有横向分量，没有 $z$ 分量，且求解横截面上的场分布可采用二维静态场的解法和公式，与解麦克斯韦方程的结果相同。

### *三、时变电磁场的唯一性定理

分界面上的边界条件在电磁场的边值问题中起着定解的作用。在给定的空间媒质中同一个场方程的解由于边界条件的不同而千变万化。

如果分界面上是无源(即没有面电荷和面电流)的，则定解时实际上只需要两个切向边界条件，而法向条件可用来验证利用切向条件所解得的结果。换言之，当 $\rho_S=J_S=0$ 时，(6.4.1)～(6.4.4)式中仅有两个切向边界条件是独立的，法向边界条件实际上已经隐含在其中了。证明如下：

分界面两侧的空间中场量都满足微分形式的麦克斯韦方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}_1=-\frac{\partial\boldsymbol{B}_1}{\partial t}\qquad\nabla\times\boldsymbol{E}_2=-\frac{\partial\boldsymbol{B}_2}{\partial t}$$

把场量和$\nabla$都分解成切向和法向的两个分量：$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_t+\boldsymbol{E}_n$，$\nabla=\nabla_t+\nabla_n$；于是得到

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=(\nabla_t+\nabla_n)\times(\boldsymbol{E}_t+\boldsymbol{E}_n)=\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t+\nabla_t\times\boldsymbol{E}_n+\nabla_n\boldsymbol{E}_t=-\frac{\partial\boldsymbol{B}_n}{\partial t}-\frac{\partial\boldsymbol{B}_t}{\partial t}$$

其中 $$\nabla_t\times\boldsymbol{E}_t=-\frac{\partial\boldsymbol{B}_n}{\partial t},\quad\nabla_t\times\boldsymbol{E}_n+\nabla_n\times\boldsymbol{E}_t=-\frac{\partial\boldsymbol{B}_t}{\partial t}$$

前一式表示与界面垂直的分量。对于介质 1 和 2 它应分别写为

$$\nabla_t\times\boldsymbol{E}_{1t}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}_{1n}}{\partial t},\quad\nabla_t\times\boldsymbol{E}_{2t}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}_{2n}}{\partial t}$$

由于 $E_{1t}=E_{2t}$，故必有 $B_{1n}=B_{2n}$。

同法可由 $H_{1t}=H_{2t}$证明 $D_{1n}=D_{2n}$。

唯一性定理是电磁场的基本定理之一。唯一性定理指出在什么[时间、空间]范围，什么[初始、边界]条件下，麦克斯韦方程组的解是唯一的。

时变电磁场的唯一性定理表明：在一有限区域 $V$ 内，如果同时给定场源、任一点处 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在 $t=t_0$ 时刻的初始值和 $t\geqslant t_0$ 时边界上电场和磁场的切向分量，则在 $t>t_0$ 时区域 $V$ 内麦克斯韦方程组的解就被唯一确定了。换言之，同时满足场方程、初始条件和边界条件的解是唯一的。

对于下一节将介绍的时谐场，初始条件将被场量的周期性取代，只需边界条件就可保证解的唯一性。时谐场中唯一性定理的证明见 6.6 节。

## 6.5 时谐场的复数表示法

在稳态下各场量随时间作简谐变化的时变场称为时谐场，也有称正弦场。以直角坐标系为例，简谐变化的电场的三个分量为

$$
\begin{aligned}
E_x(\boldsymbol{r},t) &= E_{xm}(\boldsymbol{r})\cos[\omega t+\Psi_x(\boldsymbol{r})]\\
E_y(\boldsymbol{r},t) &= E_{ym}(\boldsymbol{r})\cos[\omega t+\Psi_y(\boldsymbol{r})]\\
E_z(\boldsymbol{r},t) &= E_{zm}(\boldsymbol{r})\cos[\omega t+\Psi_z(\boldsymbol{r})]
\end{aligned}
\tag{6.5.1}
$$

由于任意的时变波形均可用傅立叶变换分解为各种频率的正弦分量之迭加或积分，因此对单一频率的时谐场的复数表示是一个基础，具有普遍意义。

复数表示法是基于欧拉公式

$$
e^{j\Psi} = \cos\Psi + j\sin\Psi \tag{6.5.2}
$$

### 一、正弦场量的复数表示

#### 1. 复数振幅

由(6.5.1)和(6.5.2)式得

$$
\begin{aligned}
E_x(\boldsymbol{r},t) &= \mathrm{Re}\{E_{xm}(\boldsymbol{r})\cos[\omega t+\Psi_x(\boldsymbol{r})]+jE_{xm}(\boldsymbol{r})\sin[\omega t+\Psi_x(\boldsymbol{r})]\}\\
&= \mathrm{Re}\{E_{xm}e^{j[\omega t+\Psi_x(\boldsymbol{r})]}\} = \mathrm{Re}[E_{xm}e^{j\Psi_x(\boldsymbol{r})}\cdot e^{j\omega t}]\\
&= \mathrm{Re}(\dot{E}_{xm}e^{j\omega t})
\end{aligned}
$$

其中

$$
\dot{E}_{xm} = E_{xm}e^{j\Psi_x} = E_{xm}(\boldsymbol{r})e^{j\Psi_x(\boldsymbol{r})} \tag{6.5.3a}
$$

称为复数振幅。它的模和幅角(即 $E_x$ 分量的初相位角)都仅只是场点位置($\boldsymbol{r}$)即空间坐标的函数，时间因子 $e^{j\omega t}$ 已被剥离。这个时间因子在空间任一点都是相同的，所以，只需复数振幅——振幅和初相位这两个参数，就足以描述时谐场中各点的不同，足以确定空间各点的场量了。

同理，$E_y$ 分量和 $E_z$ 分量的复数振幅分别为

$$
\dot{E}_{ym} = E_{ym}e^{j\Psi_y} = E_{ym}(\boldsymbol{r})e^{j\Psi_y(\boldsymbol{r})} \tag{6.5.3b}
$$

$$
\dot{E}_{zm} = E_{zm}e^{j\Psi_z} = E_{zm}(\boldsymbol{r})e^{j\Psi_z(\boldsymbol{r})} \tag{6.5.3c}
$$

显然，对简谐变化的任何标量，例如电荷分布，也应有

$$
\dot{\rho}_m = \rho_m(\boldsymbol{r})e^{j\Psi(\boldsymbol{r})}
$$

#### 2. 复矢量

把上面得到的场矢量的三个分量的复数振幅按矢量合成，就得到：

电场强度复矢量

$$
\boldsymbol{E}_m = \boldsymbol{a}_x\dot{E}_{xm} + \boldsymbol{a}_y\dot{E}_{ym} + \boldsymbol{a}_z\dot{E}_{zm} \tag{6.5.4a}
$$

电场强度的瞬时值与复矢量的关系为

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{a}_xE_x(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{a}_yE_y(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{a}_zE_z(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_m e^{j\omega t}]
$$

$$\boldsymbol{a}_x \mathrm{Re}[\dot{E}_{xm} e^{j\omega t}] + \boldsymbol{a}_y \mathrm{Re}[\dot{E}_{ym} e^{j\omega t}] + \boldsymbol{a}_z \mathrm{Re}[\dot{E}_{zm} e^{j\omega t}] \tag{6.5.4b}$$

复矢量,顾名思义,是每个"分量"都是复数的"矢量"。它既不能像实矢量一样用三维空间中的箭矢来表示,也不能像每个复数振幅那样用复平面上的一个复数来表示,而是二者的特点兼有之。因此,它只是一个记号。复矢量之间应首先按矢量的规则运算,然后还要按照复数的规则运算。

3. 场量对时间微积分的复数表示

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}_m e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial t}[\dot{\boldsymbol{E}}_m e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[j\omega \dot{\boldsymbol{E}}_m e^{j\omega t}] \tag{6.5.5}$$

$$\int \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}_m e^{j\omega t}]\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\int \dot{\boldsymbol{E}}_m e^{j\omega t}\mathrm{d}t = \mathrm{Re}[\frac{1}{j\omega}\dot{\boldsymbol{E}}_m e^{j\omega t}] \tag{6.5.6}$$

场量为标量时的运算同此。例如:$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathrm{Re}[j\omega \dot{\rho}_m e^{j\omega t}]$

4. 场量对空间求导的复数表示

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \nabla \cdot \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}_m e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{E}}_m e^{j\omega t}] \tag{6.5.7}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \nabla \times \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}_m e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}}_m e^{j\omega t}] \tag{6.5.8}$$

$$\nabla \Phi(\boldsymbol{r}, t) = \nabla [\mathrm{Re}(\dot{\Phi} e^{j\omega t})] = \mathrm{Re}[\nabla \dot{\Phi} e^{j\omega t}] \tag{6.5.9}$$

Re 运算同 $\frac{\partial}{\partial t}$、$\int \cdot \mathrm{d}t$、$\nabla \cdot$、$\nabla \times$ 运算能够交换先后次序是因为后者都是线性运算,线性运算可使用迭加原理,而 $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*)$,于是可交换次序。

## 二、复数形式的麦克斯韦方程组

现在把时谐场的上述复数表示法代入麦克斯韦方程组。以方程(6.3.1)为例,它可写为

$$\mathrm{Re}[\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}}_m e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{J}}_m e^{j\omega t}] + \mathrm{Re}[j\omega \dot{\boldsymbol{D}}_m e^{j\omega t}]$$

一般来说,仅实部相等并不意味着复数相等;但上式须在任意时刻都成立,于是就只有等式两边的复数相等。约掉时间因子 $e^{j\omega t}$,得

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}}_m = \dot{\boldsymbol{J}}_m + j\omega \dot{\boldsymbol{D}}_m \tag{6.5.10}$$

同理可得

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}}_m = -j\omega\mu \dot{\boldsymbol{H}}_m \tag{6.5.11}$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{B}}_m = 0 \tag{6.5.12}$$

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{D}}_m = \dot{\rho}_m \tag{6.5.13}$$

而在无源区,场的解可仅由如下两个复数形式的旋度方程定出:

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}}_m = j\omega\varepsilon \dot{\boldsymbol{E}}_m \tag{6.5.14}$$

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}}_m = -j\omega\mu \dot{\boldsymbol{H}}_m \tag{6.5.15}$$

由上可见,采用复数形式可把场量由时、空的函数简化成仅是空间的函数;把求解麦克斯韦方程由四维的问题简化成三维的问题;由时域问题变换成为频域问题(因为场量表达式中去掉了时间因子,且(6.5.3)式中的振幅和相位实为某个频率分量的相应值,即 $E_m = E_m(\omega)$,$\Psi(\boldsymbol{r}) = \Psi(\boldsymbol{r}, \omega)$,故利用复数研究正弦场的问题也称为频域问题)。后面我们将看到,有耗媒质中的场也只有利用复数形式才能用解析法求解。

**例 6.6** 把场矢量(1)~(4)由瞬时值改为复数，由复数改为瞬时值，并求正弦量(2)的幅值。

(1) $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{a}_x H_0 k\left(\frac{a}{\pi}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\sin(kz-\omega t)+\boldsymbol{a}_z H_0\cos\frac{\pi x}{a}\cos(kz-\omega t)$

(2) $i_d=2.5[\cos(10^8 t-0.5)-\cos 10^8 t]$

(3) $\dot{E}_{zm}=E_0\sin k_x x\cdot\sin k_y y\cdot e^{-jk_z z}$

(4) $E_{xm}=2jE_0\cos\theta\sin(\beta z\cos\theta)e^{-j\beta x\sin\theta}$

**解** (1)因为

$$\cos(kz-\omega t)=\cos(\omega t-kz)$$

$$\sin(kz-\omega t)=\cos(kz-\omega t-\pi/2)=\cos(\omega t-kz+\pi/2)$$

故

$$\boldsymbol{H}_m=\boldsymbol{a}_x H_0 k\left(\frac{a}{\pi}\right)\sin\frac{\pi x}{a}e^{-jkz+j\frac{\pi}{2}}+\boldsymbol{a}_z H_0\cos\frac{\pi x}{a}e^{-jkz}$$

$$=\boldsymbol{a}_x jH_0 k\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}e^{-jkz}+\boldsymbol{a}_z H_0\cos\frac{\pi x}{a}e^{-jkz}=\boldsymbol{a}_x\dot{H}_{xm}+\boldsymbol{a}_z\dot{H}_{zm}$$

(2)

$$\dot{I}_{dm}=2.5(e^{-j0.5}-e^{j0})=2.5(e^{-j0.5}-1)$$

其幅值为

$$|\dot{I}_{dm}|=2.5|e^{-j0.5}-1|=2.5|\cos 0.5-j\sin 0.5-1|$$

$$=2.5\sqrt{(\cos 0.5-1)^2+\sin^2 0.5}=2.5\sqrt{(0.877\,5-1)^2+0.479^2}$$

$$=2.5\times 0.495=1.24\quad(\text{A})$$

(3) $E_z(x,y,z,t)=\mathrm{Re}(E_0\sin k_x x\cdot\sin k_y y\cdot e^{-jk_z z}\cdot e^{j\omega t})=E_0\sin k_x x\cdot\sin k_y y\cdot\cos(\omega t-k_z z)$

(4)因为 $j=e^{j\pi/2}$，故 $\dot{E}_{xm}(x,z)=2E_0\cos\theta\sin(\beta z\cos\theta)e^{-j(\beta x\sin\theta+\pi/2)}$

$$E_{xm}(x,z,t)=2E_0\cos\theta\sin(\beta z\cos\theta)\cos(\omega t-\beta x\sin\theta-\pi/2)$$

$$=2E_0\cos\theta\sin(\beta z\cos\theta)\sin(\omega t-\beta x\sin\theta)$$

## 三、复电容率 复磁导率

本节以复电容率为例来讨论。本章下面的讨论中将略去复振幅的下标 m。

无源区的麦克斯韦旋度方程(6.3.13)、(6.3.14)或(6.5.14)、(6.5.15)都可进一步变为波动方程来求解，而有源区(此处指导电媒质)的方程(6.3.5)和(6.5.10)中由于右边有一项 $\sigma\boldsymbol{E}$ 而无法导出波动方程，因而需要引入复电容率来解决：

$$\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}=\sigma\dot{\boldsymbol{E}}+j\omega\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}}=j\omega\left(\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega}\right)\dot{\boldsymbol{E}}=j\omega\varepsilon_c\dot{\boldsymbol{E}}\quad\left(\varepsilon_c=\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega}\right)$$

复电容率 $\varepsilon_c$ 的引入，使方程(6.5.10)又变成了(6.5.14)的简单形式。

由上也可见，媒质导电是复电容率虚部的一个来源，而 $\sigma\neq 0$ 即 $\varepsilon_c$ 的虚部的存在则意味着电能的损耗。对于时谐场，损耗功率的周期平均值为 $\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}_c^*\right]=\frac{1}{2}\sigma E^2$。电能转换为焦耳热的过程是不可逆转的，因而不可逆过程就成为能量损耗的代名词。

复电容率虚部的另一个来源是介质的色散。

迄今为止我们所讨论的媒质的 $\mu$、$\varepsilon$ 和 $\sigma$ 都是实数，无论它们是标量或张量(实矩阵)，是常数、分布函数或场强的函数(分别相应于均匀、非均匀或非线性媒质)。由 $\varepsilon=\varepsilon_0(1+\chi_e)$，$\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ 可看出，$\varepsilon$ 为实数意味着分子的极化与外加电场的变化“同步”。但对于迅变场，高频下的电介质分析表明 $\varepsilon$ 是一个复数：

$$\varepsilon=\varepsilon'-j\varepsilon''$$

的原因。由于$\omega\epsilon''$和$\sigma$在(6.5.20)式中地位完全相同，为了分析上的简明，在下一章有关损耗媒质的讨论中是按$\varepsilon_c$的虚部仅存在其中一项($\varepsilon''$)来分析的，然后又将其分析结果套用到仅有另一损耗项($\sigma$)的情形。

**例 6.7** 海水的$\sigma=4\ \text{S/m}$，$\varepsilon_r=81$，求海水在$f=1\ \text{kHz}$和$f=1\ \text{GHz}$时的复电容率。

**解** $f=1\ \text{kHz}$时：

$$\varepsilon_c=\varepsilon'-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}=81\times8.854\times10^{-12}-\mathrm{j}\frac{4}{2\pi\times10^{3}}=7.16\times10^{-10}-\mathrm{j}6.37\times10^{-4}$$

$$\approx-\mathrm{j}6.37\times10^{-4}\quad(\text{F/m})$$

$f=1\ \text{GHz}$时：

$$\varepsilon_c=81\times8.854\times10^{-12}-\mathrm{j}\frac{4}{2\pi\times10^{9}}=7.16\times10^{-10}-\mathrm{j}6.37\times10^{-10}\quad(\text{F/m})$$

**例 6.8** 在$\varepsilon_r=2.5$，$\tan\delta_e=0.001$的非完纯电介质中存在着频率为1 GHz、振幅为$E_m=50\ \text{V/m}$的电场，求每立方米的该电介质中消耗的平均功率$P$。

**解**

$$\varepsilon''=\varepsilon\tan\delta_e=\varepsilon_r\varepsilon_0\tan\delta_e=\frac{2.5\times0.001}{36\pi\times10^{9}}$$

$$P=\frac{1}{2}\omega\epsilon''E_m^2=\frac{2\pi\times10^{9}\times2.5\times0.001\times50^2}{2\times36\pi\times10^{9}}=0.174\quad(\text{W/m}^3)$$

## 6.6 坡印廷定理

在时变场中，场源随时间的变化引起场强的相应变化；根据(2.10.6)和(4.9.15)式，空间各点电场和磁场的能量密度也会随之变化，而这种变化会形成能量的流动。能量的流动是时变场中出现的一个重要现象。流动的能量同空间媒质所消耗的能量以及电磁贮能之间应满足能量守恒定律，这就是坡印廷(Poynting)定理，也称为能流定理，它可以从麦克斯韦方程组及有关矢量恒等式导出

### 一、时域的坡印廷定理

设闭合面$A$包围的空间体积$V$中无外加源，且介质为均匀、各向同性的。把麦克斯韦方程(6.3.5)、(6.3.6)代入矢量恒等式(A2.5)

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})$$

得到

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\tag{6.6.1}$$

将上式右边每一项展开：

$$\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\mu\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\right)=\frac{\partial w_m}{\partial t}\tag{6.6.2}$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{D}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\right)=\frac{\partial w_e}{\partial t}\tag{6.6.3}$$

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}=\sigma E^2\tag{6.6.4}$$

其中$w_m$和$w_e$分别为磁场和电场的能量密度，$\sigma E^2$是单位体积中变为焦耳热的功率。把(6.6.2)～(6.6.4)代入(6.6.1)式，得

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=-\frac{\partial}{\partial t}(w_e+w_m)-\sigma E^2\tag{6.6.5}$$

将上式在体积 $V$ 中积分，得

$$\int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V (w_e + w_m)\mathrm{d}V - \int_V \sigma E^2\mathrm{d}V$$

将散度定理用于上式左边使之变为面积分，并改变上式的符号，即得到玻印廷定理或能流定理：

$$-\oint_A (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V (w_e + w_m)\mathrm{d}V + \int_V \sigma E^2\mathrm{d}V \tag{6.6.6}$$

上式右边第一项为体积 $V$ 中电场能和磁场能每秒钟的增量，$\sigma E^2$ 为 $V$ 内变为焦耳热的功率。由于闭合面 $A$ 之内没有能量来源，根据能量守恒定律，这些能量的来源只能来自闭合面 $A$ 之外，因而上式左边必是自外界流入 $A$ 的功率的净流量。这就是能流定理的含义。根据这个物理含义，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 应具有单位面积上流过的功率的量纲——W/m²，我们把它定义为能流矢量（实为功率流密度矢量），也称玻印廷矢量：

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{6.6.7}$$

电磁场中存在有强度为 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 的能流传播的理论或假设已被实践验证是成功的。

如果 $\sigma = 0$，(6.6.5)和(6.6.6)式就可分别写为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S} = -\frac{\partial w_{em}}{\partial t} \quad (w_{em} = w_e + w_m) \tag{6.6.8}$$

$$-\oint_A \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{\partial W_{em}}{\partial t} \quad \left[W_{em} = \int_V (w_e + w_m)\mathrm{d}V\right] \tag{6.6.9}$$

从上两式可以看出，能流密度同能量密度的关系类似于电流密度同电荷密度的关系。由 $\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{v}$，推测应有 $\boldsymbol{S} = w_{em}\boldsymbol{v}$，证明如下：设电磁场以速度 $\boldsymbol{v}$ 传播，于是能量也以速度 $\boldsymbol{v}$ 流动。在空间任一点取一个同 $\boldsymbol{v}$ 垂直的面元 $\Delta A$ 为底面、长为 $v\Delta t$ 的柱体，如图 6-12 所示。显然，$\Delta t$ 时间内小柱体内的能量 $\Delta W$ 都将流过 $\Delta A$。由于 $\Delta t$ 极微小，柱体中的能量密度 $w_e$ 和 $w_m$ 近似是常数，故单位时间内穿过单位面积的电磁能为：

$$S = \frac{\Delta W}{\Delta t\cdot\Delta A} = \frac{(w_e + w_m)\cdot v\Delta t\cdot\Delta A}{\Delta t\Delta A} = (w_e + w_m)v$$

$$\boldsymbol{S} = (w_e + w_m)\boldsymbol{v} \tag{6.6.10}$$

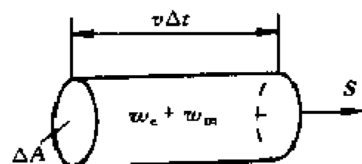



图 6-12　能流密度与能量密度的关系

(6.6.7)式中的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{S}$ 均为瞬时值。除了恒定场的情形，$\boldsymbol{S}$ 的大小和流向都是随时变动的。为了能够对能流的大小有一个更明确的判断，往往更需要知道的是它的时间平均值。此外，瞬时形式的玻印廷定理也不便表达由介质的色散所导致的功率损耗，它只有用复数形式即在频域分析。

## 二、频域的玻印廷定理

对于时谐场，瞬时能流矢量的周期平均值可用场量的复数振幅表示。推导如下：

$$S_{均} = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T |\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T E_m\cos(\omega t + \varphi_E)H_m\cos(\omega t + \varphi_H)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}E_m H_m\cos\varphi \tag{6.6.11}$$

其中 $\varphi = \varphi_E - \varphi_H$ 是电场和磁场的相位差。可以看出，上式与电路的有功功率的表达式相当：

$$P = \frac{1}{2}U_m I_m\cos\varphi$$

因而(6.6.11)式可看成是微分形式的有功功率，它正是一个复能流密度矢量的实部的大小：

$$\boldsymbol{S}_{均} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\right] \tag{6.6.12}$$

上式就是平均能流矢量的定义。$\boldsymbol{S}_{均}$ 与瞬时能流矢量 $\boldsymbol{S}(t)$ 都是实矢量，方向都垂直于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$（在第 7 章将看到，能流的方向也就是电磁波传播的方向）；但 $S_{均}$ 对空间中的某点而言是一个常数(假设电磁振荡已达稳态)。

对于含有多种频率成分的任意时变规律的周期性时变场来说，(6.6.12)式定义的 $\boldsymbol{S}_{均}$ 实际上代表某点处某频率成分的能流的周期平均值，其大小取决于该频率的场量在该点的复数振幅。$\dot{\boldsymbol{E}}$、$\dot{\boldsymbol{H}}$ 以至 $\boldsymbol{S}_{均}$ 是 $\omega$(而不是 $t$)的函数，而整个时间波形的平均能流等于它包含的所有各个频率分量的平均能流之和*。

对于一个不包围外加源的任意闭合面 $A$，流入其中的复功率应为复能流密度矢量对 $A$ 的面积分，它等于流入 $A$ 的有功功率和无功功率之和：

$$\oint_A \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \oint_A \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} + \mathrm{j}\oint_A \mathrm{Im}\left[\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{6.6.13}$$

把复数形式的麦克斯韦方程

$$\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}^* = \sigma\dot{\boldsymbol{E}}^* - \mathrm{j}\omega\varepsilon_c^*\dot{\boldsymbol{E}}^*$$

$$\nabla\times\dot{\boldsymbol{E}}^* = \mathrm{j}\omega\mu_c\dot{\boldsymbol{H}}^*$$

代入复数形式的矢量恒等式(A2.5)：

$$\nabla\cdot(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*) = \dot{\boldsymbol{H}}^*\cdot(\nabla\times\dot{\boldsymbol{E}}) - \dot{\boldsymbol{E}}\cdot(\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)$$

得到
$$-\nabla\cdot\left[\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\right] = \mathrm{j}\omega\frac{1}{2}\mu_c\dot{\boldsymbol{H}}\cdot\dot{\boldsymbol{H}}^* - \mathrm{j}\omega\frac{1}{2}\varepsilon_c^*\dot{\boldsymbol{E}}^*\cdot\dot{\boldsymbol{E}} + \frac{1}{2}\sigma\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}^*$$

把上式对体积 $V$ 积分，并利用散度定理，得

$$-\oint_A \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mathrm{j}\omega\int_V\left(\frac{1}{2}\mu_c H^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_c^* E^2\right)\mathrm{d}V + \int_V \frac{1}{2}\sigma E^2\mathrm{d}V \tag{6.6.14}$$

其中
$$\frac{1}{2}\mathrm{j}\omega\mu_c H^2 = \frac{1}{2}\mathrm{j}\omega(\mu' - \mathrm{j}\mu'')H^2 = \frac{1}{2}\omega\mu'' H^2 + \frac{1}{2}\mathrm{j}\omega\mu' H^2$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{j}\omega\varepsilon_c^* E^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{j}\omega(\varepsilon' + \mathrm{j}\varepsilon'')E^2 = \frac{1}{2}\omega\varepsilon'' E^2 - \frac{1}{2}\mathrm{j}\omega\varepsilon' E^2$$

把上两式代入(6.6.14)，就得到反映电磁能量转换和守恒的关系式：

$$\begin{aligned}
&-\oint_A \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\mathrm{d}\boldsymbol{A}\\
&= \int_V\left(\frac{1}{2}\sigma E^2 + \frac{1}{2}\omega\varepsilon'' E^2 + \frac{1}{2}\omega\mu'' H^2\right)\mathrm{d}V + \mathrm{j}\int_V \omega\left(\frac{1}{2}\mu' H^2 - \frac{1}{2}\varepsilon' E^2\right)\mathrm{d}V\\
&= \int_V (P_T + P_e + P_m)\mathrm{d}V + \mathrm{j}\int_V 2\omega(\tilde{w}_m - \tilde{w}_e)\mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{6.6.15}$$

---

* 注：这一结论已包含在下面的巴塞瓦尔等式中：

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$$

其中 $a_0$、$a_n$、$b_n$ 为周期函数 $f(x)$ 的福里哀系数。

其中

$$w_e = \frac{1}{4}\varepsilon' E^2$$

$$w_m = \frac{1}{4}\mu' H^2$$

能量密度周期平均值的表达式中系数为 $\frac{1}{4}$ 是因电能和磁能密度公式(2.10.6)、(4.9.15)中原已有系数 $\frac{1}{2}$。

(6.6.15)式就是复数形式的能流定理即频域的玻印廷定理。它表明体积 $V$ 中消耗的有功功率(该式中右边的实部)是由媒质的导电和色散造成的;它们分别是与传导电流相伴随的损耗 $P_T = \frac{1}{2}\sigma E^2$,介电损耗 $P_e = \frac{1}{2}\omega\varepsilon'' E^2$ 和磁损耗 $P_m = \frac{1}{2}\omega\mu'' H^2$,其总量等于由外界流入 $A$ 的净通量 $\oint_A \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$。(6.6.15)式的虚部为体积 $V$ 中的无功功率,代表一个周期中体积 $V$ 时而吸收(此时 $V$ 内电磁储能增加)、时而释放(此时 $V$ 中电磁能减少)的功率,也就是从闭合面 $A$ 时而净流入、时而净流出的功率。这部分功率并未被体积 $V$ 中的媒质消耗掉。这同电路中的电抗器件并不"消耗"无功功率是同样道理。

玻印廷矢量是一个重要的概念,计算各种传输线的传输功率、天线的辐射功率及传输线、波导、光纤中各种模式的传播损耗都要利用(6.6.12)式。

**例 6.9** 图 6.13 所示的一根半径为 $a$ 的无限长直导线中通有工频(50~60 Hz)交流电流 $i$,设稳态时导线表面上有均匀面电荷,密度为 $\rho_S$。

(1)求导线外侧表面处的能流密度矢量 $\boldsymbol{S}$;

(2)证明由导线表面进入导线内的电磁能量恰好等于导线内的热损耗。

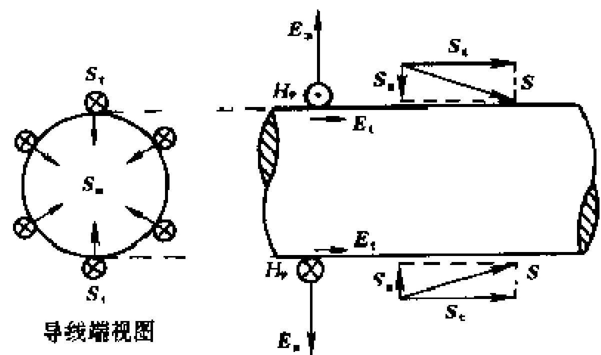



图 6.13　通有工频电流的导线表面的能流矢量

**解**　(1)由于频率很低,麦克斯韦方程组中的时间导数项可以忽略,退化为静态场方程,故可近似采用静态场解法。并且,$f < 1$ kHz时,导线截面上电流密度基本均匀,故有

$$E_{1t} = E_{2t} = E_z = \frac{J}{\sigma} = \frac{i}{\sigma\pi a^2}$$

$$E_{1n} = \frac{D_n}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_S}{\varepsilon_0} = E_\rho$$

所以导线外表面处电场、磁场分别为(参看图 6.13)

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_\rho \frac{\rho_S}{\varepsilon_0} + \boldsymbol{a}_z \frac{i}{\sigma\pi a^2}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_\varphi \frac{i}{2\pi a}$$

于是导线外表面处的能流密度为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{a}_\rho \frac{i^2}{\sigma 2\pi^2 a^3} + \boldsymbol{a}_z \frac{\rho_S i}{2\pi\varepsilon_0 a} = \boldsymbol{S}_n + \boldsymbol{S}_t$$

(2)从导线外部流进导线内的功率为

$$\oint_A \boldsymbol{S}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = S_n A = \frac{i^2}{\sigma 2\pi^2 a^3}2\pi a l = i^2\frac{l}{\sigma\pi a^2} = i^2 R$$

$i^2R$ 正是长 $l$ 的一段导线上电阻的焦耳损耗。

可以看出，在一个供电回路中：(1)在 $\sigma$ 很小的地方(例如负载电阻)，电阻上会有 $E_t \gg E_n$，于是 $S_n \gg S_t$，能流趋向于垂直地进入负载。可见，负载所消耗的能量不是电流从导线内部带来的，而是由空间流进来的。(2)与此相反，在 $\sigma\to\infty$ 的地方(例如导线)由于 $E_t\to 0$，将有 $S_n\to 0$、$S\to S_t$，能流几乎不进入导体，而是近似平行于导线，在外部向着电路的负载流动。因而导线对电磁波只是起了一个导行的作用(图 6-14)。

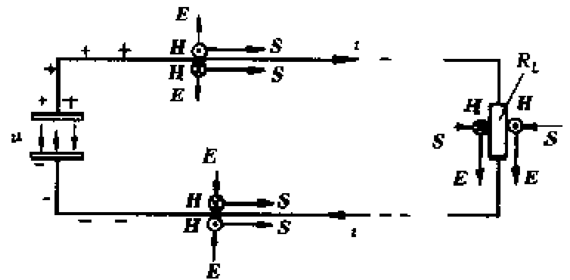



图 6-14 供电线路的玻印廷矢量的流向

图 6-14 是直流或交流供电的正(负)半周的情形。在负(正)半周，虽然电荷分布相反，但并不会改变能流的流向，$\boldsymbol{S}$ 总是向着负载即阻抗大的部位流去的。根据 $E=\dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho}$、$H=\dfrac{i}{2\pi\rho}$ 或双平行线的场分布图 4-12、图 5-17，场和能流主要集中在导线附近，“包裹”着导线流动。

当频率很低，可近似按静态场的公式作出上述分析和结论。但频率提高时，暴露在外的电磁能量将会越来越多地辐射到空间而散失。如果改用同轴线，反过来将电磁能流包围在内外导体之间，就可避免能量散失。再进一步，到了微波波段，就可抽掉内导体，形成波导管，让超高频变化的电磁波在空腔中相互感应而生，在波导壁上来回反射，“之”字前行。

**例 6.10** 计算例 6.4 同轴线中传输的功率 $P$，并与电路中的计算公式相比较。

**解** 根据 6.4 例给出的 $\boldsymbol{E}$ 以及(6.3.18)式可得同轴线内外导体之间的玻印廷矢量：

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{a}_\rho\frac{100}{\rho}\cos(10^8t-0.5z)\times\boldsymbol{a}_\varphi\frac{2.5\times 0.5}{\pi\rho}\cos(10^8t-0.5z)$$

$$=\boldsymbol{a}_z\frac{125}{\pi\rho^2}\cos^2(10^8t-0.5z)\quad(\mathrm{W/m^2})$$

故 $p=\int_A\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\int_a^b S2\pi\rho\mathrm{d}\rho=\int_a^b\dfrac{250}{\rho}\cos^2(10^8t-0.5z)\mathrm{d}\rho=250\ln\dfrac{b}{a}\cos^2(10^8t-0.5z)$

同轴线横截面上与静态场分布相同(见例 6.5)，故可按(2.3.12)式计算内外导体间的电压：

$$u=E\rho\ln\frac{b}{a}=\frac{100}{\rho}\cdot\rho\cdot\ln\frac{b}{a}\cos(10^8t-0.5z)$$

由(6.4.10)式，同轴线的电流为

$$i(a)=-i(b)=i=2.5\cos(10^8t-0.5z)$$

于是按照电路理论，电源向线路输出的功率应为

$$p=ui=250\ln\frac{b}{a}\cos^2(10^8t-0.5z)\quad(\mathrm{W})$$

可见同轴线的功率传输是在内外导体之间的空腔中由场来携带的。

**例 6.11** 在图 6-15 所示的理想导电壁限定的区域 $0\leqslant x\leqslant a$ 中存在一个如下的电场

$$E_y=H_0\omega\mu\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi}{a}x\sin(kz-\omega t)$$

求这个区域中玻印廷矢量的：(1)瞬时值；(2)平均值的分布。

**解** (1)由

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$-\boldsymbol{a}_x\frac{\partial E_y}{\partial z}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

得

$$\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{a}_x\frac{H_0ka}{\pi}\sin\frac{\pi x}{a}\sin(kz-\omega t)+\boldsymbol{a}_zH_0\cos\frac{\pi x}{a}\cos(kz-\omega t)$$

$$=\boldsymbol{a}_xH_x+\boldsymbol{a}_zH_z$$

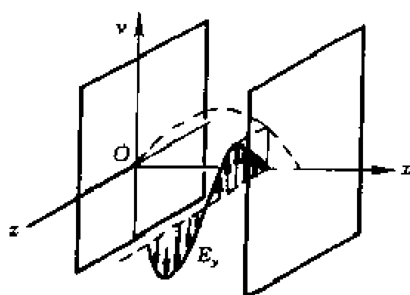



图6-15 无限大导体平行板之间的电磁波

故

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{a}_yE_y\times(\boldsymbol{a}_xH_x+\boldsymbol{a}_zH_z)$$

$$=\boldsymbol{a}_x\frac{1}{4}H_0^2\omega\mu\left(\frac{a}{\pi}\right)\sin\frac{2\pi x}{a}\sin2(kz-\omega t)-$$

$$\boldsymbol{a}_zH_0^2\omega\mu k\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\sin^2\frac{\pi x}{a}\sin^2(kz-\omega t)$$

(2)因为 $\sin(kz-\omega t)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\omega t-kz\right)$

故 $E_y$ 的复数振幅为

$$\dot{E}_y=\mathrm{j}H_0\omega\mu\frac{a}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

同理,$H_x$ 的复数振幅为

$$\dot{H}_x=-\mathrm{j}\frac{H_0ka}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

由于能量不可能沿 $x$ 方向传播,而 $\boldsymbol{a}_y\times\boldsymbol{a}_z=\boldsymbol{a}_x$,故无须考虑 $H_z$ 分量,只需考虑 $H_x$ 分量,于是有

$$\boldsymbol{S}_{均}=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_y\dot{E}_y\times\boldsymbol{a}_x\dot{H}_x^*\right]$$

$$=-\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_z\mathrm{j}^2H_0^2\omega\mu k\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\sin^2\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\right]$$

$$=\boldsymbol{a}_z\frac{1}{2}H_0^2\omega\mu k\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

我们免于考虑 $H_z$ 分量也可这样解释:$E_y\propto\sin(kz-\omega t)$而 $H_z\propto\cos(kz-\omega t)$,即 $\dot{E}_y\propto-\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$ 而$H_z\propto\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$,二者相位差 $\pi/2$,因此,$\dot{E}_y\dot{H}_z^*$ 必为虚数,即必为无功功率。

*利用复数形式的玻印廷定理(6.6.15)式,我们现在可以就时谐场的情形对时变电磁场的唯一性定理(见6.4节)作出证明了。

用反证法。假设存在 $\dot{\boldsymbol{E}}_1$、$\dot{\boldsymbol{H}}_1$ 和 $\dot{\boldsymbol{E}}_2$、$\dot{\boldsymbol{H}}_2$ 两组解同时满足区域 $V$ 中的场方程以及 $V$ 的边界面$A$ 上的切向边界条件。由于麦克斯韦方程的线性性,差场 $\dot{\boldsymbol{E}}=\dot{\boldsymbol{E}}_1-\dot{\boldsymbol{E}}_2$,$\dot{\boldsymbol{H}}=\dot{\boldsymbol{H}}_1-\dot{\boldsymbol{H}}_2$ 也应满足麦克斯韦方程。已知两个场都满足有源区的方程(6.5.10)~(6.5.13),则差场必满足无源区的方程(6.5.14)、(6.5.15)。这是因为:如若

$$\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}_1=\dot{\boldsymbol{J}}+\mathrm{j}\omega\epsilon\dot{\boldsymbol{E}}_1$$

$$\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}_2=\dot{\boldsymbol{J}}+\mathrm{j}\omega\epsilon\dot{\boldsymbol{E}}_2$$

其中 $\boldsymbol{J}$表示外加源,是给定的(而由于媒质导电产生的 $\boldsymbol{J}_c$ 表现为复电容率 $\epsilon_c$),把两方程相减必得

$$\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}=\mathrm{j}\omega\epsilon\dot{\boldsymbol{E}}$$

又因
$$\nabla\cdot(\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}}_1)=\dot{\rho}$$
$$\nabla\cdot(\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}}_2)=\dot{\rho}$$
故两方程相减得
$$\nabla\cdot(\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}})=0$$
这样,差场 $\dot{\boldsymbol{E}}$、$\dot{\boldsymbol{H}}$ 必满足在 $V$ 内无外加源的假设下由麦克斯韦方程导出的玻印廷定理(6.6.15)式;并且,在闭合面 $A$ 上,差场的切向分量 $\dot{\boldsymbol{E}}_t$、$\dot{\boldsymbol{H}}_t$ 必为
$$\dot{\boldsymbol{E}}_t=\dot{\boldsymbol{E}}_{1t}-\dot{\boldsymbol{E}}_{2t}=0,\quad \dot{\boldsymbol{H}}_t=\dot{\boldsymbol{H}}_{1t}-\dot{\boldsymbol{H}}_{2t}=0$$
从而 $(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=[(\dot{\boldsymbol{E}}_t+\dot{\boldsymbol{E}}_n)\times(\dot{\boldsymbol{H}}_t^*+\dot{\boldsymbol{H}}_n^*)]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=(\dot{\boldsymbol{E}}_n\times\dot{\boldsymbol{H}}_n^*)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A=0$
这意味着没有功率流出入闭合面 $A$,(6.6.15)式左端为零。而复数为零必须实部、虚部均为零。对于有耗媒质,(6.6.15)式右端的 $P_T$、$P_e$、$P_m$ 都是非负数,故只有 $\dot{\boldsymbol{E}}=0$,$\dot{\boldsymbol{H}}=0$,因而必有 $\dot{\boldsymbol{E}}_1=\dot{\boldsymbol{E}}_2$,$\dot{\boldsymbol{H}}_1=\dot{\boldsymbol{H}}_2$,即场的解是唯一的。

对于无耗介质,因 $\sigma=\varepsilon''=\mu''=0$,无法直接证明 $\dot{\boldsymbol{E}}=0$、$\dot{\boldsymbol{H}}=0$。此时,可把无耗介质看成是有耗媒质的 $\sigma$、$\varepsilon''$、$\mu''$ 无限减小的极限情形。由于有耗媒质中场方程的解是唯一的,其极限当然也就是唯一的。

时变场的唯一性定理与静电场的唯一性定理有所不同是必然的,因为场的方程不同。时变场的方程表明 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 是相互为源(而静态电、磁场互不影响,分别以 $\rho$、$\boldsymbol{J}$ 为源)、相互感应而向空间传播的,因而边界面 $A$ 包围的空间 $V$ 中的场理应与 $A$ 上的电磁场、电磁能流朝向 $A$ 之内(即沿 $-\boldsymbol{n}\mathrm{d}A$ 的方向)的传播、流动有关,也就是与边界面上的 $\boldsymbol{E}_t$、$\boldsymbol{H}_t$ 有关;时变场中 $A$ 可以只是空间中的一个计算表面,而静电场唯一性原理所指的边界面在实际问题中通常是电荷藉以存在的物理表面。

## 6.7 场量的波动方程 电磁波

### 一、场量的波动方程

6.3 节中已经指出,在无源区($\rho=J=\sigma=0$),对于各向同性的均匀媒质,电磁场的解可仅由限定形式的麦克斯韦方程组的两个旋度方程求出:
$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\tag{6.3.13}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\tag{6.3.14}$$
但是为了用解析法求解,还需要把 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分离到两个方程中。为此,我们对上述任一个方程,譬如(6.3.14),两边再取旋度:
$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H})$$
把矢量恒等式(A2.10)$\nabla\times\nabla\times=\nabla\nabla\cdot-\nabla^2$及(6.3.13)式代入上式,并利用$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$,得
$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\boldsymbol{0}\tag{6.7.1}$$
同法可得到
$$\nabla^2\boldsymbol{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=\boldsymbol{0}\tag{6.7.2}$$
(6.7.1)和(6.7.2)就分别是关于场量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的波动方程。虽然满足麦克斯韦旋度方程的矢

量场必然满足波动方程，但通过求解任一个波动方程只能求出一个场矢量(例如从(6.7.1)只能求出 $\boldsymbol{E}$)；还需再利用这个已知场量和一个旋度方程去求出另一个场矢量(例如再由(6.3.14)从 $\boldsymbol{E}$ 求出 $\boldsymbol{H}$)。

波动方程中对矢量进行 $\nabla^2$ 运算的意义如4.3节所述。只有对于直线坐标分量，其满足的方程形式才仍然是波动方程的形式。例如在直角坐标系中(6.7.1)式代表着如下的三个标量波动方程

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0 \quad 或 \quad \nabla^2 E_x-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0 \tag{6.7.1a}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=0 \quad 或 \quad \nabla^2 E_y-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=0 \tag{6.7.1b}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}=0 \quad 或 \quad \nabla^2 E_z-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}=0 \tag{6.7.1c}$$

而其他坐标系中的非直线坐标分量的方程形式都比较复杂。

例如，对于6.4例的同轴线，因为是圆柱坐标，$E_\rho$、$H_\varphi$ 不满足上述形式的波动方程，故只能利用两个旋度方程去求出 $\beta$ 和 $\boldsymbol{H}$。假如是直角坐标系中的问题，我们也可以利用 $\boldsymbol{E}$ 的波动方程去求出常数 $\beta$，再代入一个旋度方程去求出另一个场量 $\boldsymbol{H}$。

对于时谐场，同样可由两个复数形式的旋度方程(6.5.14)和(6.5.15)导出复数形式的波动方程，称为亥姆霍兹方程(也称简谐振动方程或谐方程)：

$$\nabla^2\dot{\boldsymbol{E}}+K^2\dot{\boldsymbol{E}}=0 \tag{6.7.3}$$

$$\nabla^2\dot{\boldsymbol{H}}+K^2\dot{\boldsymbol{H}}=0 \tag{6.7.4}$$

其中 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$。若空间为有耗媒质，只须用 $\mu_c$、$\varepsilon_c$ 代替 $\mu$、$\varepsilon$。

## 二、电磁波的一般概念

我们称方程(6.7.1)～(6.7.4)为波动方程，是因为它们的解是波函数。在不同的坐标系中在频域一般地求解三维的波动方程见6.9节。这里，为了说明何种函数形式表示波(行波或驻波)，介绍电磁波的一般概念(这也是6.9节与6.10节的预备知识)，我们仅就直角坐标下的一维场即 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(z,t)$ 的简单情形，在时域求解波动方程(6.7.1)。如前所述，在直角坐标系中，方程(6.7.1)代表着 $\boldsymbol{E}(z,t)$ 的每个直角分量的三个同样形式的标量波动方程，故不妨写出一个为代表：

$$\nabla^2 E_x-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0 \quad \to \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0 \tag{6.7.5}$$

方程(6.7.5)在数学物理方程中已经解出为

$$E_x(z,t)=f\left(t-\frac{z}{v}\right)+g\left(t+\frac{z}{v}\right) \qquad \left(v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right) \tag{6.7.6}$$

其中 $f$ 和 $g$ 分别为正向解 $E_x^+(z,t)$ 和反向解 $E_x^-(z,t)$，其物理含义分别为顺行波(沿 $+z$ 方向)和逆行波(沿 $-z$ 方向)我们以 $f\left(t-\frac{z}{v}\right)$ 为例来表明这一函数形式代表行波：

令

$$\varphi_0=t_1-\frac{z_1}{v}=t_2-\frac{z_2}{v}$$

若 $t_2>t_1$，则必有 $z_2>z_1$，这表示早些时($t_1$)出现在 $z_1$ 的函数值 $f(\varphi_0)$ 晚些时候($t_2$)会到达

$z_2$。如此，波形 $f$ 上的每一点都会以速度 $v$ 向 $+z$ 方向推进，如图 6-16 所示。同理，波函数 $g(t+\frac{z}{v})$ 表示沿 $-z$ 方向的行波，波形 $g$ 上的每一点都以速度 $v$ 向 $-z$ 方向推进。这样，我们可以认为电磁波就是电磁扰动的传播，这正如拿住绳子的一端上下抖动时，这一扰动就会由近及远地向另一端传播。（关于电磁扰动可参阅文献[7]）

容易验证，任意二阶可微的时间函数 $f$、$g$ 都满足波动方程(6.7.5)。它可能是窄脉冲，也可能是数字化波形或连续不断的正弦波……；频率从工频一直延伸到光、紫外线、X 射线、γ 射线；波的形态也千变万化，但它们都必须满足麦克斯韦方程组，因而也就必然满足波动方程。换言之，所有能够存在的电磁波都是波动方程的解。

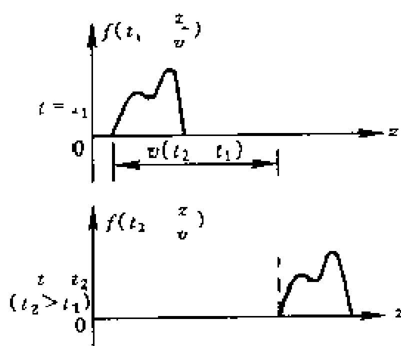



图 6-16　波函数 $f(t-\frac{z}{v})$ 表示 $+z$ 方向的行波

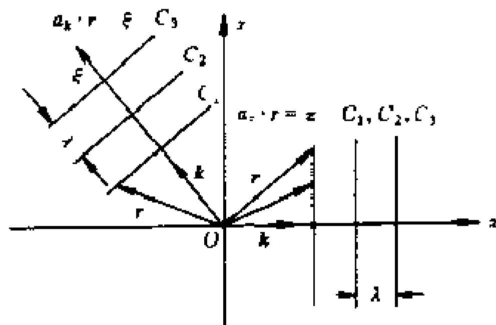



图 6-17　平面波的等相位面和波矢量

事实上，由于任何时变的 **E** 都会感应出 **B**，时变的 **B** 又会感应出 **E**，这样相互感应、相互激发的结果，必然形成时变电磁场的传播——电磁波。所以，时变场必然伴随着波的传播。（虽然有些情况下可以忽略波的传播，例如准静态场和偶极子天线的近区场），麦克斯韦方程组—波动方程的解是波函数正是真实地反应了这一物理现象。

由于任何扰动（时间函数）都可用傅立叶分析而分解成不同的频率分量，因此本书只研究单一频率的简谐波，(6.7.6)式中的顺行波的具体函数形式应为

$$E_x^+(z,t) = f(t-\frac{z}{v}) = A\cos(\omega t-\frac{z}{v}) = A\cos(\omega t - k_z z) \quad (k_z = \frac{\omega}{v}) \tag{6.7.7a}$$

根据 6.5 节，其复数振幅为

$$\dot{E}_x^+(z) = Ae^{-jk_z z} \tag{6.7.7b}$$

同理，逆行波为

$$E_x^-(z,t) = g(t+\frac{z}{v}) = B\cos(\omega t + k_z z) \tag{6.7.8a}$$

其复数振幅为

$$\dot{E}_x^-(z) = Be^{jk_z z} \tag{6.7.8b}$$

(6.7.7b)和(6.7.8b)正是方程 $\nabla^2\dot{E}_x + k^2\dot{E}_x = 0$ 的解。

*从物理含义上讲，如果在 $E_x^+$ 传播的前方没有反射壁，在所讨论的区域以远（例如 $z > z_0$）也没有朝 $-z$ 方向的辐射，就不会有逆行波。而如果存在反射壁（譬如理想导体平面），反射回来的逆行波就会与顺行波叠加成驻波：

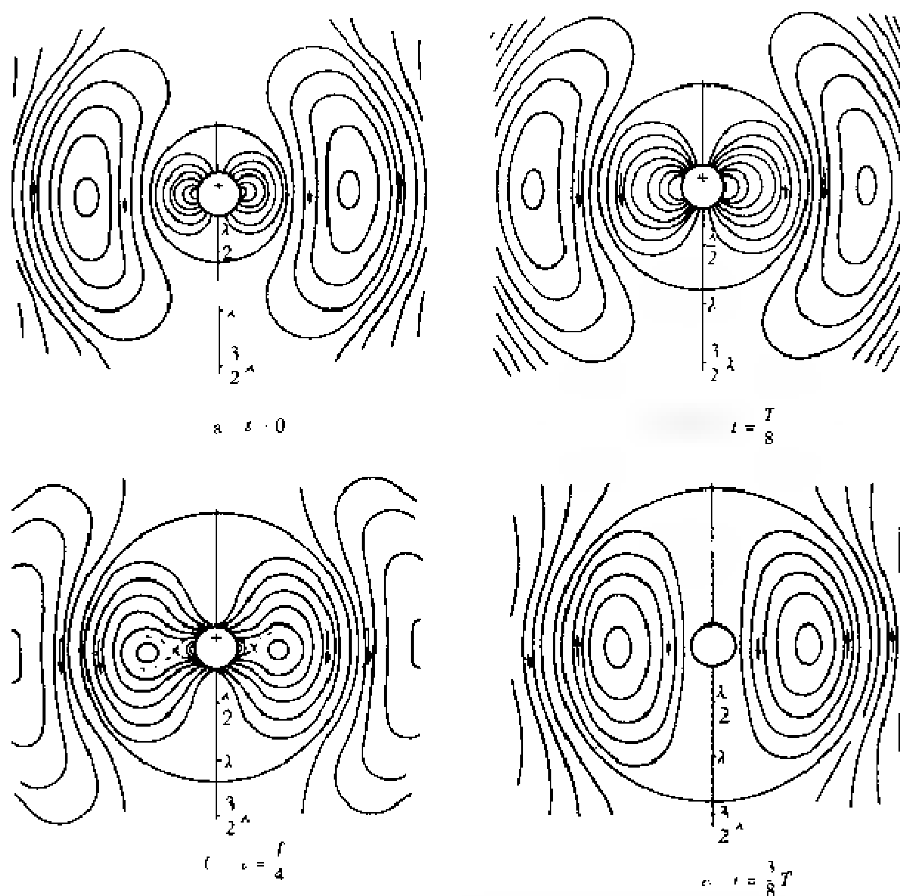


图6 18 偶极振子附近(近区)电力线的周期性变化($0 \leq t \leq T/2$)

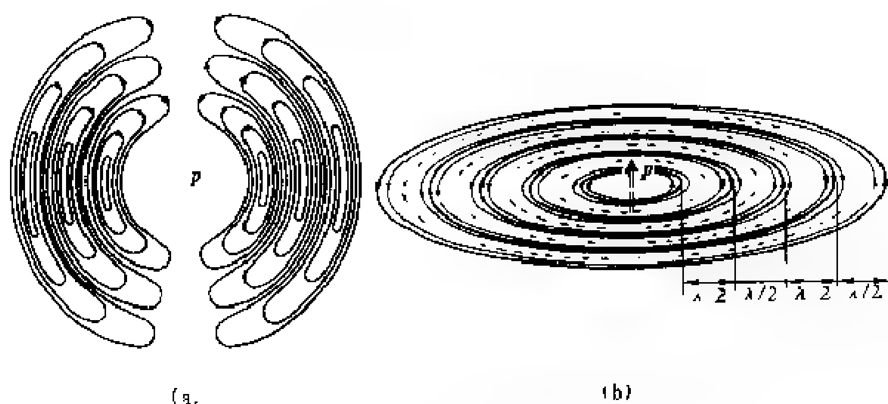


图6 19 远离偶极振子的空间(远区)的电力线和磁力线

(a)电力线;(b)磁力线。

如前所述,电磁波的瞬变过程复杂,形态千变万化,:如何描述、用什么参数来描述某种形态的电磁波?在何种介质和几何条件下才可能存在这种形态的电磁波?一种形态的电磁波遇到不同媒质的界面时表现出什么样的特性?……关于电磁波的这一系列基本问题所涉及的深度和广度是本书难以概括的,本书后续章节将仅限于研究达到稳态的、单一频率的简谐波,主要讨论波阵面为平面的简谐波在无界、半无界空间的传播(第7章),在有界空间的传播(第8章)以及由天线辐射的简谐波(第9章)。

## 三、电磁场的实在性

如前所述,麦克斯韦方程组的一个直接推论就是电磁波的存在。又由于它在真空中的速

度 $v=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ 恰与当时已测出的光速相等，因而麦克斯韦第一次提出光波也是一种电磁波，认识到光现象和电磁现象的统一性。这一源于理论的预言，在麦克斯韦逝世十年后被赫兹用实验证实，充分显示了“数学在理论物理学上的强大作用”，是一种“超感觉器官”。

在发现电磁波以前，多数人把电场（磁场）看成是为了更方便地计算电荷（电流）之间的作用力或是电力（磁力）对电荷（电流）做的功而引入的数学上的辅助概念，电荷（电流）周围的空间和没有电荷（电流）的空间同样是空虚的。电场和磁场并非实在的东西。而电磁波的发现证实了电磁场的实在性。证明它也具有一般物质所具有的能量、动量和质量。

首先，电磁波以有限的速度在空间传播的事实肯定了电磁场具有能量（这个事实仅仅根据静电场或恒定磁场的现象是无法肯定或判断的）。假设某个发送端的振荡电路辐射了电磁波，它会损失能量。由于电磁波以有限的速度传播，故与发端有一定距离的收端电路不可能立刻就获得这个能量；那么，从发出至收到的这段时间内，能量只能为带电系统之外的空间电磁场所具有。如果认为只有带电系统（电荷和电流的载体）才可能具有能量，就会违反能量守恒定律。

能量守恒反映了运动不灭，也反映了运动与物质的不可分割——我们不可能设想是“空虚”在运动，在以有限的速度传播，并具有能量。当然，根据 $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$，以光速 $c$ 运动着的电磁场不可能具有静止质量 $m_0$。我们还知道，光子在一定条件下可以转化为一对正、负电子，或者反过来。而电子是有静止质量的（$9.107\times10^{-31}$kg）。这也间接证明了电磁场具有质量，是实在的；因为光也是电磁场的一种形式。

其次，有能量（$w$）就有动量（$p$），二者以 $p=\dfrac{w}{c}$ 相联系；而有动量就会有辐射压力。例如以石英丝悬挂的很轻的叶片在受到电磁辐射时便发生转动，就是电磁场具有动量的表现。

由此，我们也可认识到，辐射源的带电系统中时变的电荷、电流对于远离它的收端的作用并非是“超距”作用，而是通过电磁场这种特殊形态的物质来起作用的。波动着的电磁场一经到达，便会在接收电路中引起电磁振荡。因此，说电磁场具有能量决不是为了追求理论上的完整性而引进的假设。在电磁场和实物相互作用时，它的能量便表现出来了。

## 6.8 动态位 动态位的波动方程

尽管上一节中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 被分离到了各自的波动方程中，但每个矢量有三个分量，故直接求解场矢量的波动方程仍是很复杂的。借助于辅助的位函数可以减少未知函数的数目，简化求解。如果把静态场的各种位函数统称为静态位，则时变场的各种标量位、矢量位可称为动态位或电磁位。由于电场和磁场的不可分割，动态位都是成对的。本节介绍最常用的位对—标量电位和矢量磁位（其他位对，如矢量电位和标量磁位；赫兹电矢量和赫兹磁矢量，可参阅文献[5]），并导出关于它们的非齐次波动方程——达朗贝尔方程。

因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，故可令

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{6.8.1}$$

将其代入(6.3.6)式，得

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{A})$$

移项得

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0$$

由于无旋场一定对应着一个标量场，故可引入标量电位 $\Phi$：

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{6.8.2}$$

可见，静态场中 $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ 可看成是上式 $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = 0$ 时的特例。

$\Phi$、$\boldsymbol{A}$ 就是时变电磁场的一个动态位对。$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 分别通过(6.8.1)和(6.8.2)式与位函数 $\Phi$、$\boldsymbol{A}$ 相联系。如果能求出 $\Phi$ 和 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的分布就迎刃而解。

首先须指出，满足(6.8.1)和(6.8.2)的 $\Phi$、$\boldsymbol{A}$ 并不唯一。例如另有如下的矢量位 $\boldsymbol{A}'$ 和标量位 $\Phi'$：

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla \Psi$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

其中 $\Psi$ 为任一标量场，则 $\boldsymbol{A}'$ 和 $\Phi'$ 也一定满足(6.8.1)和(6.8.2)式：

$$\nabla \times \boldsymbol{A}' = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times \nabla \Psi = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

$$-\nabla \Phi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} = -\nabla \Phi + \nabla \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \Psi = -\nabla \Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{E}$$

为了唯一确定 $\boldsymbol{A}$ 和 $\Phi$，还需要规定 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$。原则上说，对于 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 的赋值具有任意性，下面将看到赋于 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 怎样的值比较有利于 $\Phi$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的求解。

利用(6.8.2)式，可得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla \Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{6.8.3}$$

把(6.8.1)、(6.8.2)代入方程(6.3.5)，得

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla \Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu \boldsymbol{J} - \mu\varepsilon \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \tag{6.8.4}$$

如果令

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{6.8.5}$$

代入(6.8.3)和(6.8.4)式，就得到

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{J} \tag{6.8.6}$$

和

$$\nabla^2 \Phi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{6.8.7}$$

(6.8.5)式称为洛仑兹条件。(6.8.6)和(6.8.7)就是达朗贝尔方程，它是关于动态位 $\boldsymbol{A}$ 和 $\Phi$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2}+k_x{}^2 X=0\\
&\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2}+k_y{}^2 Y=0\\
&\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}+(k^2-k_x{}^2-k_y{}^2)Z=0
\end{aligned}
\tag{6.9.7}
$$

(6.9.7)中的三个方程显然是一维的亥姆霍兹方程,即复数一维波动方程,故也称为平面谐[波]方程。若用 $F_1(k_x x)$、$F_2(k_y y)$、$F_3(k_z z)$ 来分别表示这三个方程的解(也就是与本征值 $k_x$、$k_y$、$k_z$ 对应的本征函数),则标量波动方程(6.9.5)的一个可能的解为

$$
\Psi_k=F_1(k_x x)F_2(k_y y)F_3(k_z z) \tag{6.9.8}
$$

由于方程(6.9.7)与(6.9.2)形式上类同,故解式(6.9.8)与(6.9.4)形式上也类同。但是,二者有着本质的区别:方程(6.9.7)中的函数及其解 $\Psi_k$ 都只是简谐波的复数振幅。

以 $F_3(k_z z)$ 为例,令 $k_z=\beta-j\alpha$($\alpha$、$\beta$ 为实数),方程(6.9.7)的本征函数可能取的几种主要函数形式及其物理含义为:

$$
F_3(k_z z)=\begin{cases}e^{-jk_z z}\\ e^{jk_z z}\end{cases}=\begin{cases}e^{\mp j\beta z} & (k_z\ \text{为实数})\quad \text{表示沿}\ z\ \text{方向的行波}\\ e^{\mp\alpha z} & (k_z\ \text{为虚数})\quad \text{表示沿}\ z\ \text{方向的衰减波}\\ e^{\mp\alpha z}e^{\mp j\beta z} & (k_z\ \text{为复数})\quad \text{表示沿}\ z\ \text{方向的衰减行波}\\ \sin\beta z\\ \cos\beta z & (k_z\ \text{为实数})\quad \text{表示沿}\ z\ \text{轴的驻波}\end{cases}
\tag{6.9.9}
$$

这里所说的行波都是平面波。(关于衰减行波详见7.5节。)

为了根据边界条件选定符合需要的具体函数形式,须对(6.9.9)式中各种本征函数的数学特性和物理含义十分熟悉。(6.9.8)式的 $\Psi_k$ 可称为基本波函数。各种可能的 $\Psi_k$ 的线性组合也应是方程(6.9.5)的解。脚标 $k$ 表示本征值 $k_x$、$k_y$、$k_z$ 的某一组合。对 $k_x$、$k_y$ 所有可能的取值求和或积分就构成方程(6.9.5)的通解。每个 $\Psi_k$ 对应着可能存在的一种波型,也称模式,因此,通解表示所有可能存在的电磁波模式的叠加。

对于有界空间,$k_x$、$k_y$ 可取的值是离散的(表示这些区域中可能存在的电磁波模式也是离散的),故方程(6.9.5)的通解为级数形式:

$$
\Psi=\sum_{k_x}\sum_{k_y}C_{k_x k_y}\Psi_k=\sum_{k_x}\sum_{k_y}C_{k_x k_y}F_1(k_x x)F_2(k_y y)F_3(k_z z) \tag{6.9.10}
$$

而在无界空间,$k_x$、$k_y$ 的可能取值是连续的,故通解为积分形式:

$$
\Psi=\int_{k_x}\int_{k_y}g(k_x,k_y)F_1(k_x x)F_2(k_y y)F_3(k_z z)\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{6.9.11}
$$

对于有界空间,常见的例子有波导管、光纤等。当所论区域的媒质和边界条件给定了,该区域中能够存在哪个(些)模式就唯一确定了;相应地,方程(6.9.7)的本征值——本征函数应取(6.9.9)中的哪[几]种形式以及(6.9.10)式中的待定系数 $C_{k_x k_y}$ 就被唯一确定了。

由于确定 $C_{k_x k_y}$、$g(k_x,k_y)$ 时还需要利用本征函数的正交性(常见的三角函数、贝赛尔函数、勒让德多项式……都是正交函数集),这种作法与傅立叶分析中求傅立叶系数的作法相同,故分离变量法也称傅立叶法,也可称为本征函数展开法。

以上就是用分离变量法求解标量波动方程(或拉普拉斯方程)的基本步骤。

需要指出，三维的标量波动方程欲分离为三个常微分方程还必须满足一定的充分必要条件[5]，因而能够用分离变量法处理的坐标系是有限的。在 1.2 节中提到的 13 种坐标系中的前 11 种坐标系中，波动方程、拉普拉斯方程都可直接采用分离变量法处理；最后两种坐标系中，只有拉普拉斯方程在经过变换后可用分离变量法求解。这方面的讨论超出了本书的范围。

从齐次标量波动方程(6.9.5)解出的标量波函数 $\Psi_k$ 可代表以下几种物理含义：

①可以理解成是标量位 $\Phi$，然后由此进一步导出矢量位 $\boldsymbol{A}$ 和所求的场矢量，例如 8.4 节对介质波导的分析。

②也可以理解成是场矢量的任一个直角分量，例如在第 8 章对金属波导和光纤的分析中，就是把标量波 $\Psi_k$ 看成是纵向场分量($E_z$ 或 $H_z$)，再利用旋度方程(6.5.14)、(6.5.15)导出以纵向分量来表示各个横向分量的关系式。这就是在导行波的分析中最常用的纵向场法。

③特别，在 $k_x$、$k_y$、$k_z$ 皆为实数的简单情形下，$\Psi_k$ 就代表电场或磁场强度，这是因为

$$\Psi_k = F_1(k_x x)F_2(k_y y)F_3(k_z z) = \mathrm{e}^{-j(k_x x+k_y y+k_z z)} = \mathrm{e}^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{6.9.12}$$

由(6.9.9)、(6.7.12b)式知它表示沿 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}_x k_x + \boldsymbol{a}_y k_y + \boldsymbol{a}_z k_z$ 方向的行波(平面波)。而自由空间平面波的 $\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{H}$)的方向处处相同，设该方向为 $\boldsymbol{a}_E$(或 $\boldsymbol{a}_H$)，则可认为只有一个 $\boldsymbol{a}_E$(或 $\boldsymbol{a}_H$)方向的电(磁)场分量。于是，$\Psi_k$ 代表的就是 $E$(或 $H$)：$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_E E = \boldsymbol{a}_E\Psi_k$(或 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_H H = \boldsymbol{a}_H\Psi_k$)。这就是 7.2 节要介绍的沿任意方向的均匀平面波。

上述情形中更简单的情形是 $k_x$、$k_y$、$k_z$ 中只有一个不为零，例如 $k_z \neq 0$。此时

$$\Psi_k = \mathrm{e}^{-jk_z z}$$

表示沿 $z$ 坐标轴传播的行波(见(6.7.7b))，它正是 7.1 节将要详细介绍的均匀平面波。

在 $k_x$、$k_y$、$k_z$ 都为实数的情况下，(6.9.10)、(6.9.11)式中对所有可能的 $k_x$、$k_y$ 值求和或积分，表示通解 $\Psi$ 由频率相同(由激励源给定)而传播方向($\boldsymbol{k}$)各异的许多平面波迭加而成，每一方向的平面波各有其特定的幅度 $C_{k_x,k_y}$ 或 $g(k_x,k_y)$。

## 二、圆柱坐标系中齐次标量波动方程的分离变量法

圆柱坐标系中求解波动方程的分离变量法是分析包括光纤在内的介质圆波导的必备基础。下面我们先在第 5 章介绍的二维拉普拉斯方程基础上介绍更一般的三维问题的解法，然后将其延伸到时谐场波动方程的求解。

按照和直角坐标系中同样的基本步骤，令 $\Psi = R(\rho)Q(\varphi)Z(z)$，则圆柱坐标下的拉普拉斯方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2} = 0 \tag{6.9.13}$$

可分离成三个常微分方程：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left(k_z^2 - \frac{m^2}{\rho^2}R\right) = 0 \tag{6.9.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}\varphi^2} + m^2 Q = 0 \tag{6.9.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} - k_z^2 Z = 0 \tag{6.9.16}$$

方程(6.9.14)称为贝塞尔方程。在 $k_z{}^2>0$ 的通常情形下，上述方程的解为

$$
\begin{aligned}
&R(k_z\rho)=A_m\mathrm{J}_m(k_z\rho)+B_m\mathrm{N}_m(k_z\rho)\\
&Q(\varphi)=\mathrm{e}^{\pm jm\varphi}\\
&Z(z)=\mathrm{e}^{\pm k_z Z}
\end{aligned}
\qquad (6.9.17)
$$

故方程(6.9.14)的通解为

$$
\Psi=\sum_{n=0}^{+\infty}R(k_z\rho)Q(\varphi)Z(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}[A_m\mathrm{J}_m(k_z\rho)+B_m\mathrm{N}_m(k_z\rho)]\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}m\varphi\cdot\mathrm{e}^{\pm k_z z}
\qquad (6.9.18)
$$

对于 $k_z{}^2=0$ 和 $k_z{}^2<0$ 的情形，也都各有相应的不同的解式。特别，当 $k_z{}^2=0$ 时，贝塞尔方程(6.9.14)就退化成第 5 章介绍的二维场的欧拉方程(5.2.5)。

时谐场中的齐次标量波动方程及其分离变量法可看成是上述拉普拉斯方程及其分离变量解法的延伸、推广。把 $\Psi=R(\rho)Q(\varphi)Z(z)$ 代入时谐场的波动方程：

$$
\nabla^2\Psi+k^2\Psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+k^2\Psi=0
\qquad (6.9.19)
$$

它就可被分离为与(6.9.14)~(6.9.16)形式几乎相同的三个常微分方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(k_\rho^2-\dfrac{m^2}{\rho^2}\right)R=0 & (6.9.20)\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}Q^2}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2Q=0 & (6.9.21)\\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}Z^2}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2Z=0 & (6.9.22)
\end{cases}
$$

其中

$$
k_\rho{}^2=k^2-k_z{}^2 \qquad (6.9.23)
$$

方程(6.9.21)、(6.9.22)的解分别为

$$
Q(\varphi)=g(m\varphi)=\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}m\varphi
$$

$$
Z(z)=F(k_z z)=\mathrm{e}^{\pm jk_z z}
$$

而贝塞尔方程(6.9.20)的解 $R(\rho)$ 常用 $\mathrm{B}_m(k_\rho\rho)$ 表示，它代表第一、二类贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(k_\rho\rho)$、$\mathrm{N}_m(k_\rho\rho)$ 或第一、二类汉克尔函数（也称第三类贝塞尔函数）$\mathrm{H}_m{}^{(1)}(k_\rho\rho)$、$\mathrm{H}_m{}^{(2)}(k_\rho\rho)$ 或它们的线性组合。于是，方程(6.9.19)的一个可能的解为

$$
\Psi_k=\mathrm{B}_m(k_\rho\rho)g(m\varphi)F(k_z z) \qquad (6.9.24)
$$

由于圆柱坐标系中 $z$ 仍是直线坐标，故(6.9.9)中所列的 $F(k_z z)$ 的各种可能形式仍然适用。

把(6.9.24)所示的基本波函数 $\Psi_k$ 对所有可能的 $m$、$k_\rho$ 取值求和或积分，就得到方程(6.9.19)的通解。这里只写出级数形式的通解：

$$
\Psi=\sum_m\sum_{k_z}C_{mk_z}\mathrm{B}_m(k_\rho\rho)g(m\varphi)F(k_z z) \qquad (6.9.25)
$$

第一、二、三类贝塞尔函数的性质和曲线见附录 A4。由于贝塞尔函数比较复杂，把它同我们熟悉的初等函数作如下定性的近似类比是有益的（这些类比是根据各类贝塞尔函数当 $\rho\to\infty$ 时的渐近公式作出的，从附录 A4 中各类贝塞尔函数的图像形状上也可看出）：

$$
\begin{array}{ll}
J_m(k\rho) \sim \cos k\rho & \text{表示驻波} \\
N_m(k\rho) \sim \sin k\rho & \text{表示驻波} \\
H_m^{(1)}(k\rho) \sim e^{jk\rho} & \text{表示向内传播的行波} \\
H_m^{(2)}(k\rho) \sim e^{-jk\rho} & \text{表示向外传播的行波}
\end{array}
\qquad (6.9.26)
$$

这里的波都是指柱面波。

由于 $\rho \to 0$ 时 $J_m(k\rho)$ 为有限值，故它通常用于表示含 $\rho = 0$ 的区域内的场；由于 $\rho \to 0$ 时 $N_m(k_\rho) \to \infty$，故 $N_m(k\rho)$ 用于表示 $\rho \neq 0$ 的区域或含有奇点的区域(如空心圆柱或含有线源的空间)的场；而 $H_m$ 常用于表示波的散射也就是外域中的场。总之，通解取哪种函数，待定常数取何值，都由具体问题的定解条件决定。

圆柱坐标下矢量波动方程(6.7.3)、(6.7.4)中只有直线坐标分量 $E_z$、$H_z$ 的方程仍为波动方程的形式，故(6.9.24)的解式 $\Psi_k$ 一般只能代表 $E_z$ 或 $H_z$〔从纯理论的角度，$\Psi_k$ 也可代表标量位或其他直角分量，例如 2.1 节提到的单模光纤中的 $E_x$：$E_x(\boldsymbol{r}) = E_x(\rho, \varphi, z)$，见 2.1 节〕，然后把 $E_z$、$H_z$ 代入旋度方程(6.5.14)或(6.5.15)求得横向分量。根据边界条件具体确定 $\Psi_k$ 的函数形式并进而导出各个横向分量的步骤将在 8.5 节针对光导纤维来演示。

球坐标系中波动方程的分离变量法的介绍从略。

## *6.10 非齐次标量波动方程的积分解法

对电磁波的求解，最终都归结为求解关于场强或动态位的一个齐次或非齐次的、矢量或标量的微分方程—波动方程。6.9 节介绍了求解齐次标量波动方程常用的解析法——分离变量法。它是直接求解微分方程(亥姆霍兹方程)，其解为基本波的迭加(级数形式)。本节将介绍求解有源区的非齐次标量波动方程的基本解析方法——积分方程法，特别是格林函数法。它是通过求解关于待求函数的积分方程来获得微分方程的解，其解为对源区积分的形式。

积分解法(如本节所介绍的两种方法)主要是利用标量格林定理(2.8.4)来导出待求标量波函数的积分解式。该定理的特点是能够把体积内的未知标量函数值($\Phi$)同它在边界面上的已知值 $\Phi$ 或 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ 相联系，因而便于利用来解决关于 $\Phi$ 的边值问题。由于格林定理是积分形式的矢量恒等式，所以由它导出的解也是积分形式的。

本节的解法主要是针对动态位的非齐次波动方程(6.8.11)、(6.8.12)，即求解复数达朗贝尔方程(非齐次亥姆霍兹方程)。在讨论中将省略复数符号，例如把 $\boldsymbol{A}$、$\Phi$、$\rho$ 写为 $A$、$\Phi$、$\rho$。

### 一、时谐场达朗贝尔方程的积分解法

为了避免考虑初始条件等复杂情况，这里我们把求解时域的达朗贝尔方程的克希霍夫积分法的思路用于稳态的时谐场。我们给出了求解的全过程，以表明不借助格林函数时应如何用积分法求解。同时，非齐次波动方程的该积分解法也包括了静态场中求解泊松方程的积分方程法的简单特例，故未在静态场专门介绍，而在本节作了详细介绍。

下面准备求解的是关于标量位 $\Phi$ 的非齐次波动方程(6.8.12)。对于矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的非齐次矢量波动方程(6.8.11)，由于 $\boldsymbol{A}$ 的三个直角坐标分量都满足与(6.8.12)同样形式的方程，因

此将随之而解。(从根本上说,$\boldsymbol{A}$ 和 $\Phi$ 是以(6.8.10)式相联系的,故方程(6.8.11)和(6.8.12)之中只需求解一个。)解出动态位之后,场强就可立即算出:

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} - \nabla\Phi \tag{6.8.9}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}$$

本节只介绍这种通过求解位函数来得出场强的间接求解方法。

假定所考虑的区域充满均匀、各向同性的线性介质,场源的分布已知。标量电位 $\Phi$ 和矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 之间若满足复数洛仑兹条件:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = -\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\Phi \tag{6.8.10}$$

则关于动态位 $\Phi$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的非齐次波动方程为复数达朗贝尔方程:

$$\nabla^2\Phi + k^2\Phi = -\rho/\varepsilon \tag{6.8.12}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} + k^2\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{J} \tag{6.8.11}$$

式中 $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$。

从方程(6.8.11)、(6.8.12)可以看出,在静态场中它们将退化为泊松方程,而在无源区将变为齐次波动方程。因此,我们可以预期它们的解既具有泊松方程解的形式,又具有齐次波动方程解的形式。

假设所考虑的空间为 $\tau$,它的全部边界为闭合面 $S$。欲求 $\tau$ 内任一场点 $P$ 处方程(6.8.12)的解式 $\Phi(\boldsymbol{r})$($\boldsymbol{r}$ 为 $P$ 点的位置矢量),可以利用标量格林定理

$$\oint_S(\Phi\nabla\varphi - \varphi\nabla\Phi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\tau(\Phi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}\tau \tag{2.8.4}$$

来建立闭合面内场量的体积分与闭合面上场量的面积分之间的联系。

令上式中 $\Phi$ 为区域 $\tau$ 中非齐次波动方程(6.8.12)的解,而辅助函数 $\varphi(R)$ 为 $\tau$ 中齐次波动方程

$$\nabla^2\varphi(R) + k^2\varphi(R) = 0 \tag{6.10.1}$$

的解。式中 $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$,$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 分别为场点和源点的位置矢量,因而对于特定的场点 $P$,$R$ 表示由场点引出的距离。$\varphi(R)$ 是 $\varphi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的简写。下面首先从方程(6.10.1)解出辅助函数 $\varphi$ 的表达式。

在球坐标下将(6.10.1)式展开,得

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) + k^2\varphi = 0 \tag{6.10.2}$$

若令 $\varphi = \dfrac{F(R)}{R}$,代入上式,则 $F$ 应满足的微分方程为

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} + k^2 F = 0$$

这一标量波动方程前已给出解式。由(6.7.7b)、(6.7.8b)式,知

$$F = A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR} + B\mathrm{e}^{\mathrm{j}kR}$$

其中 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}kR}$ 的瞬时形式 $B\cos\omega\left(t + \dfrac{R}{v}\right)$ 表示这个波函数在 $t$ 时刻的值是对后来的 $t + \dfrac{R}{v}$ 时刻才发生(在距离场点 $R$ 之远)的激励源的值的超前响应(称作超前位),是不合理的,应该舍去;又由于 $A$ 为任意常数都不会影响最终解的形式,故不妨取 $A$ 为 1,于是得到

$$\varphi(R)=\frac{e^{-jkR}}{R}=\frac{e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\varphi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\tag{6.10.3}$$

容易验证辅助函数(6.10.3)满足齐次波动方程(6.10.1)。

下面再求体积 $\tau$ 中任一场点 $P$ 处 $\Phi(\boldsymbol{r})$ 的积分表达式。为此，我们作一个以 $P$ 为球心，$R_0$ 为半径的小球面 $S_0$ 包围 $P$ 点。这样作是因为预见到当 $R_0\to 0$ 时，$S_0$ 上将有 $\Phi\to\Phi_P$，同时这样也从 $\tau$ 中挖掉了函数 $\frac{e^{-jkR}}{R}$ 的奇点 $R=0$。于是，体积 $\tau$ 的全部边界面 $S$ 就由 $S_1$ 和 $S_0$ 构成。$S_0$ 面上的法线照例应指向体积 $\tau$ 之外，即指向球心 $P$ 点，如图 6-20(a)所示。

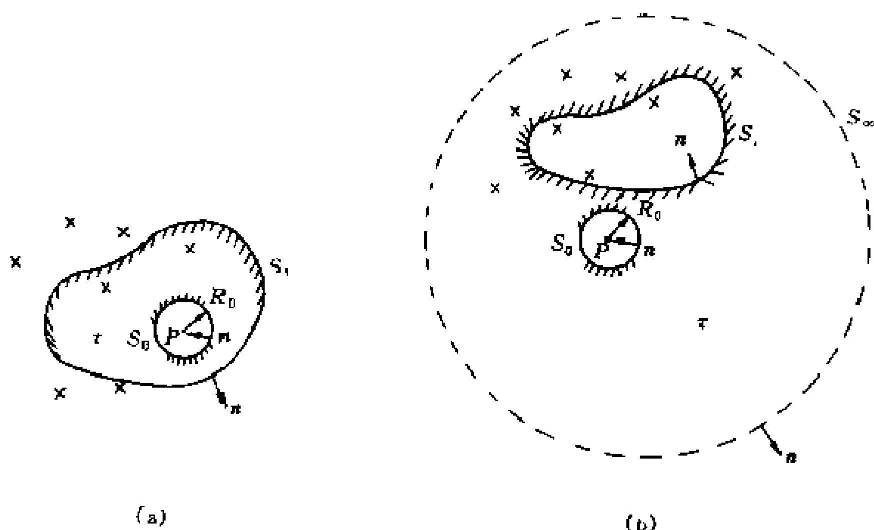



图 6-20 求 $P$ 点的标量波函数 $\Phi$
(a)内域问题；(b)外域问题。

把(6.10.3)式代入(2.8.4)式，就得到一个关于 $\Phi$ 的积分方程：

$$\int_{S}\left[\Phi\nabla\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)-\frac{e^{-jkR}}{R}\nabla\Phi\right]\cdot d\boldsymbol{S}+\int_{S_0}\left[\Phi\nabla\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)-\frac{e^{-jkR}}{R}\nabla\Phi\right]\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{\tau}(\Phi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\Phi)d\tau\tag{6.10.4}$$

从中可以导出 $\Phi$ 的表达式。

把(6.10.1)、(6.10.3)式，代入(6.10.4)式的右端，可求出该体积分：

$$\int_{\tau}(\Phi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\Phi)d\tau=\int_{\tau}[\Phi(-k^2\varphi)-\varphi\nabla^2\Phi]d\tau=-\int_{\tau}\varphi(\nabla^2\Phi+k^2\Phi)d\tau=\int_{\tau}\frac{\rho e^{-jkR}}{\varepsilon R}d\tau\tag{6.10.5}$$

再计算(6.10.4)式左边小球面 $S_0$ 上的面积分。注意到在球面 $S_0$ 上取梯度实际上是作用于源点坐标的，故我们以 $\nabla'$ 代替面积分式中的 $\nabla$，于是

$$\nabla'\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)=-\nabla\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)=\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}e^{-jkR}$$

$$\boldsymbol{R}\cdot d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{a}_R dS=RdS$$

$$-\nabla'\Phi\cdot d\boldsymbol{S}=\nabla\Phi\cdot\boldsymbol{a}_R dS=\frac{\partial\Phi}{\partial R}dS$$

因此在 $S_0$ 上的面积分变为

$$e^{-jkR_0}\left(\frac{1}{R_0^2}\int_{S_0}\Phi\,\mathrm{d}S+\frac{jk}{R_0}\int_{S_0}\Phi\,\mathrm{d}S+\frac{1}{R_0}\int_{S_0}\frac{\partial\Phi}{\partial R}\mathrm{d}S\right)$$

如果以 $\bar{\Phi}$ 表示$\Phi$ 在小球面$S_0$ 上的平均值,又令 $\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial R}=\frac{1}{4\pi R_0^2}\int_{S_0}\frac{\partial\Phi}{\partial R}\mathrm{d}S$ ,则上式可写成

$$e^{-jkR_0}\left(\frac{4\pi R_0^2\bar{\Phi}}{R_0^2}+jk\frac{4\pi R_0^2\bar{\Phi}}{R_0}+\frac{4\pi R_0^2}{R_0}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial R}\right)$$

当 $R_0\to0$ 时,上式第二、三项将消失,$e^{-jkR_0}\to1$,$\bar{\Phi}\to\Phi_P$,故上式之值将趋于 $4\pi\Phi_P$,即(6.10.4)式中小球面 $S_0$ 上的积分为

$$\int_{S_0}\left[\Phi\nabla\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)-\frac{e^{-jkR}}{R}\nabla\Phi\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\to4\pi\Phi_P \qquad (6.10.6)$$

把(6.10.5)和(6.10.6)代入积分方程(6.10.4)并把 $S_1$ 仍写成 $S$,经移项就得到任一场点($P$)处 $\Phi$ 的积分形式的解:

$$\Phi_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_\tau\frac{\rho e^{-jkR}}{R}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\frac{e^{-jkR}}{R}\nabla\Phi-\Phi\nabla\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (6.10.7)$$

也可写成

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_\tau\frac{\rho(\boldsymbol{r}')e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\frac{e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{r}')}{\partial n}-\Phi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\right]\mathrm{d}S \qquad (6.10.8)$$

上式就是在闭合面 $S$ 所界定的空间 $\tau$ 中关于标量位 $\Phi$ 的非齐次波动方程(6.8.12)的积分解的一般表达式。其中的第一项(记为 $\Phi_1$)是解的非齐次部分,表示体积 $\tau$ 中的源对场点 $P$ 的标量位值的贡献,是无界空间中非齐次波动方程 $\nabla^2\Phi_1+K^2\Phi_1=-\rho/\varepsilon$ 的解。第二项(记为 $\Phi_2$)是解的齐次部分,它实际上表示体积 $\tau$ 之外的源对 $\tau$ 内的场点 $P$ 的标量位值的贡献。对 $S$ 的面积分计算的就是这些外部的源在 $S$ 上的等效面源的贡献。$\Phi_2$ 是有界空间中齐次波动方程$\nabla^2\Phi_2+k^2\Phi_2=0$ 的解。$\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 的迭加使 $\Phi$ 满足非齐次标量波动方程(6.8.12)并满足 $S$ 上的边界条件—给定的 $\Phi|_S$ 和$\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_S$。

参看图6-20,界面 $S_1$ 将全空间划分成了内域和外域两部分。内域指 $S_1$ 所包围的内部空间 $\tau$,如图6-20(a)所示。外域指 $S_1$ 之外、由 $S_1$ 和 $S_\infty$(其半径 $R\to\infty$)所界定的空间 $\tau$,如图6-20(b)所示。根据前面的讨论显然上述解式对内域问题是适用的[只需把图6-20(a)中的 $S_1$ 理解为(6.10.7)或(6.10.8)式中的 $S$]。如果标量波函数 $\Phi(\boldsymbol{r})$满足无限远条件,则解式(6.10.7)或(6.10.8)不仅适用于内域,而且也适用于外域。注意,(a)、(b)两种情况下界面 $S_1$ 的法线方向是相反的。下面对外域问题中解式(6.10.7)的适用性加以证明。

根据格林定理(2.8.4),解式(6.10.7)中的闭合面 $S$ 应指外域$\tau$ 的全部界面$S_1+S_\infty+S_0$($S_0$ 无限缩小,最终消失),而在 $S_\infty$ 上有

$$\mathrm{d}S=R^2\mathrm{d}\Omega \quad (\mathrm{d}\Omega\text{ 是 }\mathrm{d}S\text{ 对}P\text{ 点所张的立体角}) \qquad (6.10.9)$$

$$\nabla'\Phi(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{n}=-\nabla\Phi\cdot\boldsymbol{a}_R=-\frac{\partial\Phi}{\partial R} \qquad (6.10.10)$$

$$\nabla'\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)=jk\frac{e^{-jkR}}{R}+\frac{e^{-jkR}}{R^2} \qquad (6.10.11)$$

(6.10.10)和(6.10.11)式中把梯度写成$\nabla'$是因为在边界面上求梯度是作用于源点 $\boldsymbol{r}'$的。此

外，还假设波函数 $\Phi$ 满足如下的无限远条件：

$$\lim_{R\to\infty} R\Phi = \text{有限值} \tag{6.10.12}$$

$$\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial R} + \mathrm{j}k\Phi\right) = 0 \tag{6.10.13}$$

其中(6.10.12)是和静态场中相同的有限性条件，它要求 $\Phi$ 在无限远处是正则的，即保证 $\Phi$ 以不低于 $R^{-1}$ 的速率减小。在时变场中，$\Phi$ 还必须附加满足(6.10.13)式的辐射条件，这是为了保证无限远处不存在场源，标量波函数 $\Phi$ 只表示向外传播的辐射波。这样，根据(6.10.9)～(6.10.13)式就会有

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{S_\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\nabla'\Phi(\boldsymbol{r}') - \Phi(\boldsymbol{r}')\nabla'\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\right)\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \lim_{R\to\infty}\oint_{S_\infty}\left[\Phi + R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial R} + \mathrm{j}k\Phi\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}\mathrm{d}\Omega = 0$$

这表示在外域问题中 $\Phi$ 的解式不含有来自无限远处的内向波，即 $\oint_{S_\infty} = 0$，故(6.10.7)式右边第二项对全部边界面 $S$ 的积分就只剩下 $\oint_{S_1}$〔参看图 6-20(b)〕。因此，外域中任一场点 $P$ 处 $\Phi$ 的解式仍是(6.10.7)或(6.10.8)。其中，体积分项表示外域中的源对外域中的场点 $P$ 的电位贡献，面积分项表示内域中的源发出的外向波在界面 $S_1$ 上造成的等效面源对 $P$ 点电位的贡献。

## 二、时谐场中的格林函数法

标量格林函数的一个重要应用就是求解非齐次的标量波动方程，也就是在给定了时变场源的分布时求解它们在所论空间产生的标量波函数。其思路和 5.7 节中用格林函数法求解泊松方程的思路是相同的，而后者也可看成前者在静态场的特例。

设在某空间 $\tau$ 中已知简谐变化的场源电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 以及 $\tau$ 的边界面 $S$ 上的边界条件。若待求的标量电位 $\Phi(\boldsymbol{r})$ 在 $\tau$ 中满足非齐次标量波动方程

$$\nabla^2\Phi + k^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{6.8.12}$$

则其相应的格林函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$（简写为 $G(R)$ 或 $G$）应满足方程

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{6.10.14}$$

用 $G$ 乘以(6.8.12)，$\Phi$ 乘以(6.10.14)，并把两式相减，得

$$G\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2 G = -\frac{\rho G}{\varepsilon} + \Phi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$$

把上式在体积 $\tau$ 中积分，得

$$\int_\tau (G\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2 G)\mathrm{d}\tau = -\int_\tau \frac{\rho G}{\varepsilon}\mathrm{d}\tau + \int_\tau \Phi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau$$

根据标量格林定理(2.8.4)并利用 $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r})$ 就得到

$$\oint_S \left(G\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}S = -\int_\tau \frac{\rho G}{\varepsilon}\mathrm{d}\tau + \Phi(\boldsymbol{r}')$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}') = \int_\tau \frac{\rho G}{\varepsilon}\mathrm{d}\tau + \oint_S \left(G\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{6.10.15}$$

上式就是用格林函数表示的 $\Phi(\boldsymbol{r})$ 的积分解的一般形式。从中可见，只要求出标量格林函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$，就可根据 $\tau$ 中已知的电荷分布和界面 $S$ 上的 $\Phi$、$\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ 的已知分布计算出任一场点 $\boldsymbol{r}$

处的标量位的复数振幅$\Phi(\boldsymbol{r})$。

在边界面 $S$ 上既给出$\Phi$，又要给出$\frac{\partial \Phi}{\partial n}$的要求过高，格林函数法的好处之一就在于可以简化边界条件。简化边界条件的思路同 5.7 节中介绍过的一样：

对于有限区域的边界面 $S$，若在第一、二、三类边值问题中分别要求 $G$ 满足齐次边界条件 $G|_S=0$、$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S=0$ 和 $\frac{\partial G}{\partial n}+\alpha G=0$，就可使(6.10.15)式中的面积分减少为一项。在这三类边界条件下求解关于 $G$ 的微分方程(6.10.14)可用镜像法、分离变量法、积分变换法等多种方法。

当界面 $S\to S_\infty$ 时，$G$ 应满足的"边界条件"是类似于(6.10.12)、(6.10.13)的无限远条件也称辐射条件

$$\lim_{R\to\infty} RG = \text{有限值} \tag{6.10.16}$$

$$\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial G}{\partial R}+\mathrm{j}kG\right)=0 \tag{6.10.17}$$

在该条件之下，不会有来自无限远处的内向波，因而当 $\tau$ 扩展为整个空间时，(6.10.15)式中的面积分项就会完全消失，只剩下体积分项。因此，满足无限远条件(6.10.16)、(6.10.17)的方程(6.10.14)的解就是时谐场中无界空间的格林函数。下面我们来求出它的表达式。

按照方程(6.10.14)的形状，$G$ 的解式既应具有齐次波动方程(6.10.1)的解式(6.10.3)的特点$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}$，又应具有泊松方程 $\nabla^2 G=-\delta(R)$的解

$$G=\frac{1}{4\pi R} \tag{5.7.6}$$

的特点。综合(6.10.3)和(5.7.6)，推测方程(6.10.14)的解式为

$$G(R)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi R}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{6.10.18}$$

这个推测的正确性可验证如下：把格林函数(6.10.18)代回方程(6.10.14)，

当 $R\neq 0$，易验算出等式成立(从略)；

当 $R=0$，做半径为 $R_0$ 的小球体 $\tau_0$ 包围 $R=0$ 即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$的点，在 $\tau_0$ 中对方程(6.10.14)的两端进行体积分。该式左端的体积分为

$$\int_0^{R_0}\left[(\nabla^2+k^2)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi R}\right]4\pi R^2\mathrm{d}R$$

当 $R_0\to 0$ 时，上式中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}\to 1$，故被积函数的第二项将正比于 $R$，即 $k^2\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi R}\cdot 4\pi R^2\propto R$，所以也趋于零，只剩下第一项：

$$\int_0^{R_0}\nabla^2\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi R}\right)4\pi R^2\mathrm{d}R=\int_{\tau_0}\nabla^2\left(\frac{1}{4\pi R}\right)\mathrm{d}\tau=\int_{\tau_0}-\delta(R)\mathrm{d}\tau$$

表明 $R=0$ 时(6.10.18)式也满足方程(6.10.14)。

又由于(6.10.3)和(5.7.6)都是无界空间的格林函数，故(6.10.18)也应是无界空间的。容易验算(6.10.18)式满足无限远条件(6.10.16)和(6.10.17)。

综上所述，推测的解式(6.10.18)确是时谐场中无界空间的格林函数。

这里我们顺便写出(6.10.18)式带有时间因子的形式及瞬时形式：

$$\dot{G}(R,t)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}}{4\pi R},\quad G(R,t)=\frac{\cos\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}{4\pi R} \tag{6.10.19}$$

容易看出，不限于时谐场的一般时变场（例如瞬变场）中无界空间的格林函数应为

$$G(R,t)=\frac{q\left(r',t-\frac{R}{v}\right)}{4\pi R}=\frac{q\left(r',t-\frac{|r-r'|}{v}\right)}{4\pi|r-r'|}=G(r,r',t)\quad(R=|r-r'|)\tag{6.10.20}$$

它是对一般的时变点源 $q(t)\delta(r-r')$ 的响应，是如下方程在无界空间的解：

$$\nabla^2G(r,r',t)-\mu\varepsilon\frac{\partial^2G(r,r',t)}{\partial t^2}=q(t)\delta(r-r')\tag{6.10.21}$$

把格林函数(6.10.18)代入(6.10.15)，即得到区域 $\tau$ 中标量波动方程(6.8.12)的解式为

$$\Phi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{\rho(r')e^{-jkR}}{R}d\tau+\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\frac{e^{-jkR}}{R}\frac{\partial\Phi(r')}{\partial n}-\Phi(r')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)\right]dS$$

这正是我们用克希霍夫积分法得到的解式(6.10.8)。该解式中仅有体积分项时即为滞后位，仅有面积分项时就是克希霍夫公式。它们都是求解天线辐射场的基础公式。

不难看出，本节所有的推导以至解式都与坐标系无关，因为位置矢量 $r$、$r'$ 的具体表达式并未被限定。

从以上介绍可以看出，两种积分解法实质上是相同的。事实上，(6.10.3)式的辅助函数 $\varphi(R)$ 就是任一点源以外的空间对该点源的响应。但是，格林函数法物理含义更明显，更具普遍意义，并且利用 $\delta$ 函数简化了求解过程（譬如 $\delta$ 函数的抽样特性免去了做小球面包围奇点的繁复步骤）。引入格林函数可以建立积分解式、积分方程，便于利用计算机数值计算的优势。

直接求解关于场矢量的非齐次矢量波动方程（它们是在麦克斯韦方程组中引入与电性源 $\rho$、$J$ 对偶的磁性源 $\rho_m$、$J_m$ 后导出的）

$$\nabla\times\nabla\times E-k^2E=-j\omega\mu J-\nabla\times J_m$$

$$\nabla\times\nabla\times H-k^2H=-j\omega\varepsilon J_m+\nabla\times J$$

将需要用到矢量格林定理和并矢格林函数等复杂知识[5][18]，因而将不在本教材中讨论。

## *6.11 直接求解麦克斯韦方程组的数值方法——时域有限差分法

6.9和6.10节介绍了由麦克斯韦方程导出波动方程，并变为频域问题后再求解的方法。但解析法对直接求解麦克斯韦方程组无能为力。如果采用时域有限差分法（FD－TD）这一数值解法，就可在给定的初始条件、边界条件下直接求解微分形式的麦克斯韦方程组，无需对方程组作任何变换（例如变为频域问题或变形为波动方程）而直接在时域求解。该方法对媒质没有任何限制，也不限于有源区还是无源区。它能提供方程的齐次部分和非齐次部分（限于稳态）的全部解答。这一数值方法的原理和特点简述如下：

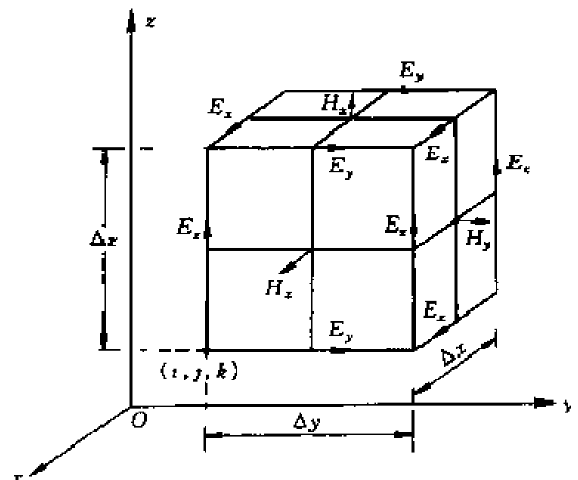



图6-21　空间的离散化——Yee氏网格

这种数值方法是把时、空都离散化，把空间划分为如图6-21的网格，时间上按步进的方式，沿 $t$ 轴上的时间点计算场中网格上的场点值。在空间

每一网格上反复运行同样的、从麦克斯韦旋度方程直接转换来的差分格式。网格上每一场点的计算都只涉及相邻场点的 $E$、$H$ 分量。

首先应把空间和时间都离散化。例如，把空间划分成 $N$ 个如图所示的立体网格。这种 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 相互环绕的网格是麦克斯韦旋度方程(6.3.5)、(6.3.6)的形象化，它直观地显示出时变的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 互为涡旋源。若空间和时间的步长分别为 $\Delta x$、$\Delta y$、$\Delta z$ 和 $\Delta t$，则空间点$(x,y,z)$的坐标就离散化为$(i\Delta x,j\Delta y,k\Delta z)$，时间坐标离散化为 $n\Delta t$。于是，场量 $\boldsymbol{F}$ 在 $t=n\Delta t$ 时刻$(x,y,z)$点处的函数值就可表示为

$$F_n(i,j,k)=F_n(i\Delta x,j\Delta y,k\Delta z,n\Delta t)$$

采用5.8节推导有限差分格式的同样方法，利用台劳级数就可把 $F$ 对$x$、$y$、$z$ 的偏导数近似变为沿 $x$、$y$、$z$ 方向的中心差商。例如以$(i,j,k)$点为中心的对 $x$ 的中心差商格式为

$$\frac{\partial F_n}{\partial x}=\frac{F_n(i+\frac{1}{2},j,k)-F_n(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x}+o(\Delta x) \tag{6.11.1}$$

$F$ 对 $t$ 的微商也近似用 $t=n\Delta t$ 处的中心差商代替为

$$\frac{\partial F_n(i,j,k)}{\partial t}=\frac{F_{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)-F_{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{\Delta t}+o(\Delta t) \tag{6.11.2}$$

$F$ 可表示任一个场分量。

由于要满足麦克斯韦旋度方程，时间步长与空间步长有一定的数量关系。譬如当时间经历了正弦波的一个周期 $T=n\Delta t$ 之后，波场中的等相位面应向前推进该辐射波的一个波长 $\lambda$。

另外，方程(6.3.5)、(6.3.6)须处理成对称的形式：

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}&=\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\sigma_e\boldsymbol{E}\\ \nabla\times\boldsymbol{E}&=-\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}+\sigma_m\boldsymbol{H}\end{aligned}\right\}\rightarrow\left\{\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}&=-\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{E}-\sigma_m\boldsymbol{H}) &(6.11.3)\\ \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}&=\frac{1}{\varepsilon}(\nabla\times\boldsymbol{H}-\sigma_e\boldsymbol{E}) &(6.11.4)\end{aligned}\right.$$

并展开成六个标量方程，然后就可把(6.11.1)和(6.11.2)所表示的差分格式代入进行计算了(实际上，为了简化编程，还要对与媒质有关的系数作一些对称性处理)。另外，为了以有限数量的网格模拟辐射、散射等开放区域(无界空间)的问题，还需要人为地截断网格空间，并在截断边界上用"吸收边界条件"处理，以便电磁波不被反射，如同被边界"吸收"了一般。

由于在计算过程中的每一时间步都对全场所有的网格进行一次计算，因而能够展示出场随时间的波动在空间传播的过程。也就是说，该数值解法把各类问题都作为初值问题来处理，因而能给复杂的物理过程描绘出清晰的物理图像。

由于每个网格的媒质参数可任意设置，故而处理非均匀、非线性、色散、各向异性等复杂媒质的问题十分方便。

由于电场和磁场分量是按图6-21的指向交叉设置的，又以差分格式代替了微分，恰恰适应了边界上场量的不连续、不可微，就使得边界条件能自然满足，能很方便地模拟复杂的构造、复杂的边界形状和材料特性。

由于每个网格点上的电(磁)场分量只与它上一时间步的值及周围环绕它的磁(电)场分量有关，故特别适合在许多网格点上同时并行计算；对每个网格点的计算只涉及6个场分量和4个媒质参数，又只须存贮上一步的计算结果，故节省存贮空间；如果空间划分为 $N$ 个网格单元，由于在空间的每个网格上反复运行同样的差分格式，故总的计算时间仅为每个网格点所需时间的 $N$ 倍；$N$ 越大即网格划分越细，计算量的节省越明显。

有些实际问题中，并不需要计算6个场分量。例如第8章将介绍的横电波，只需编制计算 $\frac{\partial E_y}{\partial t}$、$\frac{\partial H_x}{\partial t}$、$\frac{\partial H_z}{\partial t}$ 的程序。由于方程(6.11.3)和(6.11.4)的对称性，按 $E_z \leftrightarrow H_z, H_x \leftrightarrow -E_x, H_y \leftrightarrow -E_y, \mu \leftrightarrow \varepsilon, \sigma_m \leftrightarrow \sigma_e$ 的对应关系，这同一个程序又可用于计算横磁波的问题。

由于对不同研究对象的模拟往往仅体现为对网格赋值的不同，而旋度方程并不改变，吸收边界条件也往往可以通用，故而程序中只需修改有关的部分，因此对广泛的电磁问题具有通用性。

由于该方法是直接求解从麦克斯韦旋度方程派生出的差分方程，故而既简单又最具普遍性，适用于任何媒质、任何时变规律的场源。

总之，由于时域有限差分法的上述突出优点和适应复杂电磁问题的本性，它已被日益广泛地用于解决各个领域的复杂问题——复杂目标的电磁散射问题，雷达有效反射面计算，电磁兼容领域的透入、串扰问题，微波电路含有高速、宽带器件时的传输特性，光路的分析，电磁波在隧道中的传播，生物电磁剂量学中的问题以及瞬态电磁场问题（例如天线的瞬态辐射特性，核电磁脉冲防护、冲激脉冲雷达、目标识别、遥感和物探等方面的问题）。详细的计算步骤参阅文献[11]。

## 习 题 6

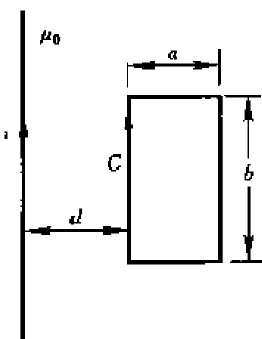
6.1 一根通以电流 $i$ 的无限长直导线旁有一矩形线框 $C$，二者共面，其相互位置及 $C$ 的走向如题6.1图示，求以下两种情况下线圈 $C$ 中的感应电动势 $e$：

①线圈 $C$ 不动，源电流按 $i=I_0e^{-\lambda t}$ 变化；$I_0$、$\lambda$ 为常数；

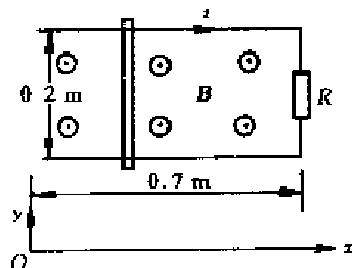
②源电流按 $i=I_0\cos\omega t$ 变化，同时 $C$ 以速度 $v$ 运动。

6.2 有一导体滑杆在两根平行的导体轨上滑动，整个装置位于正弦时变场 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_z 5\cos\omega t$(mT)之中，如题6.2图示，滑杆的位置由 $x=0.35(1-\cos\omega t)$(m)确定，轨道终端接有电阻 $R=0.2\,\Omega$，试求 $i$。

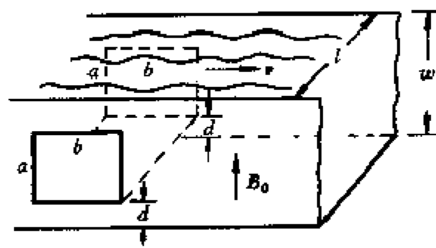
6.3 一种导电液体以速度 $v$ 在深 $w$、宽 $l$ 的水平渠道中流动，当地的地球磁场的垂直分量为 $B_0$，边长为 $a$、$b$ 的两张同样的矩形电极板立于液体中，贴在渠的两个立壁上，与湖底距离均为 $d$，如题6.3图示。



题 6.1图



题 6.2图



题 6.3图

①求两个电极之间所夹的液体的电阻；

②求两个电极之间所感生的电动势；

③如果在两个电极之间连一根电阻可以忽略的导线从而构成电流回路，求两极板间的电流；

$$H_x = \frac{\pi E_0}{\omega\mu_0 d}\cos\frac{\pi z}{d}\ \sin(\omega t - k_x x)$$

$$H_z = \frac{k_x E_0}{\omega\mu_0}\sin\frac{\pi z}{d}\ \cos(\omega t - k_x x)$$

其中 $\omega^2\mu_0\varepsilon_0 = k_x^2 + (\frac{\pi}{d})^2$；$d$、$k_x$、$\omega$、$E_0$ 均为常数。

①验证该电磁波(TE 波)满足无源区的麦克斯韦方程；

②验证它满足理想导体表面的边界条件，并求出表面电荷和感应面电流；

③求空间的位移电流分布。

6.19 一个真空中存在的驻波电磁场为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_x \mathrm{j} E_0 \sin kz$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0 \cos kz$$

其中 $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$，$\lambda$ 是波长。求 $z$ 为任意值时玻印廷矢量的的瞬时值 $\boldsymbol{S}(t)$ 和平均值 $\boldsymbol{S}_{均}$，并画出 $0 \leqslant z \leqslant \lambda/4$ 区间 $\boldsymbol{S}(t)$ 的振幅随 $z$ 变化的曲线，驻波的能流矢量在 $z = n\frac{\lambda}{4}$，$(2n+1)\frac{\lambda}{8}$ 时($n$ 为任意整数)取值有何特点？驻波有没有能量沿 $z$ 轴流动？

6.20 真空中一个 TM 波的电磁场为

$$E_x = -\mathrm{j}E_0 \cos\theta \sin\beta_z z \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_x x}$$

$$E_z = E_0 \sin\theta \cos\beta_z z \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_x x}$$

$$H_y = \frac{E_0}{\eta}\cos\beta_z z \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_x x}$$

其中 $\eta$、$\beta_x$、$\beta_z$、$\theta$ 都是常数，求能流矢量的瞬时表达式和平均能流矢量。

6.21 试证圆极化波

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_x \cos\omega t + \boldsymbol{a}_y \sin\omega t$$

$$\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{a}_x \frac{\sin\omega t}{\eta} + \boldsymbol{a}_y \frac{\cos\omega t}{\eta}$$

的玻印廷矢量 $\boldsymbol{S}(t)$ 是一个与 $t$ 无关的常数。

6.22 设沿 $z$ 方向传播的两个电磁波为

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{a}_x E_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 z/c}$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{a}_x E_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_2 z/c}$$

其中 $\omega_1 \neq \omega_2$，证明总的平均能流等于两个波的平均能流之和。

6.23 如果不采用关于电磁位的洛仑兹条件，而采用所谓库仑规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$，导出 $\boldsymbol{A}$ 和 $\Phi$ 所满足的微分方程。

6.24 证明关于动态位 $\boldsymbol{A}$、$\Phi$ 的洛仑兹条件与电流连续性方程(电荷守恒原理)是相容的。

*6.25 在无源区的一个平面波的电磁场为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}$$

其中 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{B}_0$ 和 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}_x k_x + \boldsymbol{a}_y k_y + \boldsymbol{a}_z k_z$ 为常矢量，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_x x + \boldsymbol{a}_y y + \boldsymbol{a}_z z$ 是点的位置矢量，试证：

①$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 满足波动方程的条件是$\dfrac{\omega}{k} = c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (k = |\boldsymbol{k}|)$；

②$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 满足麦克斯韦散度方程的条件是$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 0, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B} = 0$。

*6.26　在无源区($J = 0, \rho = 0$)可以引入一个矢量电位 $\mathbf{A}_m$ 和标量磁位 $\Phi_m$：

$$\boldsymbol{D} = -\nabla \times \mathbf{A}_m$$

$$\boldsymbol{H} = -\nabla\Phi_m - \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t}$$

试推导 $\mathbf{A}_m$ 和 $\Phi_m$ 的微分方程，并同 $\boldsymbol{A}$ 和 $\Phi$ 的达朗贝尔方程相比较。

# 第7章　平　面　波

波传播理论主要研究电磁场脱离源后的电磁运动规律，其主要内容就是在不考虑源的情况下，求出电磁场的解。电波传播作为一种电磁现象有多种不同的表现形式，这是因为除了激励源之外，电波传播问题一方面和媒质的电磁性质($\varepsilon$、$\mu$)有关，另一方面又和空间的几何特征有关。常见的电波传播例子有：自由空间平面波的传播，表面波的传播和导行波的传播等。

在电波传播的过程中，对应一任意时刻 $t$，空间电磁场中具有相同相位的点构成的等相位面，称为波阵面。波阵面为平面的电磁波称为平面电磁波。如果在平面波阵面的每点上电场 $E$ 和磁场 $H$ 的振幅都相等，这种平面波就称为均匀平面波。

本章主要讨论在无界的无耗和有耗媒质中均匀平面波的传播问题，也将讨论不同媒质分界面上平面波的反射和折射现象。

## 7.1　均匀平面波

为了讨论问题的方便起见，我们不妨把平面波的传播问题只限于单色波即单一频率的正弦波的情形。这并不失一般性，因为理论上可采用付立叶变换把复杂的波分解成单色波的叠加。我们先考虑均匀媒质的情形。由于在无界、均匀、线性、各向同性的理想媒质即完纯介质中，时谐场的电场 $E$ 满足的波动方程是

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{7.1.1a}$$

其中 $k$ 为实数，称为波数，且 $k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$，上述方程与坐标系无关。在不同坐标系中该三维波动方程的解法和通解已于6.9节介绍。这里着重讨论直角坐标下一维的情形。

### 一、均匀平面波的方程和解式

由6.7节的介绍和(6.7.10)式，我们知道平面波有一个特点，那就是波的传播方向(指波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向)对于空间各点和任意时刻都是固定不变的，我们选择此方向为 $z$ 轴正向。又由于均匀平面波的电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的大小在与其传播方向相垂直的平面内是处处相同的，即电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 只与坐标 $z$ 有关，因此(7.1.1a)可简化成

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{E}(z)}{\mathrm{d}z^2} + k^2 \boldsymbol{E}(z) = 0 \tag{7.1.1b}$$

一般来说，上述波动方程代表着 $\boldsymbol{E}$ 的三个直角分量的三个同此形式的标量波动方程。把这三个分量的解再矢量合成，就得到(7.1.1b)的解：

$$\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \tag{7.1.2a}$$

或

$$\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{+\mathrm{j}kz} \tag{7.1.2b}$$

$\boldsymbol{E}(z)$ 为电场强度复矢量，其中 $\boldsymbol{E}_0$ 为常矢量，在等相位面内，在传播方向上，也就是在整个空间，都不变化。

因为平面波传播的空间并无源的存在，因此

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

即
$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

将(7.1.2a)式代入上述方程,可得到

$$\boldsymbol{a}_z \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{7.1.3}$$

这表明电场不存在 $z$ 向分量,平面波的电场矢量存在于与波的传播方向垂直的平面中。如果我们选定电场的方向为 $x$ 轴正向,则矢量波动方程(7.1.1b)式可简化成关于 $x$ 分量的一个标量波动方程,其解为:

$$E_x(z) = E_m e^{-jkz} \tag{7.1.4}$$

其中 $E_m$ 为电场的振幅值。在时域,(7.1.4)式可表示为

$$E_x(z,t) = E_m \cos(\omega t - kz) = E_m \cos \omega\left(t - \frac{z}{v}\right) \qquad \left(v = \frac{\omega}{k}\right) \tag{7.1.5}$$

以上电场的表达式说明,这是沿 $z$ 轴正方向传播的均匀平面波。而电场的解(7.1.2b)是沿 $z$ 轴负方向传播的均匀平面波。图7-1、图7-2、图7-3分别示出了电场和磁场相互感应而生成波、均匀平面波的波阵面、正弦行波的相位传播的情形。

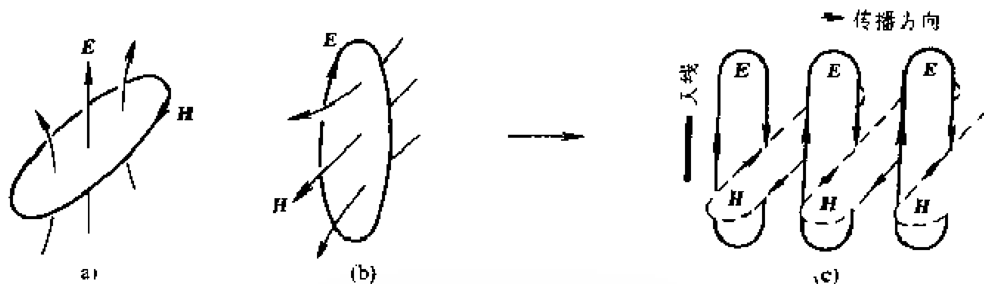



图7-1 电磁波的产生

(a) $\frac{\partial E}{\partial t}$ 感生 $H$——麦克斯韦第一方程;(b) $\frac{\partial H}{\partial t}$ 感生 $E$——麦克斯韦第二方程;

(c)麦克斯韦第一、二方程结合产生电磁波。

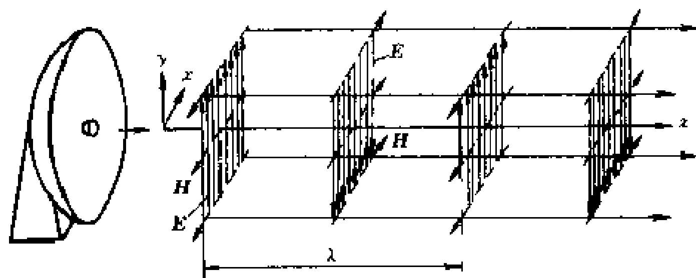



图7-2 平面波的波阵面上 $E$、$H$ 线分布示意图

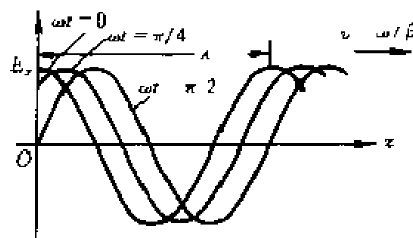



图7-3 正弦平面波的相位传播

## 二、描述均匀平面波的参数

在平面波传播的空间一定点、即(7.1.5)式中 $z$ 为常数的点,电场随时间变化的周期是

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{7.1.6}$$

振荡的频率是

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi} \tag{7.1.7}$$

频率是由激励源决定的，在任何媒质中，在空间的任一点，$f$ 都相同。

对于无耗媒质，磁导率 $\mu$ 和介电常数 $\varepsilon$ 都是实数，定义

$$\beta=k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\frac{\omega}{v} \tag{7.1.8}$$

由(7.1.5)式知道，$\beta z$ 代表相角，故 $\beta$ 代表电磁波沿 $z$ 方向传播时每单位距离改变的相位，单位为 rad/m，称为相移常数或波数。由(7.1.8)式可见，平面波的相位常数与电磁波的频率以及它所在空间中媒质的 $\mu$ 和 $\varepsilon$ 有关，由于正弦波一个周期的距离，即相位差为 $2\pi$ 的两点间的距离称为一个波长，以 $\lambda$ 表示(图 7-2)。因此

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{7.1.9}$$

由(6.7.7)和(7.1.5)，还可以知道无耗媒质中的均匀平面波的(垂直于等相面的)相速为

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\quad(\mathrm{m/s}) \tag{7.1.10}$$

因此，真空中的相速是 $v_0=c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ (m/s)。(7.1.10)式表明，在完纯介质中，相速只取决于介质的参数 $\mu$、$\varepsilon$，与波的频率无关。

根据前面的讨论，平面波的相速还可以表达为波长与频率的乘积：

$$v=\lambda f \tag{7.1.11}$$

根据平面波的电场表达式(7.1.4)，以及电磁场满足的旋度方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$$

可以得到磁场的复振幅表达式为

$$H_y=\frac{\beta}{\omega\mu}E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \tag{7.1.12}$$

上式在时域可以写成

$$H_y=\frac{\beta}{\omega\mu}E_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-\beta z)=\frac{E_{\mathrm{m}}\cos(\omega t-\beta z)}{\eta}=\frac{E_x}{\eta} \tag{7.1.13}$$

磁场的复振幅表达式也可写为

$$H_y=\frac{E_{\mathrm{m}}}{\eta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \tag{7.1.14}$$

式中

$$\eta=\frac{E_x}{H_y}=\frac{\omega\mu}{\beta}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{7.1.15}$$

具有阻抗的量纲，对于完纯介质，$\eta$ 仅与介质的参数有关，而与 $\omega$ 无关，因此被称为媒质的本征阻抗或本质阻抗；在真空中

$$\eta=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi\approx377\quad(\Omega) \tag{7.1.16}$$

由式(7.1.13)可以看出，均匀平面波的电场与磁场在时间上是同相的，在空间上相互垂直，振幅间的比值为 $\eta$。根据式(7.1.5)和(7.1.13)式可以画出在某一时刻 $t$ 电场和磁场沿 $z$

轴的分布，如图 7-4 所示（其中虚线所示为有耗媒质中的情形），图中的平面波随着时间 $t$ 沿 $z$ 轴正向以速度 $v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ (m/s)传播。

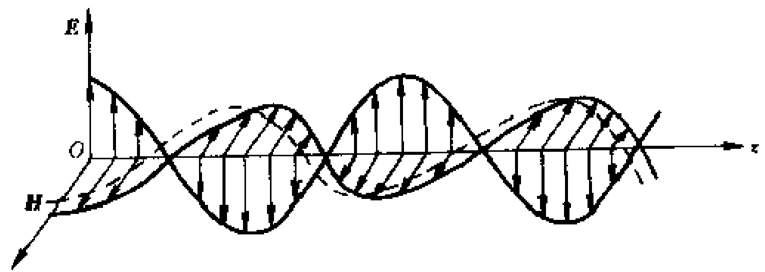



图 7-4 理想介质中均匀平面电磁波的电场和磁场

均匀平面波的瞬时玻印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

将电场和磁场的表达式(7.1.5)和(7.1.13)代入上述公式得到

$$\boldsymbol{S}(z,t)=\boldsymbol{a}_z\frac{E_x^2}{\eta}=\boldsymbol{a}_z\eta H_y^2=\boldsymbol{a}_z\eta H_0^2\cos^2(\omega t-\beta z) \tag{7.1.17}$$

表明平面波能量传输的方向垂直于电场和磁场所构成的平面，其大小和电场或磁场振幅的平方成正比。玻印廷矢量、电场矢量和磁场矢量的方向满足右手螺旋关系：即右手螺旋从 $\boldsymbol{E}$ 的方向到 $\boldsymbol{H}$ 的方向，则大拇指的指向（螺旋方向）就是均匀平面电磁波传播的方向。显然，这一关系与坐标系如何设置无关。习惯上，我们把这种电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 均垂直于电磁波传播方向的平面波称为横电磁波，简称 TEM 波。可以看出，尽管能流是变化的，但它总是正值，表示 $\boldsymbol{S}$ 总是顺着波传播的方向($\boldsymbol{k}=\beta\boldsymbol{a}_z$)流动的，不会逆 $\boldsymbol{k}$ 的方向流。$\boldsymbol{S}(z,t)$ 随时间角($\omega t-\beta z_0$)和空间角($\omega t_0-\beta z$)的变化曲线读者自己也是很容易描绘的。

容易算出均匀平面波的平均坡印廷矢量

$$\boldsymbol{S}_{平均}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)$$

将电场和磁场的复振幅表达式(7.1.4)和(7.1.14)换代入上述公式得到

$$\boldsymbol{S}_{平均}=\boldsymbol{a}_z\frac{|E_x|^2}{2\eta}=\boldsymbol{a}_z\frac{1}{2}\eta|H_y|^2 \tag{7.1.18}$$

由于 $E_m$、$H_m$ 在整个空间为常数，因而完纯介质中均匀平面波的平均能流是一个与时、空变量都无关的常矢量。它与波矢的指向一致，表示相位和能量的传播方向。

根据电场和磁场单位体积的储能公式

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

和

$$w_m=\frac{1}{2}\mu H^2$$

并利用式(7.1.5)和(7.1.15)，可得

$$w_e=w_m \tag{7.1.19}$$

这表明均匀平面波在任何时刻在空间任意一点单位体积的电场能量和磁场能量都是相等的。

## 7.2 均匀平面波的一般表达式

为了方便，我们上节仅限于讨论了沿 $z$ 轴正向传播的均匀平面波的一般特性，但工程上经常遇到的是沿任意方向传播的平面波的问题。因此，我们有必要提出关于均匀平面波的一般表达式（即不限于一维）的问题。由 6.7 节的介绍和(6.9.12)式，对于沿任意方向 $\boldsymbol{a}_k$

$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$传播的均匀平面波，如果定义一个波矢量 $\boldsymbol{k}$，其方向为 $\boldsymbol{a}_k$，其模为波数 $|\boldsymbol{k}|=\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}&=\boldsymbol{a}_x k_x+\boldsymbol{a}_y k_y+\boldsymbol{a}_z k_z\\&=\boldsymbol{a}_x k\cos\alpha+\boldsymbol{a}_y k\cos\beta+\boldsymbol{a}_z k\cos\gamma=k\boldsymbol{a}_k=\beta\boldsymbol{a}_k\end{aligned}\tag{7.2.1}$$

则

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=C\tag{7.2.1a}$$

或

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k_x x+k_y y+k_z z=C\tag{7.2.1b}$$

就表示与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的平面方程。其中 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\boldsymbol{a}_z z$ 为任一场点的位置矢量。因此，可用 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ 来表示平面波的相位，即

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\qquad(\boldsymbol{E}_0\text{ 为常矢量})\tag{7.2.2a}$$

其瞬时表达式为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_0\cos[\omega t-(k_x x+k_y y+k_z z)]\tag{7.2.2b}$$

平面方程(7.2.1)表示平面波(7.2.2)的等相面，而波矢量 $\boldsymbol{k}=-\nabla(-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$则为等相面的负梯度矢量，因而它指向相位滞后得最快的方向。容易验证式(7.2.2)满足波动方程(7.1.1a)。与此同时，无源区电场的解还必须满足

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$$

所以有

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{E}_0\cdot\nabla\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=0$$

于是得到

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0=0\tag{7.2.3}$$

式(7.2.2)就是均匀平面波的一般表达式，$\boldsymbol{k}$ 的大小就是波数，其方向 $\boldsymbol{a}_k$ 就是平面电磁波传播的方向。均匀平面波的一般表达式必须满足(7.2.3)的条件，即电场的方向与平面波前进的方向垂直，所以均匀平面电磁波的电场是横波。

特别地，当 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}_z k_z=\boldsymbol{a}_z\beta$，即是沿 $z$ 轴方向传播的平面电磁波，此时 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k_z z=\beta z$，式(7.2.2)就成为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

这和式(7.1.2a)一样，表明上节讨论的平面波是我们现在讨论的均匀平面波的一个特殊情况。参看图 6-17。

平面电磁波的磁场可由麦克斯韦方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$ 导出。由电场的表达式(7.2.2)容易计算

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

从而可以得到

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\eta}\boldsymbol{a}_k\times\boldsymbol{E}\tag{7.2.4}$$

或

$$\boldsymbol{E}=\eta\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{a}_k\tag{7.2.5}$$

(7.2.4)式表明磁场与平面波的前进方向 $\boldsymbol{a}_k$ 也垂直，可见磁场也是横波。

下面讨论一下平面波沿不同方向的相速度、波长、能速。为方便起见，我们以二维的情形(例如在 $xz$ 面上)来说明问题。从图 7-5 可以看到：

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_y 37.7e^{2\pi z}, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_x \frac{1}{10}e^{2\pi z}$$

$$\boldsymbol{S}_{平均} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*\right) = \boldsymbol{a}_z \eta_0 H^2 = \boldsymbol{a}_z 1.885\ \mathrm{W/m^2}$$

## 7.3 电磁波的极化

电磁波的极化是电磁理论和工程应用中的一个基本概念,它指电磁波的电场矢量在空间的取向。很多物理现象都与电磁波的极化有关。比如电视的接收天线需水平配置,而手持电话机的天线需垂直布置,就是考虑了二者有不同的极化方向。

本节我们讨论均匀平面波的极化问题。常以电场矢量的端点在空间(随时间变化)所画的轨迹来划分极化的类型。为方便起见,我们选沿 $z$ 轴方向传播的均匀平面波为研究对象。均匀平面波没有 $z$ 轴方向的分量,一般可用 $E_x$ 和 $E_y$ 分量来表示。如果 $E_y = 0$,只有 $E_x$,则为沿 $x$ 轴方向极化的平面波;如果 $E_x = 0$,只有 $E_y$,则为沿 $y$ 轴方向极化的平面波。

在一般情况下,$E_x$ 和 $E_y$ 分量都存在,这两个分量的振幅和相位不一定相同,因此波的极化方向也是复杂的。可分三种情况来讨论:

### 一、直线极化

时变电磁场的电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 在空间的取向固定不变的极化称为直线极化。对于直线极化波,电场矢量的两个分量的相位应该相同,或相差180°。为此我们可以假定

$$E_x = E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi)$$

则

$$E_y = E_{ym}\cos(\omega t - kz + \varphi)$$

其中 $E_{xm}$ 和 $E_{ym}$ 为振幅值、$\varphi$ 为初始相位。

合成电场的大小是

$$E = \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2}\cos(\omega t - kz + \varphi)$$

合成电场的取向与 $x$ 轴的夹角 $\alpha$:

$$\alpha = \arctan\frac{E_y}{E_x} = \arctan\frac{E_{ym}}{E_{xm}}$$

上式中,由于 $E_{xm}$ 和 $E_{ym}$ 是不随时间变化的常数,因此 $\alpha$ 也不随时间变化,故合成电场端点的轨迹始终位于与 $x$ 轴成 $\alpha$ 角的直线上,称为直线极化波。由于均匀平面波的电场 $\boldsymbol{E}_0$ 各处相同,若一点为直线极化,意味着各处均为相同的线极化,因此可称为线极化波。由于沿传输方向各点的振动方向均相同,它们组成了一个平面,可称为线极化面。如图7-6所示。

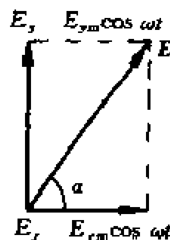



图7-6 直线极化

### 二、圆 极 化

一个时变场的电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 的端点在空间随时间做圆周运动的极化称为圆极化。对于圆极化波,电场矢量的两个分量的振幅应该相同,而相位差为90°或270°。以相位差90°为例,我们可以假定

$$E_x = E_m\cos(\omega t - kz + \varphi)$$

则

$$E_y = E_m\cos(\omega t - kz + \varphi - 90°) = E_m\sin(\omega t - kz + \varphi)$$

合成电场的振幅是

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_m$$

故电场的大小是不变化的。

合成电场的取向与 $x$ 轴的夹角 $\alpha$：

$$\tan\alpha = \frac{E_y}{E_x} = \tan(\omega t - kz + \varphi)$$

$$\alpha = \omega t - kz + \varphi$$

上式表明合成电场的矢端在一圆周上以角速度 $\omega$ 旋转。当 $E_y$ 较 $E_x$ 滞后 90°时，沿逆时针方向旋转；反之，当 $E_y$ 较 $E_x$ 超前 90°时，沿顺时针方向旋转。如图 7-7 所示

由于均匀平面波的电场 $\boldsymbol{E}$ 各处相同，若一点为圆极化，则各点均为圆极化，可称为圆极化波。圆极化波与线极化波不同之处在于，电场矢量是沿着传播方向 $\boldsymbol{a}_k$ 旋转的。在某一时刻 $t$，顺着 $\boldsymbol{a}_k$ 的方向看过去，如果空间各点 $E$ 的矢端顺时针方向旋转，则为右旋波，反之为左旋波。

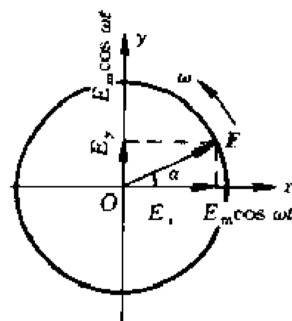



图 7-7 圆极化

### 三、椭圆极化

时变电磁场电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 的端点在空间随时间沿椭圆周运动的极化称为椭圆极化。一般情况下，$E_x$ 和 $E_y$ 之间有一任意相位差 $\varphi$，振幅也不相同。我们可以假定

$$E_x = E_{xm}\cos(\omega t - kz)$$

则

$$E_y = E_{ym}\cos(\omega t - kz - \varphi)$$

为讨论方便而又不失一般性，可在以上二式中取 $z = 0$，由此 $E_x$ 和 $E_y$ 成为

$$E_x = E_{xm}\cos\omega t \qquad E_y = E_{ym}\cos(\omega t - \varphi)$$

在此二式中消去 $t$，可得

$$\frac{E_x^2}{E_{xm}^2} + \frac{E_y^2}{E_{ym}^2} - \frac{2E_xE_y}{E_{xm}E_{ym}}\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

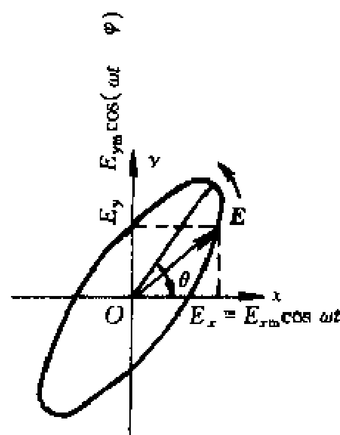



图 7-8 椭圆极化

这是一个椭圆方程，说明合成电场矢量端点的运动轨迹为椭圆，如图 7-8 所示。当 $\varphi > 0$ 时，它反时针方向旋转；当 $\varphi < 0$ 时，它顺时针方向旋转。我们可以证明，椭圆的长轴与 $x$ 轴的夹角 $\theta$ 由下式决定：

$$\tan 2\theta = \frac{2E_{xm}E_{ym}}{E_{xm}^2 - E_{ym}^2}\cos\varphi$$

直线极化波和圆极化波都可以看成是椭圆极化波的特殊情况。当椭圆的长短轴相等时，椭圆极化波退化成圆极化波，当椭圆的短轴缩为零时，椭圆极化波则退化成直线极化波。

下面我们再用复数形式来概括一下上述三种极化形态。

在前一章,我们引入了复振幅的概念,当时只把它当作一个便于记忆的数学符号。这里将说明,用复振幅表示的二维复矢量,实际上就是极化的反映,一个二维复矢量就代表了一种极化形态。下面以均匀平面波说明这个问题。

我们已经证明,一个无衰减的均匀平面波可用 $\boldsymbol{E}_0 e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 来表示,其中 $\boldsymbol{E}_0$ 是垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的复矢量。如果取 $\boldsymbol{k}$ 平行于 $z$ 轴,则 $\boldsymbol{E}_0$ 就是位于 $xOy$ 平面内的复矢量,即

$$\boldsymbol{E}_0 = E_x \boldsymbol{a}_x + E_y \boldsymbol{a}_y$$

$E_x$ 和$E_y$ 均为复数,$E_x = E_{xm}e^{j\varphi_x}$,$E_y = E_{ym}e^{j\varphi_y}$。$E_x$ 与$E_y$ 二者不可能全为零,不仿设 $E_y \neq 0$,于是

$$\frac{E_x}{E_y} = Ae^{j\varphi}$$

其中,$A = \frac{E_{xm}}{E_{ym}}$,$\varphi = \varphi_x - \varphi_y$。根据 $A$ 的大小和$\varphi$ 的大小,可将 $\boldsymbol{E}_0$ 分为三类:

| | |
|---|---|
| $\varphi = 0,\pi$ | 线极化 |
| $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}, A = 1$ | 圆极化 |
| $\varphi$ 其他 | 椭圆极化 |

以上分类是根据复矢量的矢端曲线的形状加以区分的。

## 7.4 损耗媒质中的均匀平面波

前面我们讨论了非导电媒质中平面波的传播问题,其特点是在非导电媒质内没有能量损耗,电磁波无衰减地传播。实际的媒质都是有损耗的,分为媒质的导电损耗($\sigma \neq 0$)和非完纯媒质的损耗。我们仍然假定媒质保持均匀、线性及各向同性等特性。

导电媒质的损耗是由于具有自由电子,因而在导电媒质内,只要有电磁波的存在,就会引起传导电流,从而损耗电磁波的能量。

### 一、有耗媒质中的波动方程及其解式

设均匀平面波沿 $z$ 轴方向传播,电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 只与坐标 $z$ 有关。设电场只有 $E_x$ 分量,$E_x$ 满足的波动方程为

$$\frac{d^2E_x(z)}{dz^2} + k^2E_x(z) = 0 \tag{7.4.1}$$

其中 $k^2 = \omega^2\mu\epsilon_c$。$\epsilon_c$ 是复电容率

$$\epsilon_c = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \tag{7.4.2}$$

方程(7.4.1)的解答之一是

$$E_x(z) = E_0 e^{-jkz} \tag{7.4.3}$$

这是沿 $z$ 轴正向传播的平面波。由于 $k$ 是复数,考虑到媒质的损耗会引起波的衰减,我们令

$$k = \beta - j\alpha \tag{7.4.4}$$

结合常数 $k$ 的表达式,解得 $\alpha$ 和$\beta$ 的值为

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]}\quad (\text{Np/m,奈培/米}) \tag{7.4.5a}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]}\quad (\text{rad/m}) \tag{7.4.5b}$$

因此电场 **E** 的表达式是

$$E_x(z) = E_0 e^{-\alpha z} e^{j\beta z} \tag{7.4.6}$$

上式表明，电场以 $e^{-\alpha z}$ 的因子随 $z$ 衰减，而 $\alpha$ 是说明平面波沿 $z$ 轴方向传播每单位距离衰减程度的常数，称为波的衰减常数。在良导体中，比如在金属里面，导电常数 $\sigma$ 很大，$\alpha$ 也因此很大，故波的衰减很快。面 $\beta$ 反映每单位距离落后的相位，称为平面波的相位常数。

正如理想媒质中平面波的情形一样，知道相位常数之后，就可以求出平面波在导电媒质中传播的波长 $\lambda = 2\pi/\beta$ 和相速度 $v = \omega/\beta$。由公式(7.45b)知道，在良导体中，$\beta$ 随 $\sigma$ 加大，平面波的波长变短，速度减慢。

由公式(7.4.5b)看到，对于有耗媒质，$\beta$ 与 $\omega$ 之间有一复杂的关系，因此相速 $v = \omega/\beta$ 也和频率有关系。因此，在同一媒质当中，不同频率的电磁波以不同的速度传播，这种现象称为色散现象，相应的媒质称为色散媒质。

我们已经知道，对于完纯介质，在均匀平面电磁波同一点的电场与磁场在空间上是互相垂直的，在时间上是同相的，但是在导电媒质中并非如此。由麦克斯韦方程

$$\nabla \times \dot{\boldsymbol{E}} = -j\omega\mu\dot{\boldsymbol{H}}$$

及电场的表达式(7.4.6)，可以求出有耗媒质中的磁场是

$$\dot{H}_y = \frac{k}{\omega\mu}E_x \tag{7.4.7}$$

根据本征阻抗的定义

$$\eta_c = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}} \tag{7.4.8}$$

上式中，$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$。(7.4.8)式表明，导电媒质中的本征阻抗是一个复数，因此，平面波的电场与磁场在时间上有相位差，磁场滞后(见图 7-4)。电场与磁场的关系可写成

$$H_y = \frac{1}{\eta_c}E_x \tag{7.4.9}$$

电场与磁场在空间上仍然垂直，这和理想媒质的情形一样。

## 二、高损耗媒质或良导体中的均匀平面波

我们现在可以讨论高损耗媒质或良导体的情况，尤其是良导体在无线电工程中有着广泛的应用，它是一种高损耗媒质。导体中的传导电流比位移电流大得多。对于良导体有 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$，(7.4.5a)和(7.4.5b)式可以近似为

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{7.4.10a}$$

$$\beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{7.4.10b}$$

$$P=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}|\boldsymbol{J}_S|^2 \tag{7.4.18}$$

由于是 $J_S$ 面电流，所以我们可以将$\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$定义为表面电阻。良导体的面阻抗公式(7.4.11)可以写成

$$\eta_c=R_S+\mathrm{j}X_S$$

其中 $R_S=X_S=\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$，是良导体的表面电阻和表面电抗。

为了便于工程应用，表 7.1 列出了几种常见金属的电导率、趋肤深度和表面电阻。

**表 7.1　几种典型金属的电导率、趋肤深度和表面电阻**

| 材料名称 | 电导率 $\sigma$(S/m) | 趋肤深度 $\delta$(m) | 表面电阻 $R_S$(Ω) |
|---|---|---|---|
| 金 | $4.1\times10^7$ | $0.0786/\sqrt{f}$ | $3.10\times10^{-7}\sqrt{f}$ |
| 银 | $6.17\times10^7$ | $0.0642/\sqrt{f}$ | $2.52\times10^{-7}\sqrt{f}$ |
| 紫铜 | $5.8\times10^7$ | $0.0660/\sqrt{f}$ | $2.61\times10^{-7}\sqrt{f}$ |
| 铝 | $3.72\times10^7$ | $0.0826/\sqrt{f}$ | $3.26\times10^{-7}\sqrt{f}$ |
| 黄铜 | $1.57\times10^7$ | $0.127/\sqrt{f}$ | $5.01\times10^{-7}\sqrt{f}$ |
| 锡 | $0.706\times10^7$ | $0.185/\sqrt{f}$ | $7.73\times10^{-7}\sqrt{f}$ |
| 石墨 | $0.01\times10^7$ | $1.6/\sqrt{f}$ | $6.25\times10^{-6}\sqrt{f}$ |

良导体的损耗用表面电阻 $R_S$ 可以写成

$$P=\frac{1}{2}|H_t|^2R_S \tag{7.4.19}$$

或

$$P=\frac{1}{2}|J_S|^2R_S \tag{7.4.20}$$

在工程计算中，通常是先假定导体的导电率为无限大，由此求出导体表面的切向磁场 $H_t$，再根据(7.4.19)式就能很方便地计算出导体对电磁波的损耗。

## 三、低损耗媒质或非完纯介质中的均匀平面波

介质除了欧姆损耗外，一般情况下还存在非完纯介质的损耗问题。非完纯介质的损耗可用复介电常数来表示，即

$$\varepsilon_c=\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon'' \tag{7.4.21}$$

将以上表达式和(7.4.2)式相比较，可以看出

$$\varepsilon=\varepsilon',\quad \sigma=\omega\varepsilon'' \tag{7.4.22}$$

表明非完纯介质的损耗和具有电导率 $\sigma=\omega\varepsilon''$的导电媒质的损耗是等效的。相应的损耗角正切是

$$\tan\delta_c=\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \tag{7.4.23}$$

这样，相应于(7.4.5a)和(7.4.5b)式，在非完全介质中的衰减常数和传播常数分别是

$$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2}-1\right]} \tag{7.4.24a}$$

$$\beta=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2}+1\right]} \tag{7.4.24b}$$

都具有各向异性的特征。利用铁氧体各向异性的特征，人们制成了隔离器、环形器、相移器和双工器等，这些器件在微波工程中占有相当的地位，成为微波系统中不可缺少的基本元器件。各向异性媒质的介电常数 $\varepsilon$ 或磁导率 $\mu$ 与外部电场矢量或磁场矢量有密切的关系，在数学上要用张量来描述。

## 一、等离子体中的电磁波

等离子体是除气体、液体和固体以外的第四种物质形态，它是由电子、负离子、正离子及未电离的中性分子组成的混合体。等离子体中总的电荷量为零，对外呈中性。地球周围的电离层就是一种天然的等离子体。人们就是利用电离层实现短波广播的。核电站的核反应堆是典型的人造等离子体。为了研究等离子体中电波的传播特性，显然我们必须把等离子体看作一种介质，并找出代表等离子体电磁特性的磁导率和介电常数。一般情况下，等离子体中自由电子的浓度很小，其磁导率近似等于真空中的磁导率 $\mu_0$，从而使问题的研究简化为只求介电常数。在外场作用下，等离子体中电子和离子做定向运动形成运流。由于离子的质量比电大得多，在高频外场的作用下，离子相对于电子可以看成是不动的。因此我们可以把等离子体中的运流看成是仅由自由电子的运动形成的。

设在电磁波的传播方向（$z$ 轴正向）还存在一个较强的外加均匀恒定磁场 $\boldsymbol{B}_0$。则等离子体中的电子要受到电场力和磁场力的双重作用，总的受力为

$$\boldsymbol{F} = -e[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}_0)] \tag{7.5.1}$$

式(7.5.1)即洛仑兹公式。式中 $e$ 是电子的电量，是电子的平均速度，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 是电磁波的交变电磁场。由于电磁波的交变磁场 $\boldsymbol{B}$ 相对于恒定磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 要小得多，而且 $\boldsymbol{B}$ 产生的作用力也远小于电场力的作用，故在计算电子的总受力时，可忽略交变磁场 $\boldsymbol{B}$ 的作用。根据牛顿第二定律，我们可以把(7.5.1)式写成

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0) \tag{7.5.2}$$

上式中 $m$ 为电子的质量。对于一定频率的电磁波，其电磁场都是随时间按正弦变化的，电子的速度也是按正弦变化的。因此我们可以(7.5.2)式写成复振幅的分量形式

$$\mathrm{j}\omega v_x = -\frac{e}{m}E_x - \omega_c v_y \tag{7.5.3}$$

$$\mathrm{j}\omega v_y = -\frac{e}{m}E_y - \omega_c v_x \tag{7.5.4}$$

$$\mathrm{j}\omega v_z = -\frac{e}{m}E_z \tag{7.5.5}$$

式中 $\omega_c = \frac{e}{m}B_0$，称为回旋角频率。它反映了电子在均匀磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 中做圆周运动时的角速度。容易计算出电子的回旋半径是

$$R = \frac{mv}{eB_0} \tag{7.5.6}$$

由(7.5.3)～(7.5.5)式解出

$$v_x = -\frac{e}{m} \cdot \frac{\mathrm{j}\omega E_x + \omega_c E_y}{\omega_c^2 - \omega^2} \tag{7.5.7}$$

$$v_y = -\frac{e}{m} \cdot \frac{\mathrm{j}\omega E_y - \omega_c E_x}{\omega_c^2 - \omega^2} \tag{7.5.8}$$

$\|\varepsilon\|$的各元素由(7.5.15)式给定。

(7.5.17)式表明,由于外加恒定磁场的存在,使得等离子体表现为各向异性媒质。如果取消外加磁场,即 $B_0=0$,则可以得到

$$\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=0,\quad \varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}$$

此时,$\|\varepsilon\|$的对角线上元素全部相同,而对角线外的元素全部为零,则等离子体表现为各向同性媒质。

现在我们可以通过介电常数$\|\varepsilon\|$来讨论电磁波在等离子体中的传播问题。我们仅限于讨论沿 $z$ 轴正方向传播的均匀平面波的情形。由于有外加恒定磁场,$\|\varepsilon\|$是一个张量,电磁波应该满足的麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\|\varepsilon\|\cdot\boldsymbol{E} \tag{7.5.18a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\cdot\boldsymbol{H} \tag{7.5.18b}$$

从以上两个方程中消去 $\boldsymbol{H}$,得到电场 $\boldsymbol{E}$ 的波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+\omega^2\mu_0\|\varepsilon\|\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{7.5.19}$$

上式写成矩阵形式即为

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\begin{bmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{bmatrix}+\omega^2\mu_0\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}&\varepsilon_{12}&0\\\varepsilon_{21}&\varepsilon_{22}&0\\0&0&\varepsilon_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{bmatrix}=0 \tag{7.5.20}$$

对于线极化均匀平面波可设电场只有 $E_x$ 分量,代入上式可得

$$\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}+\omega^2\mu_0\varepsilon_{11}E_x=0$$

和

$$\omega^2\mu_0\varepsilon_{21}E_x=0$$

上式中,由于 $\varepsilon_{21}\neq0$,故只能是 $E_x=0$。这表明在外加恒定磁场的等离子体中不存在线极化均匀平面波的解。以下我们来考察等离子体内圆极化均匀平面波的情形。

对于沿 $z$ 轴正向传播的右旋圆极化平面波,其电场强度可以表述为

$$\boldsymbol{E}=E_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{a}_x-\mathrm{j}\boldsymbol{a}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \tag{7.5.21}$$

$k$ 为平面波的波数。将电场的表达式代入波动方程(7.5.20),得

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\begin{bmatrix}E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\\-\mathrm{j}E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\\0\end{bmatrix}+\omega^2\mu_0\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}&\varepsilon_{12}&0\\\varepsilon_{21}&\varepsilon_{22}&0\\0&0&\varepsilon_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\\-\mathrm{j}E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\\0\end{bmatrix}=0$$

展开后得到

$$-k^2E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+\omega^2\mu_0(\varepsilon_{11}-\mathrm{j}\varepsilon_{12})E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=0 \tag{7.5.21a}$$

$$\mathrm{j}k^2E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+\omega^2\mu_0(\varepsilon_{21}-\mathrm{j}\varepsilon_{22})E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=0 \tag{7.5.21b}$$

因为根据(7.5.15),$\varepsilon_{21}=-\varepsilon_{12}$,$\varepsilon_{22}=\varepsilon_{11}$,我们容易看出以上两个方程实际上是一个方程。可以解出右旋极化波的波数为

$$k^2=\omega^2\mu_0(\varepsilon_{11}-\mathrm{j}\varepsilon_{12})=\omega^2\mu_0\varepsilon_0\left[1+\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega_c-\omega)}\right]$$

即

$$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\left[1+\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega_c-\omega)}\right]^{1/2} \tag{7.5.22}$$

这说明了等离子体中右旋极化波的解是存在的。

对于左旋圆极化平面波

$$\boldsymbol{E}^- = E_m(\boldsymbol{a}_x + \mathrm{j}\boldsymbol{a}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \tag{7.5.23}$$

$k$ 为平面波的波数。我们同样可以解出左旋极化波的波数为

$$k^2 = \omega^2\mu_0(\varepsilon_{11} - \mathrm{j}\varepsilon_{12}) = \omega^2\mu_0\varepsilon_0\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega_c + \omega)}\right]$$

即
$$k^- = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega_c + \omega)}\right]^{1/2} \tag{7.5.24}$$

左旋极化波的解也是存在的。

从式(7.5.22)和(7.5.24)可以看出，在等离子体中，右旋圆极化平面波和左旋圆极化平面波的波数是不相等的，波的相速因此也不一样。

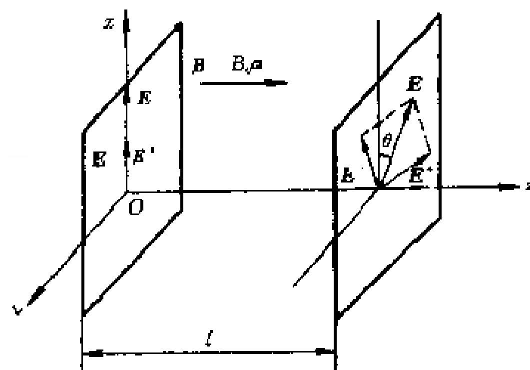



图 7-9 法拉第旋转效应

对于在等离子体中激化出的线极化平面波，由于它不能以线极化波形式传播，即不会保持原来的极化面，但是由于线极化波可以分解成两个幅度相等但旋转方向相反的圆极化波，而圆极化波是可以在等离子体中传播的。这两个圆极化波的电场矢量以相同的角速度旋转，但它们的相速却是不相等的，因此，在它们传播一段距离后，合成波的极化方向(如图 7-9 所示)和当初的极化方向就不一样了，也就是说电场矢量的取向发生了偏转，即电磁波的线极化方向随波的前进在不断地旋转，这就是等离子体中波的法拉第旋转效应。

现在我们来具体计算线极化平面波通过空间距离为 $l$ 的等离子体所发生的旋转角度。设电波前进方向为 $z$ 轴正向，两个圆极化波的电场矢量分别是

$$\boldsymbol{E}^+ = E(\boldsymbol{a}_x - \mathrm{j}\boldsymbol{a}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k^+z}$$

$$\boldsymbol{E}^- = E(\boldsymbol{a}_x + \mathrm{j}\boldsymbol{a}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k^-z}$$

正号表示右旋圆极化波，负号表示左旋圆极化波。在 $z=0$ 处，合成场是沿 $x$ 轴方向的线极化波。当电磁波通过了等离子体时，合成波的电场矢量是

$$\boldsymbol{E} = E(\boldsymbol{a}_x - \mathrm{j}\boldsymbol{a}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k^+l} + E(\boldsymbol{a}_x + \mathrm{j}\boldsymbol{a}_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k^-l}$$

电场矢量偏离 $x$ 轴的角度 $\theta$ 可由其 $E_y$ 分量和 $E_x$ 之比确定，即

$$\tan\theta = \frac{E_y}{E_x} = \tan\left(\frac{k^+ - k^-}{2}l\right)$$

因此

$$\theta = \frac{k^- - k^+}{2}l \tag{7.5.25}$$

由于等离子体中右旋圆极化波和左旋圆极化波的波数是不相等的，因此当线极化波在通过等离子体时，其电场的指向在不断旋转，旋转角度的大小取决于左、右旋波的波数之差和传播的距离。由此可见，在等离子体中沿恒定磁场方向传播的线极化波的极化面围绕该恒定磁场旋转。

利用法拉第旋转效应可以测量等离子体浓度。采用高频电磁波，即 $\omega \gg \omega_p$，从式(7.5.22)和(7.5.24)可以得到

$$k^- - k^+ \approx \frac{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,\omega_p^2\omega_c}{\omega^2} \approx \frac{\omega_p^2\omega_c}{c\omega^2}$$

此时的旋转角度

$$\theta = \frac{k^- - k^+}{2} l \approx \frac{e^3 B_0 N}{2c\omega^2\varepsilon_0 m^2} l \tag{7.5.26}$$

上述结果表明，只要我们已知 $\omega$、$B_0$ 和 $l$，再根据测得的偏转角 $\theta$，就可以计算出等离子体中的电子密度 $N$。

## 二、铁氧体中的电磁波

铁氧体是由二价的金属(入锰、镁)与 $Fe_2O_3$ 烧结而成的一种复合化合物。它是一种类似于陶瓷的材料，质地硬而脆。与金属材料相比，具有很高的电阻率，因此电磁波在其内传播时的衰减不大。铁氧体的相对介电常数较高，通常 $\varepsilon_r$ 在 5 到 20 之间，其相对磁导率也很高，$\mu_r$ 通常在 $10^2$ 到 $10^4$ 之间。研究和工程实践表明，当铁氧体有外加恒定磁场时，也会象等离子体一样表现出各向异性的特征。以下我们来分析其作用机理。

原子核周围的电子存在自转和绕核的公转这两种运动，它们都将产生磁矩。对于一般物质，电子的公转磁矩因电子的随机运动是相互抵消的，对外并不呈现磁性。电子的自转磁矩对于一般物质也是相互抵消的，但是，对于铁氧体这种物质情况就并非如此，而是在它内部的极小区域中，电子的自转磁矩在方向上会呈现出一定的一致性，自发磁化形成所谓的磁畴。在没有外加磁场的情况下，这些磁畴的磁矩相互抵消，因此铁氧体对外也不呈现磁性。但是当铁氧体被置于外加磁场时，这些磁畴就会在外加磁场的作用下发生偏转，并趋向于外磁场的方向，从而对外产生强大的磁性。

由于电子具有质量和电量，当电子围绕其轴作自转时，就产生了自旋角动量 $\boldsymbol{G}$ 和自旋磁矩 $\boldsymbol{P}_m$，它们之间的关系是

$$\boldsymbol{P}_m = -\frac{e}{m}\boldsymbol{G} = -\gamma\boldsymbol{G} \tag{7.5.27}$$

其中 $e = 1.602\times10^{-19}$ C，是电子电荷量的绝对值；$m = 9.107\times10^{-31}$ kg，是电子的质量。(7.5.27)式的负号是因为电子的电荷是负的，导致自旋磁矩与自旋角动量的方向相反。常数 $\gamma$ 是磁矩与角动量大小的比值，称为自旋回磁比。它的值是

$$\gamma = \frac{e}{m} = 1.76\times10^{11} \quad [\mathrm{m^2/(Wb\cdot s)}] \tag{7.5.28}$$

当铁氧体受到外加恒定磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 作用时，电子的磁矩就受到力矩的作用，力矩是

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{P}_m \times \boldsymbol{B}_0 \tag{7.5.29}$$

该力矩使电子的角动量发生变化，其关系为

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t} \tag{7.5.30}$$

利用式(7.5.27)和(7.5.29)得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_m}{\mathrm{d}t} = -\gamma\boldsymbol{B}_0\times\boldsymbol{P}_m = \boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{P}_m \tag{7.5.31}$$

式中 $\boldsymbol{\omega}_0$ 是电子进动的角速度矢量，它由关系式

$$\boldsymbol{\omega}_0 = -\gamma\boldsymbol{B}_0 = -\gamma\mu_0\boldsymbol{H}_0 \tag{7.5.32a}$$

或
$$\omega_0 = \gamma B_0 = \gamma\mu_0 H_0 \tag{7.5.32b}$$
确定,称为进动角频率或拉莫尔角频率。式(7.5.31)是描述 $\boldsymbol{P}_m$ 受到外加磁场作用后的进动方程,称为自旋磁矩的进动方程。

式(7.5.31)是描述单个电子受到外加磁场作用后的进动方程,如果单位体积的铁氧体内的自旋电子个数为 $N$,则单位体积的磁矩为
$$\boldsymbol{M} = N\boldsymbol{P}_m \tag{7.5.33}$$
$\boldsymbol{M}$ 称为磁化强度,于是单个电子的进动方程(7.5.31)可以改写为
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} = \gamma \boldsymbol{B}_0 \times \boldsymbol{M} = \gamma\mu_0 \boldsymbol{H}_0 \times \boldsymbol{M} = \omega_0 \times \boldsymbol{M} \tag{7.5.34}$$

现在我们来考察铁氧体内电磁波的传播情况。设在铁氧体中,除外加了一个使铁氧体达到饱和磁化的恒定磁场 $\boldsymbol{H}_0$,并设 $\boldsymbol{H}_0$ 的方向与 $z$ 轴正方向一致。还有一个比 $\boldsymbol{H}_0$ 小得多的交变磁场 $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{a}_x h_x + \boldsymbol{a}_y h_y + \boldsymbol{a}_z h_z$,则总的磁场为
$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{a}_x h_x + \boldsymbol{a}_y h_y + \boldsymbol{a}_z (h_z + H_0) \tag{7.5.35}$$
相应的磁化强度是
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{a}_x m_x + \boldsymbol{a}_y m_y + \boldsymbol{a}_z (m_z + M_0) \tag{7.5.36}$$
上式中,$\boldsymbol{m}$ 为交变磁场 $\boldsymbol{h}$ 产生的磁化强度,$\boldsymbol{M}_0$ 为恒定磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 产生的磁化强度,并满足
$$|\boldsymbol{m}| \ll |\boldsymbol{M}_0|$$

将式(7.5.34)中的 $\boldsymbol{H}_0$ 和 $\boldsymbol{M}$ 分别用式(7.5.35)和(7.5.36)的 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 代替,并略去高阶小量后,得
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{m}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\mu_0 (\boldsymbol{M}_0 \times \boldsymbol{h} + \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}_0) \tag{7.5.37}$$
对于正弦交变磁场,上式可以用复振幅表示法写成
$$\mathrm{j}\omega \boldsymbol{m} = -\gamma\mu_0 (\boldsymbol{M}_0 \times \boldsymbol{h} + \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}_0) \tag{7.5.38}$$
写成分量的形式即为
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{j}\omega m_x &= -\gamma\mu_0(-m_y H_0 - M_0 h_y) \\ \mathrm{j}\omega m_y &= -\gamma\mu_0(-m_x H_0 + M_0 h_x) \\ \mathrm{j}\omega m_z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.5.39}$$
由方程组(7.5.39)解得
$$\left.\begin{aligned} m_x &= \frac{(\mu_0^2\gamma^2 M_0 H_0)h_x + (\mathrm{j}\omega\mu_0\gamma M_0)h_y}{\mu_0^2\gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \\ m_y &= \frac{(\mu_0^2\gamma^2 M_0 H_0)h_y - (\mathrm{j}\omega\mu_0\gamma M_0)h_x}{\mu_0^2\gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \\ m_z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.5.40}$$
已知拉莫尔角频率
$$\omega_0 = \gamma B_0 = \gamma\mu_0 H_0 = \frac{e}{m} B_0 \tag{7.5.41}$$
令
$$\omega_m = \gamma\mu_0 M_0 = \frac{e}{m}\mu_0 M_0 \tag{7.5.42}$$
则(7.5.40)式可以写成

$$
\left.
\begin{aligned}
m_x &= \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x + \mathrm{j} \frac{\omega \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y \\
m_y &= \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y - \mathrm{j} \frac{\omega \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x \\
m_z &= 0
\end{aligned}
\right\} \tag{7.5.43}
$$

媒质磁化后,时变磁感应强度与磁化强度之间的关系是

$$
\boldsymbol{b} = \mu_0(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{m}) = \| \mu \| \cdot \boldsymbol{h} \tag{7.5.44}
$$

式中 $\| \mu \|$ 称为张量磁导率。

利用 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 的关系式(7.5.43),可由(7.5.44)式求出

$$
\| \mu \| = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix} \tag{7.5.45}
$$

其中

$$
\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_0 \left( 1 + \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \tag{7.5.46}
$$

$$
\mu_{12} = - \mu_{21} = \mathrm{j} \mu_0 \frac{\omega \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{7.5.47}
$$

$$
\mu_{33} = \mu_0 \tag{7.5.48}
$$

我们可以看到,当没有外加恒定磁场,即 $\boldsymbol{H}_0 = 0$ 时,则有 $\omega_m = 0$, $\| \mu \|$ 退化成为一个标量,此时铁氧体呈现出各向同性的特征。

类似于讨论电磁波在等离子体中的传播问题,我们仅限于讨论沿 $z$ 轴正方向传播的均匀平面波的情形。由于铁氧体有外加恒定磁场,电磁波应该满足的麦克思韦方程是

$$
\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j} \omega \epsilon \boldsymbol{E} \tag{7.5.49a}
$$

$$
\nabla \times \boldsymbol{E} = - \mathrm{j} \omega \| \mu \| \cdot \boldsymbol{H} \tag{7.5.49b}
$$

消去 $\boldsymbol{E}$,得到电场 $\boldsymbol{H}$ 的波动方程

$$
\frac{\partial^2}{\partial z^2} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} + \omega^2 \epsilon_0 \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{7.5.50}
$$

容易验证,和等离子体的情形一样,在外加恒定磁场的铁氧体中不存在线极化均匀平面波的解。对于沿 $z$ 轴正向传播的圆极化波

$$
\boldsymbol{H}^+ = H^+ (\boldsymbol{a}_x - \mathrm{j} \boldsymbol{a}_y) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k^+ z} \tag{7.5.51a}
$$

和

$$
\boldsymbol{H}^- = H^- (\boldsymbol{a}_x + \mathrm{j} \boldsymbol{a}_y) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k^- z} \tag{7.5.51b}
$$

代入波动方程(7.5.50),并利用(7.5.46)~(7.5.48)式,最后可以得到

$$
k^+ = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon} \left( 1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 - \omega} \right)^{1/2} \tag{7.5.52a}
$$

和

$$
k^- = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon} \left( 1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 + \omega} \right)^{1/2} \tag{7.5.52b}
$$

同等离子体一样,在外加恒定磁场的铁氧体中圆极化波的解是存在的。但是,左、右旋圆极化平面波的波数是不相等的,波的相速因此也不一样。

当线极化平面波通过铁氧体时，将分解成两个幅度相等但旋转方向相反的圆极化波，但由于它们的相速不相等，合成波的极化方向随波的前进在不断地旋转，产生法拉第旋转效应。

## 7.6 均匀平面波的垂直入射

前面我们讨论了平面波在无界空间中的传播问题。但实际上，波在无限大均匀媒质中的传播只是传播问题的一种特殊情况。在一般情况下，电磁波在其传播的途中会遇上不同的媒质，在媒质的分界面两侧，由于媒质的电磁特性不一样，将出现波的反射等特征。

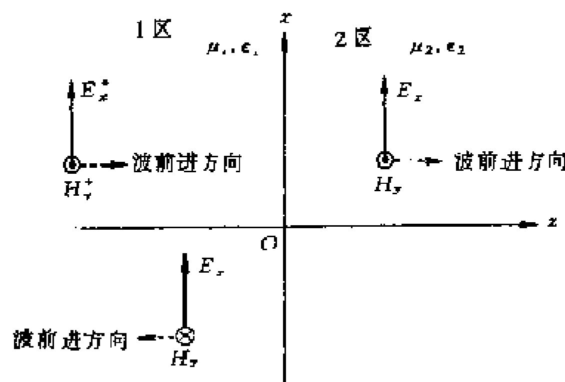


图 7-10 均匀平面波的垂直入射

### 1. 向介质平面的垂直入射

当入射波到达介质分界面时，会在分界面上感应出随时间变化的电荷，形成新的波源。新波源产生向分界面两侧传播的波，其中与入射波在同一侧的波称为反射波，进入分界面另一侧波则称为透射波或折射波。在分界面两侧，入射波、反射波和透射波应该满足波动方程，而在分界面上，它们必须满足电磁场的边界条件。

如图 7-10 所示，设沿 $x$ 轴方向极化的均匀平面波朝 $z$ 轴方向传播。$z=0$ 处为介质的分界面，在 $z<0$ 的一侧，完纯介质或理想媒质的参数为 $\varepsilon_1$ 和 $\mu_1$，在 $z>0$ 的一侧，理想媒质的参数为 $\varepsilon_2$ 和 $\mu_2$。

入射波电场可表示成

$$E_x^+ = E_m^+ e^{-j\beta_1 z} \tag{7.6.1}$$

其中入射波的波数为

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$$

入射波的磁场可根据 7.2 节介绍的 $\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{H}$ 关系算出：

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\eta}\boldsymbol{a}_k \times \boldsymbol{E} \tag{7.2.4}$$

其中 $\boldsymbol{a}_k$ 为波传播方向的单位矢量，此处 $\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}_z$，故得到

$$H_y^+ = \frac{E_x^+}{\eta_1} = \frac{E_m^+}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} \tag{7.6.2}$$

$\eta_1$ 为 1 区(入射波区)的本征阻抗。

当入射波到达介质的分界面 $z=0$ 时，形成反射波和透射波(也称传输波)。反射波在 1 区沿 $-z$ 轴方向方向传播，其电场与 $x$ 轴平行，可表示为

$$E_x^- = E_m^- e^{j\beta_1 z} \tag{7.6.3}$$

反射波的磁场根据(7.2.4)式，求得

$$H_y^- = -\frac{E_x^-}{\eta_1} = -\frac{E_m^-}{\eta_1} e^{j\beta_1 z} \tag{7.6.4}$$

透射波在 2 区沿 $+z$ 轴方向传播，其电场(上标 t 表示 transmitted)与 $x$ 轴平行，为

$$E_x^t = E_m^t e^{-j\beta_2 z} \tag{7.6.5}$$

$\beta_2$ 是透射波的波数，其大小为

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} \tag{7.6.6}$$

透射波的磁场根据公式(7.2.4),得

$$H_y^t = \frac{E_x^t}{\eta_2} = \frac{E_m^t}{\eta_2}e^{-j\beta_2 z} \tag{7.6.7}$$

$\eta_2$ 为 2 区(透射波区)的本征阻抗。$E_x^t$ 和 $H_y^t$ 即为图 7-10 中的 $E_{x2}^+$ 和 $H_{y2}^+$。

反射波和透射波的大小 $E_m$ 和 $E_m^t$ 可以根据边界条件来确定。在分界面两侧,合成场电场强度矢量的切向分量应该连续,即

$$E_{1t} = E_{2t}$$

1 区和 2 区的电场与分界面平行,即是分界面的切向,因此在 $z=0$ 的分界面两侧,有

$$E_m^+ + E_m = E_m^t \tag{7.6.8}$$

由于在理想介质的分界面上不存在电流,因此磁场强度矢量的切向分量也应该连续,即

$$H_{1t} = H_{2t}$$

将分界面 $z=0$ 两侧的磁场代入上式得

$$\frac{E_m^+}{\eta_1} - \frac{E_m}{\eta_1} = \frac{E_m^t}{\eta_2} \tag{7.6.9}$$

联立求解方程(7.6.8)和(7.6.9),得到

$$E_m = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}E_m^+ \tag{7.6.10}$$

$$E_m^t = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}E_m^+ \tag{7.6.11}$$

定义反射波与入射波大小之比为反射系数,即

$$R = \frac{E_m}{E_m^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \tag{7.6.12}$$

同样,定义透射波与入射波大小之比为透射系数,即

$$T = \frac{E_m^t}{E_m^+} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \tag{7.6.13}$$

对于两媒质均为理想的情况,本征阻抗 $\eta_1$ 和 $\eta_2$,反射系数 $R$ 和透射系数 $T$ 均为实数。一般情况下,$R$ 和 $T$ 可为复数。由 $R$ 与 $T$ 的公式容易看出,它们之间有如下关系:

$$1 + R = T \tag{7.6.14}$$

已知 $E_m = RE_m^+$,可以得到 1 区中的合成电场为

$$E_{1x} = E_m^+(e^{-j\beta_1 z} + Re^{j\beta_1 z}) \tag{7.6.15}$$

根据(7.6.2)、(7.6.4)和(7.6.12)式,求得 1 区中的合成磁场为

$$H_{1y} = \frac{1}{\eta_1}E_m^+(e^{-j\beta_1 z} - Re^{j\beta_1 z}) \tag{7.6.16}$$

2 区中为透射电磁场。

入射波、反射波和透射波的能流密度关系如下:

在 1 区,玻印廷矢量的平均值可以根据合 1 区的合成电场和合成磁场求出为

$$\boldsymbol{S}_{平均} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_1^*] = \frac{|E_m^+|^2}{2\eta_2}(1 - R^2)\boldsymbol{a}_z \quad (z=0) \tag{7.6.17}$$

2 区玻印廷矢量的平均值为

$$S_{平均}=\frac{|E_m^+|^2}{2\eta_2}T^2\boldsymbol{a}_z \quad (z=0) \tag{7.6.18}$$

(7.6.17)式表明,1 区玻印廷矢量的平均值是入射波玻印廷矢量的平均值$|E_m^+|^2/(2\eta_1)$与反射波玻印廷矢量的平均值 $R^2|E_m^+|^2/(2\eta_1)$的差值。

根据 $R$ 和 $T$ 的公式,容易验证(7.6.17)和(7.6.18)式是相等的,因此有

$$\frac{|E_m^+|^2}{2\eta_1}=\frac{|E_m^+|^2}{2\eta_1}R^2+\frac{|E_m^+|^2}{2\eta_2}T^2 \tag{7.6.19}$$

说明入射波的能流等于反射波的能流和透射波的能流之和。能量守恒规律是成立的。

当分界面的两侧为非理想媒质时,可用复介电常数 $\varepsilon_C$ 或复磁导率 $\mu_C$ 来分析。

2. 向理想导体平面的垂直入射

当媒质 1 为理想介质,而媒质 2 为理想导体时,平面波的垂直入射分析起来最为简单。此时媒质 1 的本征阻抗是实数,而媒质 2 的本征阻抗为

$$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon-\mathrm{j}\sigma/\omega}}=0 \tag{7.6.20}$$

上式为零,是因为理想导体的电导率 $\sigma$ 为无穷大。

根据 $R$ 和 $T$ 的公式,求得理想导体的反射系数和透射系数分别是

$$R=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=-1 \tag{7.6.21}$$

$$T=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}=0 \tag{7.6.22}$$

这说明理想导体中不存在透射波,而电磁波被完全反射回入射波的空间。反射波电磁场为

$$E_x=-E_m^+e^{\mathrm{j}\beta z} \tag{7.6.23}$$

$$H_y=\frac{E_m^+}{\eta}e^{\mathrm{j}\beta z} \tag{7.6.24}$$

$\beta$ 和 $\eta$ 分别为入射波空间的波数和本征阻抗。

入射波空间的合成电场是

$$E_r=E_m^+(e^{-\mathrm{j}\beta z}-e^{\mathrm{j}\beta z})=-2\mathrm{j}E_m^+\sin\beta z \tag{7.6.25}$$

这是一个驻波,在 $\beta z=-n\pi$ 或 $z=-n\lambda/2$ 的各位置电场为零($n=0,1,2,\cdots$);而在 $\beta z=-(2n+1)\pi/2$ 或 $z=-(2n+1)\lambda/4$ 的各位置电场最大。如图 7-11 所示。

根据(7.6.16)和(7.6.21)式,求得合成磁场为

$$H_y=\frac{1}{\eta}E_m^+(e^{-\mathrm{j}\beta z}+e^{\mathrm{j}\beta z})=\frac{2}{\eta}E_m^+\cos\beta z \tag{7.6.26}$$

合成磁场在空间和电场垂直,其分布也是个驻波。和电场的驻波相比,错开了 1/4 个波长的距离,也就是在电场的零点为磁场的最大点;而电场的最大点为磁场的零点。

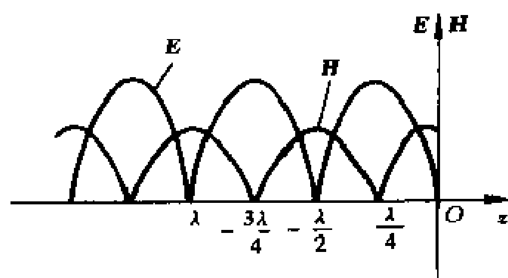


图 7-11 纯驻波

纯驻波的特点是:驻波的两个相邻的波腹(最大值位置)之间的距离为 $\lambda/2$;驻波的两个相邻的波节点(最小值位置)之间的距离也是 $\lambda/2$。驻波的平均玻印廷矢

量为零，即没有能量传输，因为

$$S_{平均} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-4\mathrm{j}\frac{|E_m^+|^2}{\eta}\sin\beta z\cos\beta z\right]\boldsymbol{a}_z = 0$$

因此，在纯驻波情形下，只有电能和磁场之间的能量相互交换而无能量传播。

在导体的表面 $z=0$ 处，电场为零，而磁场为最大值。导体表面的电流根据

$$\boldsymbol{J}_S = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}|_{z=0} \tag{7.6.27}$$

此处 $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{a}_z$，在上式中代入磁场矢量的表达式，得到面电流密度矢量

$$\boldsymbol{J}_S = \frac{2}{\eta}E_m^+\boldsymbol{a}_x \tag{7.6.28}$$

**例 7.3** 空气中有一频率为300 MHz、电场振幅 $E_m = 1$ V/m的均匀平面波垂直入射到一大而厚的铜板上，已知铜的参数为 $\mu=\mu_0, \varepsilon=\varepsilon_0, \sigma=5.8\times10^7$ S/m，求：

(1)铜板中的电、磁场和传导电流密度；

(2)表面为1 m² 的铜板所吸收的功率。

**解** (1)因为 $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \dfrac{5.8\times10^7}{2\pi\times300\times10^6\times\dfrac{1}{36\pi}\times10^{-9}} = 348\times10^7 \gg 100$，铜可当作良导体处理。于是均匀平面波在铜中传播时的传播常数和波阻抗等，均可用良导体的近似公式计算：

$$\alpha=\beta=\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} = \sqrt{\pi\times3\times10^8\times4\pi\times10^{-7}\times5.8\times10^7} = 26.2\times10^3 \tag{Ⅰ}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}}(1+\mathrm{j}) = \sqrt{\frac{\pi\times3\times10^8\times4\pi\times10^{-7}}{5.8\times10^7}}(1+\mathrm{j}) = 4.52\times10^{-3}(1+\mathrm{j}) \quad (\Omega) \tag{Ⅱ}$$

$\alpha$ 很大，可将铜板看成无限厚，如取铜板表面为 $z=0$，设 $z<0$ 区域中的入射波电场在 $x$ 方向，则

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{a}_x E_{i0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} = \boldsymbol{a}_x\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \quad (\mathrm{mV/m}) \tag{Ⅲ}$$

$$\boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{a}_y\frac{E_{i0}}{\eta_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} = \boldsymbol{a}_y 2.65\times10^{-3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \quad (\mathrm{mA/m}) \tag{Ⅳ}$$

铜板中的透射场可以写成

$$\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{a}_x E_{t0}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \tag{Ⅴ}$$

$$\boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{a}_y\frac{E_{t0}}{\eta}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \tag{Ⅵ}$$

其中，$\alpha$、$\beta$、$\eta$ 如式(Ⅰ)与式(Ⅱ)所示，所以只要确定 $E_{t0}$ 即可。

根据透射系数公式可以得到

$$T = \frac{2\eta}{\eta+\eta_0} = 3.39\times10^{-5}\times10^{-3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} = 3.39\times10^{-8}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$

因此

$$E_{t0} = TE_{i0} = 3.39\times10^{-8}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} \quad (\mathrm{V/m}) \tag{Ⅶ}$$

$$H_{t0} = \frac{E_{t0}}{\eta} = \frac{3.39\times10^{-8}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\times4.52\times10^{-3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}} = 0.53\times10^{-5} \quad (\mathrm{A/m}) \tag{Ⅷ}$$

直，但我们总是可以将入射波的电场分解为与入射面平行和垂直这两种情况。当电场的方向与入射面平行时，这样的入射称为平行极化波入射；而当电场的方向与入射面垂直时，这样的入射称为垂直极化波入射。

### 一、平行极化波的斜入射

1．入射波、反射波、透射波

如图7-12(a)所示平面波平行入射时，其电场矢量与入射面平行，并将入射面选择为 $xOz$ 平面，波的传播方向与 $z$ 轴的夹角称为入射角，用 $\theta$ 表示。当平面波到达分界面时，就产生反射和折射现象，反射波和折射波都在入射面内沿各自的传播方向前进，如图7-12(a)所示。图7-12中的 $E_1^+$、$E_1^-$、$E_2^+$ 分对对应下文中的 $E^+$、$E^-$、$E_0^t$；$H$ 也如此对应。设反射波和折射波的传播方向与 $z$ 轴的夹角分别是 $\theta'$ 和 $\theta''$，$\theta'$ 称为反射角，$\theta''$ 为折射角。这样选择入射面后，根据均匀平面波的一般公式 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$，并假定入射波电场的最大值是 $E_m^+$，可以求出

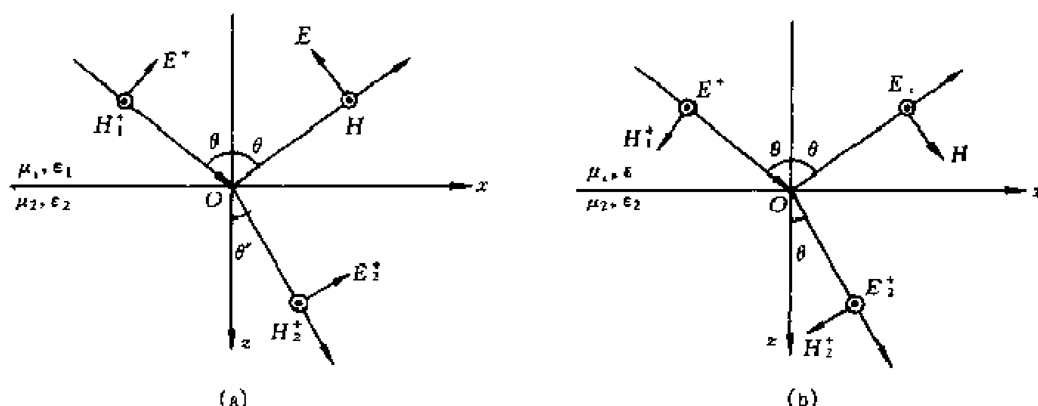



图7-12　均匀平面波的斜入射

(a)平行极化波的斜入射；(b)垂直极化波的斜入射。

$$\boldsymbol{E}_0=E_m^+(\cos\theta\boldsymbol{a}_x-\sin\theta\boldsymbol{a}_z)$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k_1(\sin\theta\boldsymbol{a}_x+\cos\theta\boldsymbol{a}_z)\cdot(x\boldsymbol{a}_x+y\boldsymbol{a}_y+z\boldsymbol{a}_z)=k_1(x\sin\theta+z\cos\theta)$$

其中 $k_1$ 为入射波的波数，且 $k_1=\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$。

因此，入射波的电场是

$$\boldsymbol{E}^+=E_m^+(\cos\theta\boldsymbol{a}_x-\sin\theta\boldsymbol{a}_z)e^{-jk_1(x\sin\theta+z\cos\theta)}\tag{7.7.1}$$

入射波的磁场矢量与 $y$ 轴平行，根据均匀平面波公式 $\boldsymbol{H}=\frac{1}{\eta}\boldsymbol{a}_k\times\boldsymbol{E}$，求出入射波的磁场为

$$\boldsymbol{H}^+=\boldsymbol{a}_y\frac{E_m^+}{\eta_1}e^{-jk_1(x\sin\theta+z\cos\theta)}\tag{7.7.2}$$

上式中 $\eta_1=\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$，为入射波空间的本征阻抗。

类似地，可以写出反射波的电场是

$$\boldsymbol{E}^-=E_m^-(-\cos\theta'\boldsymbol{a}_x-\sin\theta'\boldsymbol{a}_z)e^{-jk_1(x\sin\theta'-z\cos\theta')}\tag{7.7.3}$$

其中 $E_m^-$ 是电场的最大值。

反射波的磁场是

$$\boldsymbol{H}^-=\boldsymbol{a}_y\frac{E_m^-}{\eta_1}e^{-jk_1(x\sin\theta'-z\cos\theta')}\tag{7.7.4}$$

透射波的电场是

$$\boldsymbol{E}^{t} = E_{m}^{t}(\cos\theta''\boldsymbol{a}_x - \sin\theta''\boldsymbol{a}_z)e^{-jk_2(x\sin\theta''+z\cos\theta'')} \tag{7.7.5}$$

其中 $E_m^t$ 是电场的最大值，$k_2$ 为透射波的波数，且 $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$。

透射波的磁场为

$$\boldsymbol{H}^{t} = \boldsymbol{a}_y\frac{E_m^t}{\eta_2}e^{-jk_2(x\sin\theta''+z\cos\theta'')} \tag{7.7.6}$$

上式中 $\eta_2 = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$，为透射波空间的本征阻抗。

2. 斯耐尔定律

现在我们来确定反射角和透射角与入射角之间的关系。根据边界条件，在 $z=0$ 的分界面上，电场的切向分量应该是连续的。由图 7-12($a$)可以看出，电场的 $E_x$ 分量是切向分量。

在 $z=0$ 的分界面上，令入射波和反射波的 $E_x$ 分量之和等于透射波的 $E_x$ 分量，得到

$$E_m^{+}\cos\theta e^{-jk_1x\sin\theta} + E_m^{-}(-\cos\theta')e^{-jk_1x\sin\theta'} = E_m^t\cos\theta'' e^{-jk_2x\sin\theta''} \tag{7.7.7}$$

上式对任意 $x$ 值都成立，必然有

$$e^{-jk_1x\sin\theta} = e^{-jk_1x\sin\theta'} = e^{-jk_2x\sin\theta''} \tag{7.7.8}$$

即

$$jk_1x\sin\theta = -jk_1x\sin\theta' = jk_2x\sin\theta'' \tag{7.7.9}$$

故

$$\theta' = \theta \tag{7.7.10}$$

上式表面反射角等于入射角，该结果称为斯耐尔反射定律。

以及

$$k_1\sin\theta = k_2\sin\theta'' \tag{7.7.11}$$

已知 $k_1=\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ 和 $k_2=\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$，代入上式得

$$\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sin\theta = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\sin\theta'' \tag{7.7.12}$$

或

$$\frac{\sin\theta''}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} = \frac{v_2}{v_1} \tag{7.7.13}$$

式中 $v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}$，$v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}$，分别是均匀平面波在媒质 1 和媒质 2 中的相速。

一般非磁性介质的 $\mu_1\approx\mu_2\approx\mu_0$，(7.7.13)式可写成

$$\frac{\sin\theta''}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2} \tag{7.7.14}$$

(7.7.14)式称为斯耐尔折射定律。$n_1$ 和 $n_2$ 分别代表媒质 1 和媒质 2 的折射指数。

3. 反射系数、透射系数，波阻抗

以下我们来确定反射波和折射波的大小和入射波的关系。习惯上我们是用电场的切向分量来讨论问题的，我们将会看到，这样处理问题比较方便。另外知道了电场的切向分量，根据(7.7.1)、(7.7.3)和(7.7.5)就可以确定入射波、反射波和透射波的电场，波的磁场也能得到。

用电场的切向分量来讨论问题，引进波阻抗的概念是方便的。我们把平行于分界面的切向电场与切向磁场的比值定义为波阻抗。对于我们所讨论的平行极化波，

$$Z_{z1} = \frac{E_x^+}{H_y^+} = \frac{-E_x^-}{H_y^-} \tag{7.7.15}$$

$$Z_{z2} = \frac{E_x^t}{H_y^t} \tag{7.7.16}$$

根据(7.7.1)和(7.7.2)式,得到

$$Z_{z1} = \frac{E_x^+}{H_y^+} = \eta_1 \cos\theta \tag{7.7.17}$$

再根据(7.7.5)和(7.7.6)式,得到

$$Z_{z2} = \frac{E_x^t}{H_y^t} = \eta_2 \cos\theta'' \tag{7.7.18}$$

在理想介质的分界面上,电磁场的切向分量应该满足连续条件,即

$$E_x^+ + E_x^- = E_x^t \tag{7.7.19}$$

$$H_y^+ + H_y^- = H_y^t \tag{7.7.20}$$

利用波阻抗公式(7.7.15)和(7.7.16),(7.7.20)可以写成

$$\frac{E_x^+}{Z_{z1}} - \frac{E_x^-}{Z_{z1}} = \frac{E_x^t}{Z_{z2}} \tag{7.7.21}$$

联立求解(7.7.19)和(7.7.21)式,得到

$$E_x^- = \frac{Z_{z2} - Z_{z1}}{Z_{z2} + Z_{z1}} E_x^+ \tag{7.7.22}$$

$$E_x^t = \frac{2Z_{z2}}{Z_{z2} + Z_{z1}} E_x^+ \tag{7.7.23}$$

用切向电场的比值定义的反射系数和传输系数为

$$R_{//} = \frac{E_x^-}{E_x^+} = \frac{Z_{z2} - Z_{z1}}{Z_{z2} + Z_{z1}} \tag{7.7.23a}$$

$$T_{//} = \frac{E_x^t}{E_x^+} = \frac{2Z_{z2}}{Z_{z2} + Z_{z1}} \tag{7.7.24a}$$

将 $Z_{z1}$ 的表达式(7.7.17)和 $Z_{z2}$ 的表达式(7.7.18)代入,得到

$$R_{//} = \frac{E_x^-}{E_x^+} = \frac{\eta_2 \cos\theta'' - \eta_1 \cos\theta}{\eta_2 \cos\theta'' + \eta_1 \cos\theta} \tag{7.7.23b}$$

$$T_{//} = \frac{E_x^t}{E_x^+} = \frac{2\eta_2 \cos\theta''}{\eta_2 \cos\theta'' + \eta_1 \cos\theta} \tag{7.7.24b}$$

**例 7.4** 如图 7.13 所示,均匀平面波由空气入射到理想导体表面($z=0$),已知入射波电场:

$$\boldsymbol{E}_i = 5(\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_z\sqrt{3})\mathrm{e}^{j6(\sqrt{3}x - z)} \quad (\mathrm{V/m})$$

求:

(1)反射波电场和磁场;

(2)理想导体表面的面电荷密度和面电流密度。

**解** (1)要求反射波场的表达式,首先要求出反射波的传播方向。入射波传播方向单位矢量为

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{\boldsymbol{k}}{k} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{a}_x + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{a}_x \cos\alpha_i + \boldsymbol{a}_z \cos\gamma_i \tag{i}$$

可以看出，入射面在 $xOz$ 面内。上式中 $\alpha_i$ 和 $\gamma_i$ 分别是入射线与 $x$ 轴和 $z$ 轴的夹角，显然，$\alpha_i=\frac{5}{6}\pi$，$\gamma_i=\frac{\pi}{3}$。入射角 $\theta_i=\gamma_i=\frac{\pi}{3}$，几何关系示如图 7-13。由此可以写出反射波传播方向的单位矢量

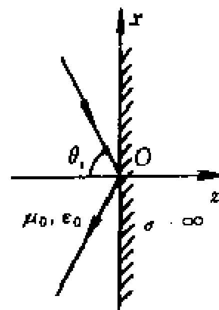


图 7-13　均匀平面波斜入射到理想导体表面

$$\boldsymbol{a}_r=-\boldsymbol{a}_x\sin\theta_i-\boldsymbol{a}_z\cos\theta_i \tag{11}$$

考虑到 $\boldsymbol{E}$ 平行与入射面，于是反射波电场可以写成

$$\boldsymbol{E}_r=\boldsymbol{E}_{r0}\mathrm{e}^{-jk\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{r}}=E_{r0}(-\boldsymbol{a}_x\cos\theta_i+\boldsymbol{a}_z\sin\theta_i)\mathrm{e}^{-jk(-\boldsymbol{a}_x\sin\theta_i-\boldsymbol{a}_z\cos\theta_i)\cdot\boldsymbol{r}}$$

将 $\cos\theta_i=\frac{1}{2}$，$\sin\theta_i=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$E_{r0}=E_{i0}$，代入上式并求出 $\boldsymbol{H}$ 得

$$\boldsymbol{E}_r=5(-\boldsymbol{a}_x+\sqrt{3}\boldsymbol{a}_z)\mathrm{e}^{j6(\sqrt{3}x+z)}\quad(\mathrm{V/m})$$

$$\boldsymbol{H}_r=\frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{a}_r\times\boldsymbol{E}_r=-\boldsymbol{a}_y\frac{10}{\eta_0}\mathrm{e}^{j6(\sqrt{3}x+z)}\quad(\mathrm{A/m})$$

(2)理想导体表面的 $\rho_S$、$\boldsymbol{J}_S$ 取决于空气中的合成场，其中电场

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_i+\boldsymbol{E}_r=5(\boldsymbol{a}_x+\sqrt{3}\boldsymbol{a}_z)\mathrm{e}^{j6(\sqrt{3}x-z)}+5(-\boldsymbol{a}_x+\sqrt{3}\boldsymbol{a}_z)\mathrm{e}^{j6(\sqrt{3}x+z)}$$

$$=10(-\boldsymbol{a}_x j\sin 6z+\boldsymbol{a}_z\sqrt{3}\cos 6z)\mathrm{e}^{j6\sqrt{3}x}\quad(\mathrm{V/m})$$

类似可得

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{H}_r=-\boldsymbol{a}_y\frac{1}{6\pi}\cos 6z\,\mathrm{e}^{j6\sqrt{3}x}\quad(\mathrm{A/m})$$

于是

$$\rho_S=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}_1\big|_{z=0}=\varepsilon_0(-\boldsymbol{a}_z)\cdot\boldsymbol{E}_1\big|_{z=0}=-10\sqrt{3}\varepsilon_0\mathrm{e}^{j6\sqrt{3}x}\quad(\mathrm{C/m^2})$$

$$\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1\big|_{z=0}=-(-\boldsymbol{a}_z)\times\boldsymbol{a}_y\frac{1}{6\pi}\mathrm{e}^{j6\sqrt{3}x}=\boldsymbol{a}_x\frac{1}{6\pi}\mathrm{e}^{j6\sqrt{3}x}\quad(\mathrm{A/m})$$

## 二、垂直极化波的斜入射

对于垂直极化波入射，入射波和反射波的波阻抗

$$Z_{z1}=\frac{E_x^+}{H_y^+}=-\frac{E_x^-}{H_y^-}=\frac{\eta_1}{\cos\theta} \tag{7.7.25}$$

透射波的波阻抗

$$Z_{z2}=\frac{E_x^t}{H_y^t}=\frac{\eta_2}{\cos\theta''} \tag{7.7.26}$$

仿照平行极化波的做法，我们可以得到按切向电场的比值定义的反射系数是

$$R_{\perp}=\frac{E_x^-}{E_x^+}=\frac{Z_{z2}-Z_{z1}}{Z_{z2}+Z_{z1}} \tag{7.7.27}$$

或

$$R_{\perp}=\frac{\eta_2\cos\theta-\eta_1\cos\theta''}{\eta_2\cos\theta+\eta_1\cos\theta''} \tag{7.7.28}$$

传输系数是

$$T_{\perp}=\frac{E_x^t}{E_x^+}=\frac{2Z_{z2}}{Z_{z2}+Z_{z1}} \tag{7.7.29}$$

或

$$T_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos\theta}{\eta_2 \cos\theta + \eta_1 \cos\theta''} \tag{7.7.30}$$

**例 7.5** 均匀平面波以入射角 $\theta_2 = \theta_1$ 透射到两种无耗媒质的界面，入射波的电场矢量与入射面垂直，透射角 $\theta_t = \theta_2$。

(1)若已知反射系数 $R_{\perp} = \frac{1}{2}$，求透射系数 $T_{\perp}$；

(2)若 $E_{i0}$ 垂直于入射面的平面波自媒质 2 射向媒质 1，$\theta_i' = \theta_2$，求 $\theta_t'$、$R_{\perp}'$、$T_{\perp}'$；

(3)在上述两种入射情况下，功率反射系数和功率透射系数是否相等？

**解** (1)当 $E_{i0}$ 垂直于入射面时，有

$$T_{\perp} = 1 + R_{\perp} = \frac{3}{2}$$

(2)平面波自媒质 1 入射时，由折射定律有

$$k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2$$

当自媒质 2 入射，且 $\theta_i' = \theta_2$ 时，仍由上式联系入射角和透射角，所以有 $\theta_t' = \theta_1$。

自媒质 1 入射时，

$$R_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos\theta_1 - \eta_1 \cos\theta_2}{\eta_2 \cos\theta_1 + \eta_1 \cos\theta_2}$$

自媒质 2 入射时，入射、透射角分别为 $\theta_2$、$\theta_1$，入射、透射区的波阻抗分别是 $\eta_2$、$\eta_1$，故

$$R_{\perp}' = \frac{\eta_1 \cos\theta_2 - \eta_2 \cos\theta_1}{\eta_1 \cos\theta_2 + \eta_2 \cos\theta_1} = -R_{\perp} = -\frac{1}{2}$$

$$T_{\perp}' = 1 + R_{\perp}' = \frac{1}{2}$$

可见，反向入射时反射系数只改变符号。

(3)因功率反射系数是场强反射系数的平方，故自媒质 1 入射及媒质 2 入射的功率反射系数 $r$ 和 $r'$ 分别是

$$r = |R_{\perp}|^2 = |R_{\perp}'|^2 = r'$$

而功率透射系数 $t$、$t'$ 为

$$t = 1 - \gamma = 1 - \gamma' = t'$$

即两种情况下功率反射、透射系数相同。

### 三、波的全反射

由斯耐尔折射定律(7.7.14)知道，透射波的折射角是随入射角变化的，即

$$\sin\theta'' = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} \sin\theta$$

可以看出，当 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，必有 $\theta'' > \theta$，即折射角比入射角大。如果入射角为某个角度时，刚好使得 $\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}\sin\theta = 1$，此时的折射角正好是 90°，表明媒质 2 中没有折射波，这种现象称为波的全反射现象。此时所对应的入射角称为临界角 $\theta_c$，临界角满足

$$\sin\theta_c = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \tag{7.7.31a}$$

或

$$\theta_c = \arcsin\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \tag{7.7.31b}$$

无论是什么极化波，只要满足入射角大于或等于临界角的条件，就会发生全反射。由于发生全反射要求 $\varepsilon_1>\varepsilon_2$，即波的全反射现象只有在波从光密媒质入射到光疏媒质的表面时才可能发生。

光纤是应用波的全反射现象的典型例子，它是传导光波的玻璃纤维。比如由芯子和敷层构成的光纤，芯子的相对介电常数比敷层的要高，这样才能使光不断地被敷层所反射而在光纤内传播。

## 四、波的全折射

在电磁波斜入射的情况下，只要满足一定的条件，可能会发生没有反射波的现象，这就是波的全折射现象。由于在发生全折射时，没有反射波，所以全折射的条件可以通过令波的反射系数为零来求得。对于平行极化波的斜入射，其反射系数根据(7.7.23b)式

$$R_{/\!/}=\frac{\eta_2\cos\theta''-\eta_1\cos\theta}{\eta_2\cos\theta''+\eta_1\cos\theta}$$

发生全折射时，$R_{/\!/}=0$，得到

$$\eta_2\cos\theta''=\eta_1\cos\theta$$

对于一般的非磁性媒质，$\mu_1\approx\mu_2\approx\mu_0$，代入上式得

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\cos\theta'' \tag{7.7.32}$$

根据折射定律

$$\sin\theta''=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta'' \tag{7.7.33}$$

利用三角函数的关系，从(7.7.32)和(7.7.33)中消去 $\theta''$，得

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}$$

或

$$\theta=\theta_p=\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}=\arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \tag{7.7.34}$$

$\theta_p$ 就是全折射角，称为布儒斯特角，也称为极化角或偏振角。这说明对于平行极化波的入射，当入射角是 $\theta_p$ 时，电磁波的全部能量将传输到 2 区而没有反射波。

我们再来看垂直极化波的斜入射，其反射系数根据(7.7.28)式

$$R_{\perp}=\frac{\eta_2\cos\theta-\eta_1\cos\theta''}{\eta_2\cos\theta+\eta_1\cos\theta''}$$

令 $R_{\perp}=0$，得

$$\eta_2\cos\theta=\eta_1\cos\theta''$$

一般媒质，$\mu_1\approx\mu_2\approx\mu_0$，则有

$$\cos\theta''=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\cos\theta$$

根据折射定律

$$\sin\theta''=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta$$

解得

$$\theta'' = \theta \tag{7.7.35}$$

但由于 $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$，因此 $\theta'' = \theta$ 是不可能的。这说明在垂直极化波的斜入射情况下，波的全折射现象是不可能发生的。

波的全折射现象的一个典型的应用是，当沿不同方向极化的电磁波以布儒斯特角 $\theta_p$ 入射时，反射波中就只剩下垂直极化波的分量，而没有平行极化波的分量。

### 五、向理想导体平面的斜入射

理想导体是媒质的一种特殊情况，当平面波向理想导体斜入射时，不会有折射波的存在，电磁波被完全反射，并且反射角 $\theta'$ 等于入射角 $\theta$。

平行极化波的斜入射。由于在理想导体的表面，电场的切向分量应该为零。由入射波和反射波电场的表达式(7.7.1)和(7.7.3)，可以看出，电场的 $E_x$ 分量应该满足

$$E_m^+ \cos\theta - E_m^- \cos\theta' = 0 \quad (\theta' = \theta)$$

故

$$E_m^- = E_m^+$$

从而入射波和反射波的合成电场为

$$\boldsymbol{E} = E_m^+(\cos\theta \boldsymbol{a}_x - \sin\theta \boldsymbol{a}_z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\sin\theta + z\cos\theta)} + E_m^+(-\cos\theta \boldsymbol{a}_x - \sin\theta \boldsymbol{a}_z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\sin\theta - z\cos\theta)} \tag{7.7.36}$$

或

$$\begin{aligned} E_x &= E_m^+\cos\theta(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\sin\theta + z\cos\theta)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\sin\theta - z\cos\theta)}) \\ &= -2\mathrm{j}E_m^+\cos\theta\sin(kz\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\sin\theta} \end{aligned} \tag{7.7.37}$$

$$\begin{aligned} E_z &= -E_m^+\sin\theta(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\sin\theta + z\cos\theta)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\sin\theta - z\cos\theta)}) \\ &= -2E_m^+\sin\theta\cos(kz\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\sin\theta} \end{aligned} \tag{7.7.38}$$

合成磁场可根据(7.7.2)和(7.7.4)式得到

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_y \frac{E_m^+}{\eta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\sin\theta + z\cos\theta)} + \boldsymbol{a}_y \frac{E_m^+}{\eta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\sin\theta - z\cos\theta)} \tag{7.7.39}$$

或

$$H_y = 2\frac{E_m^+}{\eta}\cos(kz\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\sin\theta} \tag{7.7.40}$$

由于电磁场的表达式都出现了行波因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\sin\theta}$，表明合成波是沿 $x$ 轴方向传播的行波，且沿 $x$ 轴方向传播的相速是 $v/\sin\theta$，是一种快波。电磁场沿 $z$ 轴方向是按驻波分布的，这和导体表面垂直入射的情形是类似的。

对于垂直极化波的斜入射，我们同样可以得到合成电磁场：

$$E_y = -2\mathrm{j}E_m^+\sin(kz\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\sin\theta} \tag{7.7.41}$$

$$H_x = 2\frac{E_m^+}{\eta}\cos\theta\cos(kz\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\sin\theta} \tag{7.7.42}$$

$$H_z = -2\frac{E_m^+}{\eta}\sin\theta\sin(kz\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx\sin\theta} \tag{7.7.43}$$

它们沿 $x$ 轴方向传播的行波，而沿 $z$ 轴方向是按驻波形式分布的。

## 7.8 群　　速

在上一节我们讨论均匀平面波的斜入射时,波沿 $x$ 轴方向和 $z$ 方向传播的相速度均大于电磁波沿入射方向传播的速度 $v$。如果波是从真空入射,即 $v$ 等于光速,那么我们就遇到了相速可以大于光速的"情况"。其实这种现象并不和相对论相矛盾,这个相速并不代表能量或信息传播的真实速度。关于超光速的假象,我们还会在狭义相对论一章详细介绍。

1. 相速度

相速的定义是电磁波中恒定相位点推进的速度。如果我们用下式表示时变电场

$$E = E_m\cos(\omega t - \beta z)$$

恒定相位点为

$$\omega t - \beta z = 常数$$

相速应为

$$v_p = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{\beta} \tag{7.8.1}$$

可以看出,相速可以与频率有关,也可以与频率无关,这要取决于相位常数。在无界空间传播的均匀平面电磁波,$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$。代入(8.7.1)式,得 $v_p = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$,此时相速与频率无关。因此自由空间可以认为是非色散的。反之,在导电媒质中,电磁波的相速随频率改变,它是色散的。

2. 群速度

在很多情况下电磁波都是用来传播信号的,必须把信号调制到电磁波上,使电磁波成为一个调制波,通常称这个调制信号为波包。电磁波载着波包前进,波包的前进速度,才是信号的传播速度,这个速度称为群速度。

波包的形状有多种多样,比如矩形、高斯脉冲形以及余弦形等,见图 7-14。

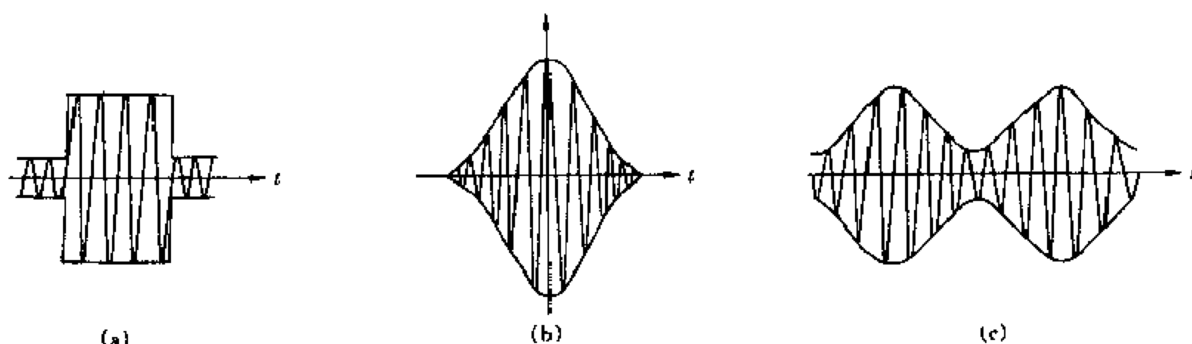



图 7-14　载有波包的电磁波

(a)矩形波包,(b)高斯脉冲形波包;(c)余弦形波包。

当然,为了正确的调制,波包应该满足一定的条件,比如幅度不能大于等幅波的幅度(不产生过调制)等。这些问题将留在后续课程中讨论。

设信号(波包)用 $f(t)$ 表示,它的频谱为 $F(\Omega)$,而载波(等幅波)的频率为 $\omega_0$,传播方向为正 $z$ 轴方向,则调制后的电磁波将由原先单一频率变为有一定带宽的简谐波,这时各频率分量的总体可以表示为

$$F(\Omega)e^{j[(\omega_0+\Omega)t - \beta z]}$$

若记 $\omega_0+\Omega=\omega$，则为

$$F(\omega-\omega_0)e^{j(\omega t-\beta z)}$$

通常，$f(t)$的频谱宽度远小于载波的频率 $\omega_0$，所以 $\beta(\omega)=\frac{\omega}{v}$ 可在 $\omega_0$ 附近展开为台劳级数

$$\beta(\omega)=\beta(\omega_0)+\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\Big|_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}\Big|_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0)^2+\cdots$$

如果 $\beta_0''$ 以上的高阶项可以忽略，我们得到一阶近似

$$\beta(\omega)=\beta(\omega_0)+\beta_0'(\omega-\omega_0)$$

于是已调制的各频率分量是

$$F(\Omega)e^{j[(\omega_0+\Omega)t-\beta_0 z-\beta_0'(\omega-\omega_0)z]}=F(\Omega)e^{j(\omega_0 t-\beta_0 z+\Omega(t-\beta_0' z))}$$

上述表达式可以做如下理解：因为在 $z=0$ 处，它为 $F(\Omega)e^{j(\omega_0 t+\Omega t)}$，而在 $z\neq0$ 处为上式，所以上式实际上表示在 $z$ 点的已调制波。在 $z$ 点载波经历的相移为 $e^{j(\omega_0 t-\beta_0 z)}$，所以解调出来的波包的频谱应该为 $F(\Omega)e^{j\Omega(t-\beta_0' z)}$。于是输出波包的时域波形 $\Phi(t)$应为

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\Omega)e^{j(t-\beta_0' z)\Omega}\mathrm{d}\Omega=f(t-\beta_0' z) \tag{7.8.2}$$

上式表明，在 $\beta(\omega)$取一阶近似的前提下，载有波包的电磁波，经过一段距离的传播以后，波包的形状保持不变，但在时间上延迟了 $\beta_0' z$。这样，我们可以波包上任意一点的传播速度作为波包的速度即群速度。

从(7.8.2)式我们可以知道波包的移动速度，即令

$$t-\beta_0' z=c$$

$c$ 为常数，对时间求导可得波包的速度

$$v_g=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta} \tag{7.8.3}$$

利用(7.8.1)式得到

$$v_g=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}(\beta v_p)=v_p+\beta\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\beta}=v_p+\frac{\omega}{v_p}\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega}v_g$$

由此可得

$$v_p=\frac{v_g}{1-\frac{\omega}{v_p}\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega}} \tag{7.8.4}$$

可见，当相速不随频率变化时，群速等于相速。而一般情况下，群速并不等于相速。

从以上的分析还可以看出，若 $\beta_0'\neq0$，而 $\beta_0''$ 以上的高阶项皆为零，则波包的形状不会变化，这意味着并没有色散发生，所以以相速度 $v$ 是否与 $\omega$ 有关来决定介质是否是色散介质。以群速度 $v_g$ 是否与 $\omega$ 有关，即 $\beta_0''$ 是否为零，来划分色散介质是有所区别的，$\beta_0''\neq0$ 时的色散称为群速度色散。(相速度色散使不同频率波的折射角不同)。但一般介质的 $\beta_0'$ 和 $\beta_0''$ 都不为零，所以二者也就不加以区分了。

当 $\beta_0''\neq0$ 时，波包在传播过程中，不仅有时间的延迟，也有形状的变化。对于形状变化的波包，它的群速度的含义将有所不同。这里就不进一步展开了。

最后，波包的传播速度——群速度是否就一定代表了电磁波的传播速度了呢？我们还不能下这样的结论。因为除了群速度之外，还有一个重要的速度概念，即电磁波能量的传播速

度，简称为能速。能速可能等于群速，也可能不等于群速。电磁波本质上是电磁能的传播，所以能速也是一个十分重要的参数。

所以多数文献认为，电磁波的传播应该用三个速度指标来描述：相速、群速和能速。

## 习　题　7

7.1　海水的 $\sigma=4\ \mathrm{S/m}$，$\varepsilon_r=81$，求频率为100 kHz、100 MHz、100 GHz的电磁波在海中的波长、衰减常数和波阻抗。

7.2　求证在无界完纯介质内向任意方向 $\boldsymbol{n}$（$\boldsymbol{n}$ 为单位矢量）传播的平面波可写成

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cdot e^{-j(\beta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

7.3　试证明：任何椭圆极化波均可分解为两个方向相反旋转的圆极化波。

7.4　一圆极化波垂直投射于一介质板上，入射电场为 $\boldsymbol{E}=E_m(\mathrm{a}_x+\mathrm{j}a_y)e^{-j\beta z}$，求反射波于传输波的电场，求它们的极化如何？

7.5　均匀平面波的电场振幅为 $E_{m1}^{+}=100\ \mathrm{V/m}$，从空气垂直入射到无损耗的介质平面上（介质的 $\mu_2\approx\mu_0$，$\varepsilon_2=4\varepsilon_0$，$\sigma_2=0$），求反射波和传输波中电场的振幅。

7.6　最简单的天线罩是单层介质板。如已知介质板的 $\varepsilon=2.8\varepsilon_0$，问介质板的厚度应为若干，方可使3 GHz电磁波在垂直入射于板面时没有反射。当频率为3.1 GHz及2.9 GHz时，反射增大多少？

7.7　均匀平面波从自由空间垂直入射到介质平面时。在自由空间形成驻波。设驻波比为3，介质表面为电场驻波最小点，且波在介质中的波长为自由空间波长的1/6，求介质的相对磁导率和相对介电常数。

7.8　空气中均匀平面波的频率为1 GHz，电场强度的峰值为1 V/m，垂直入射于一块大铜片上，求铜片上每平方米所吸收的平均功率。

7.9　均匀平面波从本质阻抗为 $\eta$ 的介质垂直入射到电导率为 $\sigma$ 的导体上，假定 $\eta\gg R_s$，求电磁波能量传入导体的百分数。

7.10　平面波由空气以入射角 $\theta_i$ 射向介质表面，介质的参数为 $\mu_0$，$\varepsilon$，及 $\sigma=0$。试求对应于入射波中截面为 $a\times b$ 的矩形波束的透射波束的截面尺寸。

7.11　一均匀平面波由空气垂直入射到一良导体的表面，计算反射波电场强度复振幅的虚部与实部之比。

7.12　一均匀平面波自波阻抗为 $\eta$ 的介质垂直入射到电导率为 $\sigma$，$\mu_r=1$ 的良导体的表面，证明透入导体内部的功率流密度与入射波功率流密度之比近似等于 $4R_S/\eta$。

7.13　一电场振幅为1 V/m，频率为10 MHz的均匀平面波自空气垂直入射到银板的表面。银的 $\sigma=6.1\times10^7\ \mathrm{S/m}$，$\mu_r=\varepsilon_r=1$。设界面上的磁场强度振幅 $H_0=0.5\ \mathrm{A/m}$，求：

①银表面处的电场强度振幅；

②银板没单位面积吸收的平均功率。

提示：注意界面上磁场强度已知。

7.14　空气中一均匀平面波垂直入射到一理想导体平面上，证明任一点合成波的电场能流密度与磁场能流密度之和的时间平均值等于一个常数。

7.15　空气中一均匀平面波斜入射到一电介质表面，电介质的 $\varepsilon_r=3$，$\mu_r=1$。入射角为60°，面入射波的电场强度振幅为1 V/m。试分别计算垂直极化和平行极化两种情形下反射波

和折射波电场强度振幅。

7.16　一均匀平面波自介质 1 入射到介质 2。假设两种介质的折射率相差甚微，而且可以表达成 $n_1/n_2=1+\delta$，其中，$n_1=\sqrt{\varepsilon_{r1}}$，$n_2=\sqrt{\varepsilon_{r2}}$，$\delta\ll 1$。证明此时无论是垂直于入射面或平行于入射面极化的波，在 $\theta<45^\circ$ 的条件下，反射系数都可以写成

$$|r|=\frac{1+\delta-\sqrt{1-2\delta\tan^2\theta}}{1+\delta+\sqrt{1-2\delta\tan^2\theta}}$$

7.17　一平行极化的均匀平面波入射到两种介质的分界面上，试证明入射角自 $\theta_i<\theta_p$ 变化到 $\theta>\theta_p$ 时，反射系数改变符号。

7.18　若光纤的折射率 $n=1.55$，光线束自空气向其端面入射，并要能量沿光纤传输，试计算入射光线与光纤轴线间的最大角度，若：

①光纤外面是空气而无包层；

②光纤外有包层，其折射率为 1.53。

7.19　在空气中一均匀平面波以入射角 $\theta=45^\circ$ 入射到一介电常数 $\varepsilon_r=2.59$ 的有机玻璃板上，板厚为 $\lambda/2$，$\lambda$ 是有机玻璃的波长。求：

①波从介质板透入空气的折射角；

②反射系数和反射功率。

# 第8章 导行波

电磁波以至光波可以在无界空间传播，也可以在有界的空间传播。第7章介绍了在自由空间传播的平面波，本章将介绍束缚在波导内或导波装置附近的导行波。

在第6章我们已接触过导波装置 例如例6.11中，电磁波和能流在两张无限大导体平行板之间沿着一个方向传播，例6.10中则是在同轴线的内外导体之间传播。它们都是波导。

导波装置的种类很多。除了金属平板波导、双线传输线、同轴线、波导管，还有介质波导以至当今广泛应用的光导纤维；敷设了金属管道的矿井巷道也可以看作导波装置；敷设在电路板上的高频布线，有时也要按波导的理论来分析；等等。它们在工业及通信中均有重要的应用。

本章的主旨是应用第6章的知识特别是求解齐次标量波动方程得到的通解以及第7章平面波的知识来分析导行波，建立起不同类型导波装置中各种导行波的概念，介绍其主要的物理现象和基本的分析思路。更复杂的问题将留待后续课程解决。本章内容的分类也主要是依照波导中的现象和分析方法的不同。

本章将讨论导波装置中最简单的情形：假定这些导波装置都是直的，无弯折、无分支且连续；它们的横向构造和尺寸不随纵向变化；导波装置中的介质在横截面上是分区域均匀的。在这种最简单的情形中，电磁波传播的基本运动形态是"模式"——一种沿横截面有确定的分布形式而沿纵向只有相位变化和可能的幅度衰减的电磁波；并且，对于确定的频率有确定的传播速度(相速度和群速度)，不同的模式有不同的速度。

在上述导波装置上传播的导行波，根据电磁场是否含有纵向分量即沿波传播方向的分量，可分为三种模式或波型：

1 TEM模(横电磁波)——$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都在横平面内，均无纵向分量；

2. TM模(横磁波、E波) $\boldsymbol{H}$ 完全在横平面内，在纵向只有 $\boldsymbol{E}$ 的分量；

   TE模(横电波、H波) $\boldsymbol{E}$ 完全在横平面内，在纵向只有 $\boldsymbol{H}$ 的分量；

3. HE或EH模(混合模式)——$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的纵向分量都不为零的模式

在这里，模式的概念和波的概念可以混用。而对于更复杂的导波装置，二者还是有区别的。一般的导行波可能不一定具有确定的横向分布形式、确定的传播参数等特征。

本章所介绍的各种波导中的上述导行波仍然是平面波，但一般都是非均匀的平面波

## 8.1 可传送TEM模的导波装置

在例6.10中我们曾看到，同轴线内、外导体之间的电磁波沿着轴向即纵向传播，电场和磁场都没有纵向分量，且在横平面上的分布与静态场相同。同轴线就是能传送TEM模的导波装置之一。本节我们将首先从理论上证明对于多根(两根以上)柱状导体构成的波导，TEM模沿纵向呈行波状态而在横向与静态场的分布相同等特征，

对导行波的性质进行分析或证明主要是基于第6章求解的齐次标量波动方程，并利用纵向分量法。

根据6.9节的介绍，齐次标量波动方程(6.9.5)及其解式(6.9.8)的标量函数 $\Psi_k = F_1(k_x x)F_2(k_y y)F_3(k_z z)$ 可以理解为场量的各个直角分量。因为波导是直的，故而无论何种传播模式都在沿着波导的纵向(以下均假设为 $z$ 轴)传播，即在 $z$ 方向为行波。这样，根据(6.9.9)，无论哪个直角分量代入方程(6.9.5)，都应把它的分离常数 $k_z$ 选择为实数而非虚数。应该指出，这一选择还需假设导行波所在空间的介质是完纯的，于是此时的传播系数为 $\gamma = j\beta = jk_z$，$k_z$ 为实数。否则，$k_z = \gamma/j$ 会是复数。

当 $k_z$ 为实数，对解式 $\Psi_k = F_1(k_x x)F_2(k_y y)F_3(k_z z)$ 中的函数 $F_3$ 的合理选择或假设应是

$$F_3(k_z z) = e^{-jk_z z} \tag{8.1.1}$$

把解式 $\Psi_k$ 中的其余部分 $F_1(k_x x)F_2(k_y y)$ 合并为 $\dot{E}_{zm}$，就有

同理，有

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_z &= \dot{E}_{zm}e^{-jk_z z}\\
\dot{E}_x &= \dot{E}_{xm}e^{-jk_z z}\\
\dot{E}_y &= \dot{E}_{ym}e^{-jk_z z}\\
\dot{H}_x &= \dot{H}_{xm}e^{-jk_z z}\\
\dot{H}_y &= \dot{H}_{ym}e^{-jk_z z}\\
\dot{H}_z &= \dot{H}_{zm}e^{-jk_z z}
\end{aligned}\right\} \tag{8.1.2}$$

$\dot{\boldsymbol{E}}_z$、$\dot{\boldsymbol{H}}_z$ 称为纵向分量，其余为横向分量。求解中并不需要对每个分量重复同样的步骤，而是由麦克斯韦旋度方程(6.5.14)、(6.5.15)导出以纵向分量来表示的横向分量。这样，只要解出了纵向分量，横向分量就会迎刃而解。这就是纵向分量法的基本思想，是求出波导中各场量的表达式的最常用而简便的方法。后面金属波导管和光纤中的场分布也都是用纵向分量法解出来的。下面我们来导出以纵向分量表示的横向分量。

把式(8.1.2)代入式(6.5.14)、(6.5.15)，可得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial y} - jk_z\dot{E}_{ym} = j\omega\mu_0\dot{H}_{xm}\\
&jk_z\dot{E}_{xm} - \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial x} = -j\omega\mu_0\dot{H}_{ym}\\
&\frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial y} + jk_z\dot{H}_{ym} = j\omega\mu_0\dot{E}_{xm}\\
&jk_z\dot{H}_{xm} - \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0\dot{E}_{ym}
\end{aligned}\right\} \tag{8.1.3}$$

(8.1.3)式是关于横向分量的四元一次方程组，从中可解出横向分量与纵向分量的关系式：

$$\dot{E}_{xm} = \frac{-j}{k^2 - k_z^2}\left[k_z\frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial x} + \omega\mu_0\frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial y}\right] \tag{8.1.4}$$

$$\dot{E}_{ym} = \frac{j}{k^2 - k_z^2}\left[k_z\frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial y} - \omega\mu_0\frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial x}\right] \tag{8.1.5}$$

$$\dot{H}_{xm} = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left[\omega\varepsilon_0 \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial y} - k_z \frac{\partial H_{zm}}{\partial x}\right] \tag{8.1.6}$$

$$H_{ym} = \frac{-1}{k^2 - k_z^2}\left[\omega\varepsilon_0 \frac{\partial E_{zm}}{\partial x} + k_z \frac{\partial H_{zm}}{\partial y}\right] \tag{8.1.7}$$

由(8.1.1)式,电场矢量 $E = E_m e^{-jk_z z}$($\dot{E}_m = a_x \dot{E}_{xm} + a_y \dot{E}_{ym} + a_z \dot{E}_{zm}$,下文中将一律省略复数符号"·")显然满足

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2} = -k_z^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{8.1.8a}$$

把上式代入亥姆霍兹方程(6.7.5),得

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2)\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{8.1.8b}$$

假设 $E_z = H_z = 0$(事实上,由于矢量位 $\boldsymbol{A}$ 平行于 $z$ 轴,故 $\boldsymbol{H}$ 必在横向)并令

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$k^2 - k_z^2 = k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \tag{8.1.9}$$

再以 $\boldsymbol{E}_T$ 表示横向电场,则方程(8.1.8b)可改写为

$$\nabla_T^2 \boldsymbol{E}_T + k_c^2 \boldsymbol{E}_T = \boldsymbol{0} \tag{8.1.10}$$

从(8.1.4)~(8.1.7)式可看出,在纵向分量为零的假设下,横向分量的存在条件是

$$k_c^2 = k^2 - k_z^2 = 0 \tag{8.1.11}$$

$$k_z = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

于是

$$v = \frac{\omega}{k_z} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

可见,无论 TEM 波导横截面的几何形状如何,频率是多少,TEM 波的传播速度都相同,都等于无限大完纯介质中平面波的传播速度。人们称电磁波速度与频率有关的现象为色散现象,因而 TEM 传输线是非色散的导波装置。

又由于 $k_c^2 = 0$,方程(8.1.10)变为

$$\nabla_T^2 \boldsymbol{E}_T = \boldsymbol{0}$$

同理

$$\nabla_T^2 \boldsymbol{H}_T = \boldsymbol{0}$$

上式表明横向场量满足的是二维拉普拉斯方程。又由于边界条件(6.4.5)~(6.4.8)也和静态场中相同,按照唯一性定理,TEM 波在任一横截面上的分布与静态的平行平面场相同。

不难看出,上述推导和结论与柱状多导体系统的横截面形状无关,这表明凡能建立起静态场的柱状多导体系统都能传 TEM 波,而一根空心导体管或介质棒或是光导纤维,一般情况下都不可能传输 TEM 模。这是因为静态场的建立需要有维持恒定场的源—恒定的 $I$ 或恒定的电荷分布 $\rho$,故至少需要两根以上柱状导体以构成电流回路。一根空腔导体管上显然不可能存在恒定 $I$,其内壁也不可能存在恒定的 $\rho$ 分布。但是,最新的研究表明,并非仅有多根柱状导体才能承载 TEM 波,矩形波导内适当加装介质片或铁氧体片时,也能产生 TEM 场。当然,TEM 模主要还是靠前者来传输。

$H_z = E_z = 0$ 只是一种假设或选择,并非唯一的可能。当频率提高到一定的程度,TE、TM

模也会和 TEM 模同时传播(例如例 6.11 的无限大平行板之间朝 $z$ 方向传播的就是 TE 模),这是应该避免的,例如同轴线都是工作于 TE、TM 模的截止频率以下的较低频段(但近年来,由于设备的小型化,工作频率的上限设置到了30 GHz以上)。事实上,也根本不存在仅能传输 TEM 模的导波装置。图 8-1 是几种常用的 TEM 导波装置。

这些构造也是逐步发展演变而来的。例如,对称带状线(三板线)就是由同轴线如图 8-2 演变而来的。

频率在几百兆赫以上时就可采用带状线,其工作频带较宽,容易实现小型化;而微带线则在微波集成电路中广泛应用。

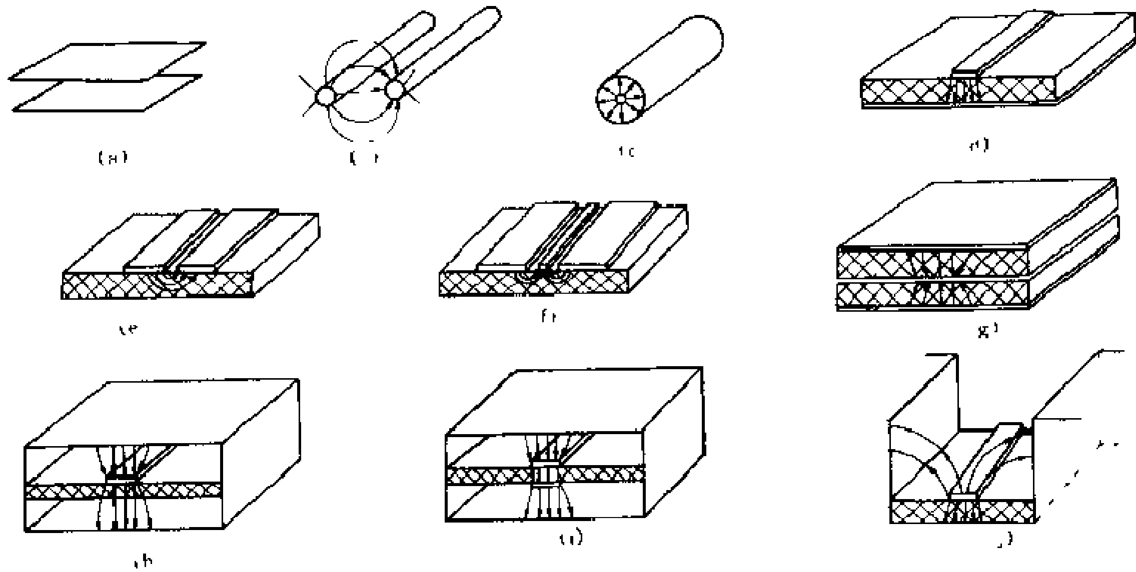


图 8-1 TEM 传输线

(a)平行板传输线;(b)双线传输线;(c)同轴线;(d)微带线;(e)开槽线;(f)共面传输线;(g)对称带状线(三板线);(h)Brenner 线(悬浮基片传输线);(i)带状线(介质支撑基片);(j)盒状线。

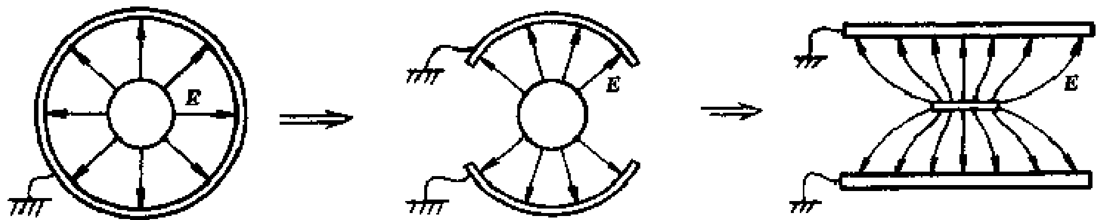



图 8-2 同轴线到对称带状线的演变

在一定条件下,TEM 传输线可作测试设备用,在电磁计量、电磁兼容领域获得重要应用。近 20 多年来的研究显示,尽管波导管和介质波导、光纤都不传输 TEM 波,但 TEM 波的应用之广远远超过人们的想像,已引起广泛重视。20 世纪 40 年代发明的角锥状吸收材料无回波暗室(即电波暗室)不能指出场强的值,因而 20 世纪 60～80 年代末又发明了平行板横电磁室(又称平行板电磁脉冲模拟器)、横电磁传输室、吉赫横电磁室等横电磁波[测试]室,如图 8-3(a)所示。横电磁室的应用主要是基于同 TEM 波相联系的平面波波场的均匀性和可计算性。例如双平行导体板[图 8-1(a)],除开边缘效应外,其中部的场近似为均匀平面波。又由于 TEM 波的横截面与静态场分布相同,中部的场强与静态场的平行板电容器中相同,$E=U/d$,而边缘处的分布可采用保角变换等静态场方法来计算。对于双平行圆柱导线[图 8-1(b)]、矩形同轴线、横电磁室等结构形式也存在场强均匀的区域。

均匀平面波也是一种 TEM 波。由第 7 章的介绍,对于均匀平面波,从方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}$

$-j\omega\mu_0 \boldsymbol{H}$ 可导出：

$$\boldsymbol{E} = \eta \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{a}_k$$

$\boldsymbol{a}_k$ 为单位波矢量，$\eta$ 为空气中均匀平面波的也是 TEM 波的特性阻抗。如果场均匀，则应处处有 $\eta = 376.62\Omega$；在场的不均匀处，$\eta$ 会相应地偏离此值，表明此处必定出现了纵向场分量)。而空间各点的特性阻抗分布是可以分析计算或测量的。在横电磁室中，使用 TEM 波对被测物(如广播、电视接收机、传感器)进行照射来进行 RS(辐射敏感度)测试，如图 8-3(b)所示，或者产生标准场强以校准场强计探头，或用于电子器件、设备的电磁兼容性(EMC)测量、瞬态场实验、高频辐射、电磁生物效应的研究、等等。这方面的详细内容可参阅文献[14]。

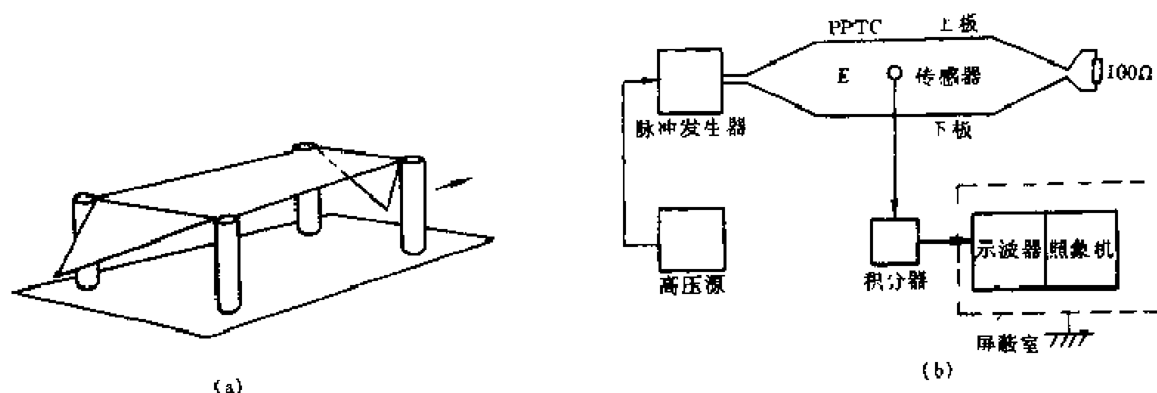



图 8-3

(a)平行板横电磁室(PPTC)的一种结构形式；(b)利用 PPTC 测量辐射敏感度的一种电路布置。

## 8.2 管状金属波导

管状的波导也是逐步演化而来的。随着频率的提高，图 8-1 中非闭合的传输线会有能量辐射，而闭合的同轴线中的内导体表面积又远小于外导体壁，因而集肤效应所造成的内导体的表面电阻会远大于外导体。如果抽走内导体，不仅可消除内导体及其支承介质的内损耗，还可提高击穿场强，提高频率，而且外壁散热很快，这些都大大提高了微波的极限传输功率。一般，大功率的微波传输总是使用空腔的管状金属波导。它有多种几何结构，如图 8-4 所示。

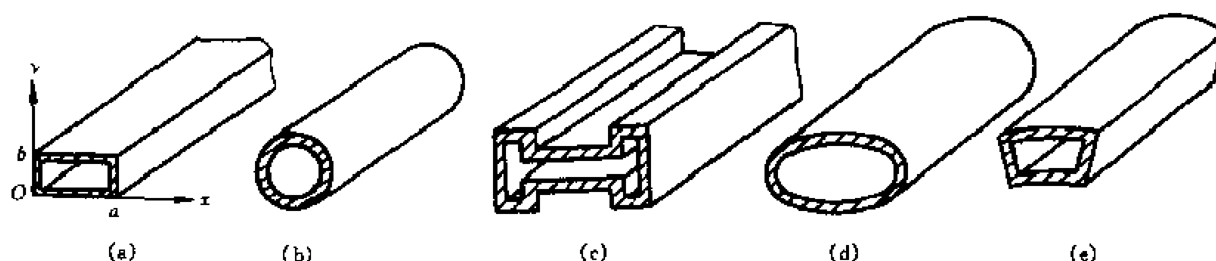



图 8-4　EM 传输线——金属波导管举例

(a)矩形波导；(b)圆波导；(c)脊波导；(d)椭圆波导；(e)扇形波导。

图 8-4 中的 EM 泛指 TE 和 TM 波。

求解导行波的场分布是 6.9 节介绍的齐次标量波动方程的分离变量解法的一个重要应用。其中以矩形波导最为简单、典型。下面我们将以图 8-4 中的矩形波导管(也称方波导)为例，在 6.9 节和 8.1 节的基础上，继续演示纵向分量法。

同 TEM 模纵向分量为零的简单情况相反，这里将分别演示在 $E_z \neq 0$(TM 模)和 $H_z \neq 0$(TE 模)情况下的后续求解步骤，从中得出波导管中的基本物理现象和参数。

本节的讨论中，我们都按照实际情况假设波导管中的介质为空气。

## 一、矩形波导中的 TM 模(横磁波、E 波)

由于 TM 模的 $E_z \neq 0$，应假设齐次标量波动方程(6.9.5)及其通解(6.9.8)式的 $\Psi_k = F_1(k_x x)F_2(k_y y)F_3(k_z z)$ 代表的是直角分量 $E_z$。由(8.1.1)式知 $F_3(k_z z) = e^{-jk_z z}$，下面我们来求出 $E_{zm} = F_1(k_x x)F_2(k_y y)$是何种函数形式。

把 $E_z = E_{zm}e^{-jk_z z}$ 代入方程(6.9.5)，得

$$\frac{\partial E_{zm}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_{zm}^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)E_{zm} = 0 \tag{8.2.1}$$

由分离常数方程 $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$，当

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = k^2 - k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{v_z^2} > 0 \tag{8.2.2}$$

时，方程(8.2.1)中的 $k_x$、$k_y$ 可以同时有实数解。按照(6.9.9)，当 $k_x$、$k_y$ 为实数时在 $x$、$y$ 方向为驻波。这是因为 $x$、$y$ 方向均为波导壁，横向的行波来回反射、迭加(即干涉)的结果必然形成驻波，故电场纵向分量应取如下形式：

$$E_z = F_1F_2F_3 = \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} k_x x \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} k_y y\, e^{-jk_z z} = E_{zm}e^{-jk_z z}$$

在 $z = 0$ 的平面上可得到

$$E_{zm} = \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} k_x x \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} k_y y$$

$$= (A\sin k_x x + A'\cos k_x x)(B\sin k_y y + B'\cos k_y y)$$

其中的待定常数可由理想导体表面电场的切向边界条件($E_t = 0$)来确定：

$$E_{zm}(x,y)|_{y=0} = 0 \qquad E_{zm}(x,y)|_{y=b} = 0$$

$$E_{zm}(x,y)|_{x=0} = 0 \qquad E_{zm}(x,y)|_{x=a} = 0$$

故

$$A' = B' = 0$$

横向波数 $k_x$、$k_y$ 同波导尺寸 $a$、$b$($a$、$b$ 分别表示矩形波导的长、短边或称宽、窄边)的关系为

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \qquad (m = 1,2,\cdots)$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \qquad (n = 1,2,\cdots) \tag{8.2.3}$$

故

$$E_{zm} = F_1(k_x x)F_2(k_y y) = C_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y = E_0\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$E_z = F_1(k_x x)F_2(k_y y)F_3(k_z z) = E_0\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ye^{-jk_z z} \tag{8.2.4}$$

这就是 TM 模的电场的纵向分量的表达式。其中 $E_0$ 由激励源的强度决定。显然，$m$ 与 $n$ 都不能为零，否则 $E_z = 0$，且使所有的横向分量均为零。同时，(8.2.4)式也显示出 $m$、$n$ 表示沿长、短边方向电场的半波个数。

把 $H_z = 0$ 和(8.2.4)式代入横向、纵向分量的关系式(8.1.4)～(8.1.7)，就得到全部的横

向分量：

$$E_{xm}=-\frac{jk_zk_x}{k_c^2}E_0\cos k_xx\sin k_yy \tag{8.2.5}$$

$$E_{ym}=-\frac{jk_zk_y}{k_c^2}E_0\sin k_xx\cos k_yy \tag{8.2.6}$$

$$H_{xm}=\frac{j\omega\epsilon_0k_y}{k_c^2}E_0\sin k_xx\cos k_yy \tag{8.2.7}$$

$$H_{ym}=\frac{-j\omega\epsilon_0k_x}{k_c^2}E_0\cos k_xx\sin k_yy \tag{8.2.8}$$

其中 $k_x=\frac{m\pi}{a}$，$k_y=\frac{n\pi}{b}$。以上各式表征了方波导中 TM 模的场结构。每组 $m$、$n$ 的取值都代表着一种不同的模式。所谓模式，在数学上就是 6.9 节中所指出的与微分方程的本征值相对应的本征函数；从物理上说就是电磁波（或光波）在波导中反射、干涉而在横向截面上造成的一种驻波分布，电磁场的一种场型。TM 波的 $m$ 与 $n$ 可取为任意正整数，故方波导中可传无穷多种横磁模 $TM_{mn}$。其中 $TM_{11}$ 为最低阶的模式，称为主波。

波导壁上的感应面电流 $J_S$ 的分布，把(8.2.7)、(8.2.8)式代入磁场的切向边界条件(6.4.5)式即可得到。

根据(8.2.4)～(8.2.8)以及 $\rho_S$、$J_S$ 的分布就可绘出各种横磁模的电力线、磁力线图以及波导壁上的面电流分布图。图 8-5 是几种低阶的横磁模的场结构，其中 1 为波导管的横剖面视图，2 为纵剖面视图，横（纵）向剖切位置如 2(1)中的箭矢所指。

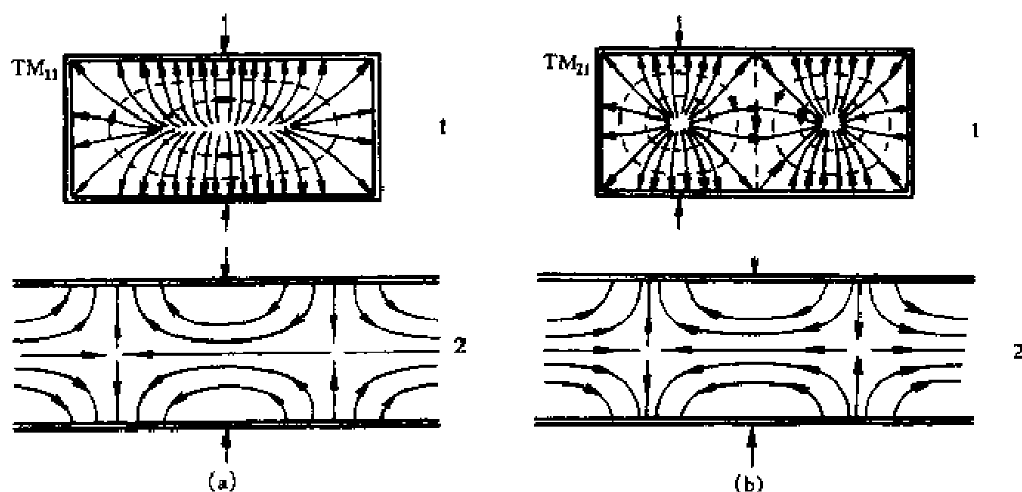



图 8-5　$TM_{mn}$ 模式场结构图例

——电力线；----磁力线。

## 二、矩形波导中的 TE 模（横电波、H 波）

TE 模的求解步骤与 TM 模的完全相同，只是此时应把标量波动方程(6.9.5)理解为关于 $H_z$ 的方程：

$$\frac{\partial^2H_{zm}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2H_{zm}}{\partial y^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_z^2\right)H_{zm}=0$$

把它的通解 $\Psi_k = F_1(k_x x)F_2(k_y y)F_3(k_z z)$ 理解为 $H_z$。由(8.1.1)式知 $F_3 = e^{-jk_z z}$；基于分析TM模时同样的理由，表示横向分布的 $F_1$、$F_2$ 仍应为驻波的函数形式，也就是 $k_x$、$k_y$ 应为实数，这就要求 $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = k^2 - k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{v_p^2} > 0$，在此条件下就会有

$$
\begin{aligned}
H_z &= \left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} k_x x \right\} \left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} k_y y \right\} e^{-jk_z z} \\
&= (A\sin k_x x + A'\cos k_x x)(B\sin k_y y + B'\cos k_y y)e^{-jk_z z}
\end{aligned}
$$

利用波导壁即 $x=0,a$ 和 $y=0,b$ 处磁场的切向边界条件($H_t=0$)的四个方程，可求出待定常数 $A=B=0$ 以及横向波数也即方程(6.9.5)的分离常数为

$$
k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m=0,1,2,\cdots) \tag{8.2.9}
$$

$$
k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{8.2.10}
$$

故

$$
H_z = H_0 \cos\frac{m\pi}{a}x \cos\frac{n\pi}{b}y e^{-jk_z z} = H_{zm} e^{-jk_z z} \tag{8.2.11}
$$

其中 $H_0$ 由激励源的强弱决定。

把 $E_z=0$ 和(8.2.11)式代入(8.1.3)式，立即得到所有的横向分量：

$$
E_{xm} = \frac{j\omega\mu_0 k_y}{k_c^2} H_0 \cos k_x x \sin k_y y \tag{8.2.12}
$$

$$
E_{ym} = -\frac{j\omega\mu_0 k_x}{k_c^2} H_0 \sin k_x x \cos k_y y \tag{8.2.13}
$$

$$
H_{xm} = \frac{jk_z k_x}{k_c^2} H_0 \sin k_x x \cos k_y y \tag{8.2.14}
$$

$$
H_{ym} = \frac{jk_z k_y}{k_c^2} H_0 \cos k_x x \sin k_y y \tag{8.2.15}
$$

以上各式表征了横电模的场结构。容易看出，$m$ 和 $n$ 不能同时为零，故横电模的最低阶波即主波为 $TE_{01}$ 或 $TE_{10}$。

从(8.2.12)～(8.2.15)式易知，波导内壁上电场的切向边界条件 $E_t=0$ 是满足的。同样，根据电场的法向边界条件(6.4.8)式可得出波导内壁上面电荷的分布；根据磁场的切向边界条件(6.4.5)式可得出波导内壁上面电流的分布。下面是按 $m=1, n=0$ 算出的 $TE_{10}$ 模的面电流分布(参见图8-8)：

$$
\begin{aligned}
&\text{左侧面横向电流} \quad \boldsymbol{J}_{Sm}|_{x=0} = (\boldsymbol{a}_x \times \boldsymbol{a}_z H_{zm})_{x=0} = -\boldsymbol{a}_y H_{zm}|_{x=0} = -\boldsymbol{a}_y H_0 \\
&\text{右侧面横向电流} \quad \boldsymbol{J}_{Sm}|_{x=a} = (-\boldsymbol{a}_x \times \boldsymbol{a}_z H_{zm})_{x=a} = \boldsymbol{a}_y H_{zm}|_{x=a} = -\boldsymbol{a}_y H_0
\end{aligned} \tag{8.2.16}
$$

$$
\text{底面电流} \quad \boldsymbol{J}_{Sm}|_{y=0} = [\boldsymbol{a}_y \times (\boldsymbol{a}_z H_{zm} + \boldsymbol{a}_x H_{xm})]_{y=0} = \boldsymbol{a}_x H_0 \cos\frac{\pi x}{a} - \boldsymbol{a}_z H_m \sin\frac{\pi x}{a}
$$

$$
\text{顶面电流} \quad \boldsymbol{J}_{Sm}|_{y=b} = [-\boldsymbol{a}_y \times (\boldsymbol{a}_z H_{zm} + \boldsymbol{a}_x H_{xm})]_{y=b} = -\boldsymbol{a}_x H_0 \cos\frac{\pi x}{a} + \boldsymbol{a}_z H_m \sin\frac{\pi x}{a}
$$

其中 $H_m = \frac{jk_z k_x}{k_c^2} H_0$。然后，根据(8.2.11)～(8.2.15)就可画出 $TE_{mn}$ 波的场图(图8-6)；图8-7为 $TE_{32}$ 与 $TM_{32}$ 模的结构对比图；图8-8为根据(8.2.16)式画出的传输 $TE_{10}$ 模时波导内壁上的面电流分布

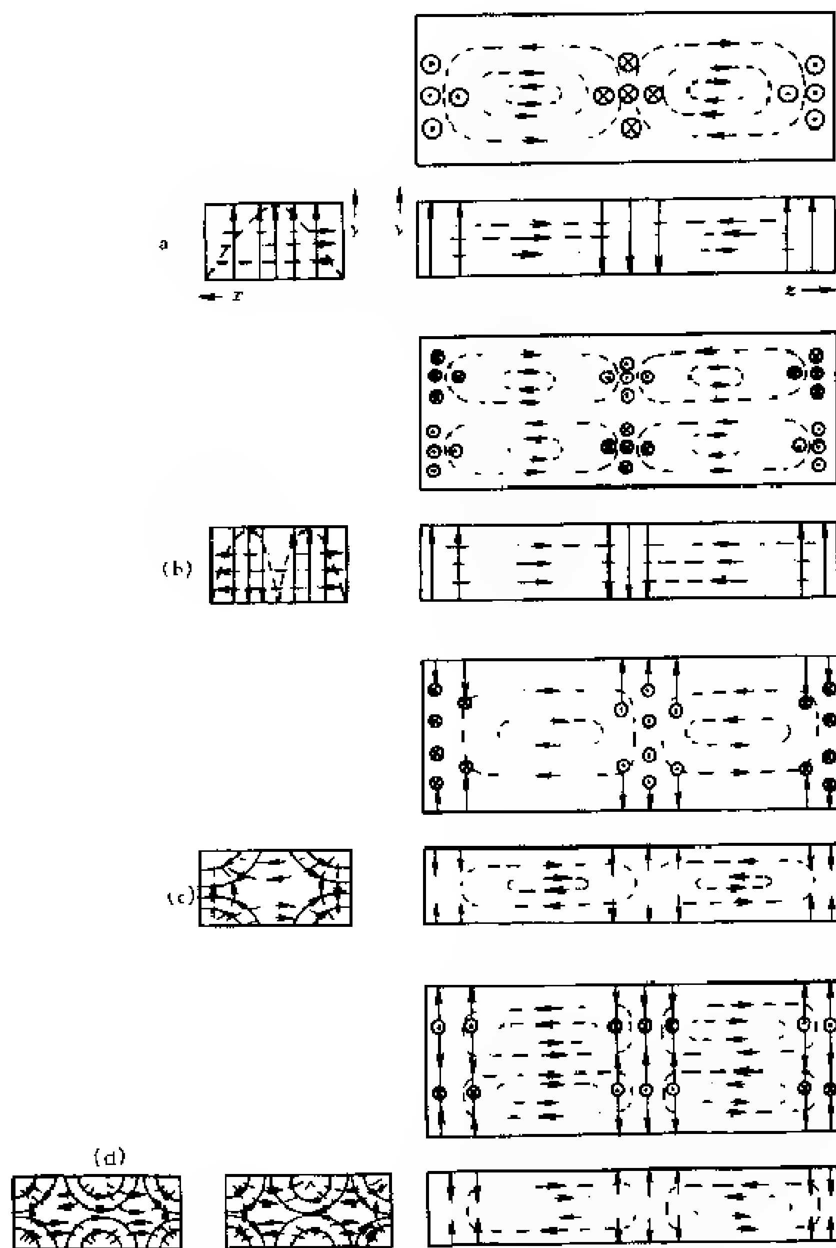



图 8.6　$TE_{mn}$ 模式($H_{mn}$ 波)场结构图例

(a) $TE_{10}$ 模；(b) $TE_{20}$ 模；(c) $TE_{11}$ 模；(d) $TE_{21}$ 模。

电力线；- 磁力线

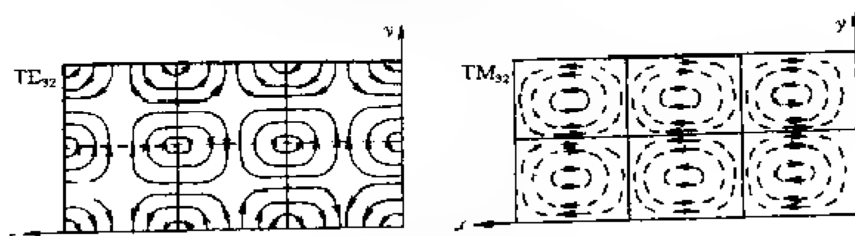



图 8-7　$TE_{mn}$ 模和 $TM_{mn}$ 模

——电力线；　磁力线。

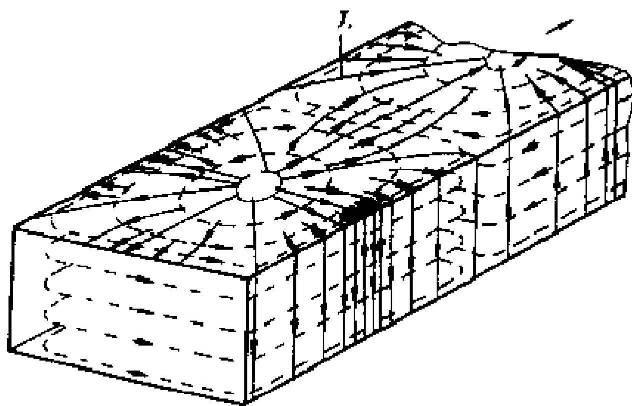


图8.8　传输 $TE_{10}$模时波导内壁面电流分布图

## 三、矩形波导的截止频率和传输特性

矩形波导中 TE、TM 模的横向"波数"都是 $k_x=\frac{m\pi}{a}$，$k_y=\frac{n\pi}{b}$，故根据(8.2.2)和(6.9.9)，这两种模的纵向波数(相移常数)及其相应的含义为

$$\beta_z=k_z=(k^2-k_c^2)^{1/2}=\left[\frac{\omega^2}{c^2}-(k_x^2+k_y^2)\right]^{1/2}=\left[\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\begin{cases}\text{实数} & (k_z^2>0\ \text{或}\ k^2>k_c^2) & \text{表示行波}\\ 0 & (k_z^2=0\ \text{或}\ k^2=k_c^2) & \\ \text{虚数} & (k_z^2<0\ \text{或}\ k^2<k_c^2) & \text{表示衰减场}\end{cases}\tag{8.2.17}$$

其中

$$k_c=\sqrt{k_x^2+k_y^2}=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\tag{8.2.18}$$

由(6.9.9)知 $k_z$ 为虚数 $j\alpha$ 时，$e^{-jk_zz}=e^{-\alpha z}$ 表示衰减场，不能沿 $z$ 方向传播。因此，随着 $\omega$ 的降低，使 $k_z=0$ 即 $k^2=k_c^2$ 的频率 $f_c$ 是一个界线，频率低于 $f_c$ 的或说波长大于 $\lambda_c=c/f_c$ 的模式 $TM_{mn}$ 或 $TE_{mn}$ 将不能在矩形波导中传播。这是波导特有的现象。由于只有频率高于 $f_c$ 的模式才是传输模式，故波导相当于一个高通滤波器。根据(8.2.17)以及 $k^2=k_c^2$ 可算出

$$\omega_c=ck_c=c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\tag{8.2.19}$$

截止频率

$$f_c=\frac{ck_c}{2\pi}=\frac{c}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}=\frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\tag{8.2.20}$$

截止波长

$$\lambda_c=\frac{2\pi}{k_c}=\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}}\tag{8.2.21}$$

(8.2.20)式的末一个等号是考虑了不限于空气的任意完纯介质($\mu,\epsilon$)的情形。

对于 TEM 模的特例，由于必须有 $k^2=k_c^2=0$(参(8.1.11)式)，故截止频率 $f_c=0$，也就是对 TEM 模的传输没有频率限制，如同自由空间的行波一样。既然 TEM 传输线上连静态场都能存在，这一结论也是自然的。

(8.2.20)式表明，截止频率是波导尺寸 $a$、$b$ 以及波型参数 $m$、$n$ 的函数。对于给定尺寸的波导管，越是高阶的模式截止频率越高。

**例 8.1** 矩形波导宽边 $a=5$ cm,窄边 $b<5$ cm,工作频率为 $f=10^{10}$ Hz,问该波导能传输几种波型?

**解** 对 $TE_{m0}$ 模有 $n=0$,故根据(8.2.21)式得

$$\lambda_c = \frac{2a}{m} = \frac{0.1}{m}$$

$$f_c = \frac{c}{\lambda_c} = \frac{3\times 10^8}{0.1/m} = 3m\times 10^9 \quad (\mathrm{Hz})$$

对 $TE_{10}$ 模,$m=1$,$f_c=3\times 10^9$ Hz

对 $TE_{20}$ 模,$m=2$,$f_c=6\times 10^9$ Hz

对 $TE_{30}$ 模,$m=3$,$f_c=9\times 10^9$ Hz

对 $TE_{40}$ 模,$m=4$,$f_c=12\times 10^9$ Hz

因为 $f>f_c$ 才能传播,故无论窄边尺寸如何,该波导能传输的至少有 $TE_{10}$、$TE_{20}$、$TE_{30}$ 三种模式。

由(8.2.20)式还可看出:对于给定的截止频率,可能不只有一组 $m$、$n$ 值的解。换言之,两种模式可能具有相同的截止频率,因而它们出现的可能性也相同。这种现象称为简并。并且,当 $TE_{mn}$ 和 $TM_{mn}$ 模的 $m$、$n$ 值分别相等时截止频率也相等,也是简并模式

现在考虑一个 $b/a=1/2$ 的矩形波导。按(8.2.21)式可算出主波 $TE_{10}$ 模及相邻的低阶模的截止波长为

$TE_{10}$:

$$\lambda_c = 1\Big/\sqrt{\left(\frac{1}{2a}\right)^2} = 2a$$

$TE_{01}$:
$TE_{20}$:

$$\lambda_c = 1\Big/\sqrt{\left(\frac{1}{2b}\right)^2} = 1\Big/\sqrt{\left(\frac{2}{2a}\right)^2} = a \tag{8.2.22}$$

$TE_{10}$ 和 $TE_{20}$ 即为简并模式。

利用截止波长的不同,我们可以合理设计波导的尺寸,使实现单模传输,因为多模工作会使模式的激发和能量的提取发生困难。根据上述计算,为了传输 $TE_{10}$ 模而又排除相邻的 $TE_{10}$ 和 $TE_{20}$ 模,波导的宽边尺寸应满足

$$0.5\lambda < a < \lambda$$

一般采用 $a=0.7\lambda$($\lambda$ 为自由空间中的波长)。由此也可见波导管的尺寸是同工作波长相比拟的。(8.2.22)式还表明,矩形波导管只能工作在半波长短于宽边的频率上。而当 $\lambda/2=a$ 时,一切波型都会截止。关于这一现象,可以借助传输线理论来作一简单的物理解释。

如果在双平行传输线上并联一些 $\lambda/4$ 的短路线,不会影响传输线的工作(因为 $\lambda/4$ 短路线的输入阻抗 $Z_i=\infty$),而许许多多个这样的短路线就拼成了矩形波导,其宽边为 $\lambda/2$(如图 8-9 所示)。显然,短路线不能短于 $\lambda/4$,也就是矩形波导宽边 $a$ 不能小于 $\lambda/2$。

利用平面波在完纯导体平面斜入射的知识也可以帮助理解矩形波导 $a>\lambda/2$ 且 $a=m\lambda_x/2$、$b=n\lambda_y/2$ 等现象。以图 8-10 中的垂直极化波为例,由 7.7 节知,若入射波和反射波分别为

$$\dot{\boldsymbol{E}}_i = E_m e^{-jk_i\cdot r} = E_m e^{-jk(z\sin\theta - x\cos\theta)}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}_r = E_m e^{-jk_r\cdot r} = E_m e^{-jk(z\sin\theta + x\cos\theta)}$$

则它们相互干涉而成的合成波为TE模。我们也可以换一种看法，把 $E^+$ 和 $E^-$ 看成是无界空间中的两列分别沿 $\boldsymbol{k}^+$、$\boldsymbol{k}^-$ 方向传播的均匀平面波。对于合成波而言，它们也称为部分波。

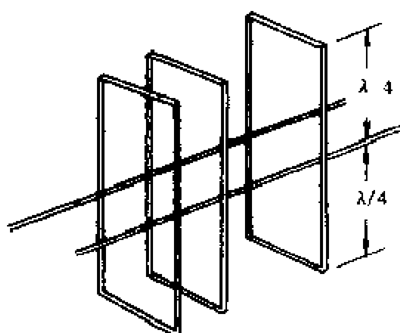



图8-9 由双平行传输线过渡到矩形波导管

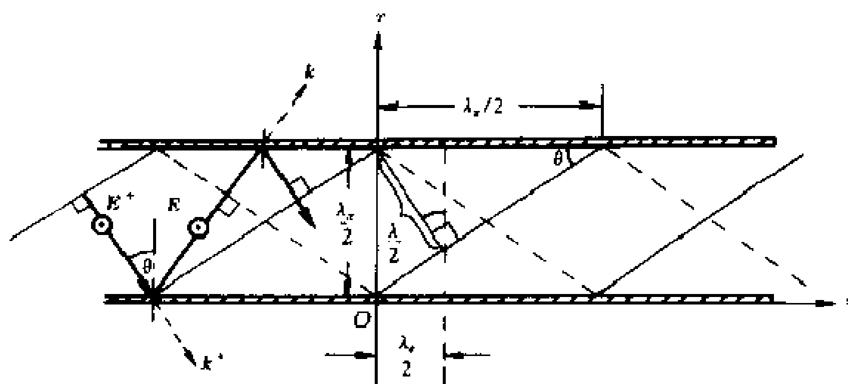



图8-10 两列部分波——平面入射波和反射波的迭加
—— 入射波等相位面；--- 反射波等相位面。

按照(7.7.40)式，它们合成的是TE模，其电场强度为

$$E = E^+ + E^- = 2jE_m \sin kx\cos\theta e^{-jkz\sin\theta}$$

在

$$x = \pm\frac{\lambda}{2\cos\theta} = \pm m\frac{\lambda_x}{2} \tag{8.2.23}$$

的平面上 $E_y=0$。显然，如果在 $x=0$ 和 $x=a=\lambda_x/2$ 的平面上各放置一块无限大完纯导体薄板，如图8-10所示，电场切向分量为零的边界条件会自动满足，因此将不会影响周围的电场分布。导体板的存在使电磁波限制在板间的区域传播。这就是例6.11中平板波导的原理。由于电场在 $y$ 方向无变化，传播的显然是 $\mathrm{TE}_{m0}$ 型波。又由于电场只有 $y$ 分量，故不妨在 $y=0$，$y=b$ 的平面加装一张导体薄板，这就形成了一个矩形波导管，而且在 $y=0$，$y=b$ 处电场和磁场的边界条件都自动满足，不会影响原来的 $\mathrm{TE}_{m0}$ 型场分布。

从(8.2.23)式和图8-10容易看出，矩形波导的宽边 $a$ 必须是 $x$ 方向的半波长 $\lambda_x/2$ 的整数倍(同样道理，若部分波换成两列平行极化波，在上述平板波导中传播的将是TM模，且窄边 $b$ 必须是沿 $y$ 方向的半波长 $\lambda_y/2$ 的整数倍)。并且，由于

$$\cos\theta = \frac{\lambda/2}{\lambda_x/2} = \frac{\lambda}{2a} < 1 \tag{8.2.24}$$

波导中的传输型波的半波长不可能大于宽边尺寸，也就是存在着频率的下限。这是因为当达到临界状态 $\frac{\lambda}{2}=a=\frac{\lambda_c}{2}$ 时有 $\theta=0$，此时等相位面将平行于 $x=a$ 的波导壁，因而波只能垂直于两壁来回反射，不能前行。

截止频率的存在也是波导管不宜用在厘米波以低的波段的原因。例如，对于工作波长 $\lambda=1\mathrm{m}$($f=300$ MHz)的 $\mathrm{TE}_{10}$ 模，其波导宽边至少应为 $\lambda/2=0.5$ m才能使 $f>f_c$，这就造成体积过大，材料浪费，故波导管至少都工作在800 MHz以上的频段。

以上讨论了截止频率、截止波长，下面介绍波导管中的其他传输参数。

由8-10图还可看出，沿波导的轴向的波长、相速和能速分别为：

波导波长 $$\lambda_z = \frac{\lambda}{\sin\theta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} > \lambda \quad (\lambda\text{ 为自由空间的波长}) \tag{8.2.25}$$

沿波导轴向的相速 $$v_{pz}=\lambda_z f=\frac{\omega}{k_z}=\frac{\omega}{k\sin\theta}=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}>c \tag{8.2.26}$$

波导中能量传播的速度 $$v_{ez}=\lambda_e f=c\sin\theta=c\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}<c \tag{8.2.27}$$

由上两式知 $$v_{pz}v_{ez}=c^2 \quad (\text{因为 } \lambda_z\lambda_e=\lambda^2) \tag{8.2.28}$$

与(7.2.10a)式相同。此外，由轴向的波数

$$\beta=k_z=\sqrt{k^2-k_c^2}=\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2}=\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2} \tag{8.2.29}$$

可求出群速

$$v_g=\frac{d\omega}{d\beta}=1\Big/\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)=c\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}=v_{ez} \tag{8.2.30}$$

这表明波导中的能速等于群速即有限的窄带信号或波包(包络)的传播速度。

从(8.2.26)和(8.2.30)可看出，无论相速 $v_{pz}$ 或群速 $v_g$ 都与频率有关，因而波导管是典型的色散导波装置。

从(8.2.29)式出发，我们还可画出无耗波导的色散曲线或称 $\omega\beta$ 图，也称 $k_z-\omega$ 图。如果考虑波导中填充的可以是任意完纯介质($\mu=\mu_0,\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$)，则(8.2.29)式可变为

$$\beta=\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2}=\sqrt{\frac{\omega^2\varepsilon_r}{c^2}-k_c^2}$$

移项得

$$\omega=\pm\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}\beta\sqrt{1+\frac{k_c^2}{\beta^2}} \tag{8.2.31}$$

图 8-11 即是上式的函数图像即色散曲线。在自由空间中 $k_c=0$，显然 $\omega\beta$ 图为直线，斜率为 $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$，它随着介质的 $\varepsilon_r$ 的增大而减小。由 $\beta\to\infty$ 时 $\omega\to\pm\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}\beta$ 可知该直线为色散曲线的渐近线。图中的 1 和 2 分别为 $\varepsilon_r=1$ 和 $\varepsilon_r>1$ 时的色散曲线及其渐近线；色散曲线上的某点 $P$ 至 $O$ 点连线的斜率即为该点的相速 $v_{pz}$，而曲线上任一点的切线斜率则是群速 $v_g=\frac{d\omega}{d\beta}$。由 $\beta=0$ 和(8.2.19)式可知，曲线在 $\omega$ 轴的截距即为 $\omega_c$。如果考虑任意介质($\varepsilon_r$)的情形，截止频率应为

$$\omega_c=\frac{ck_c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

它随介质 $\varepsilon_r$ 的增大而降低。

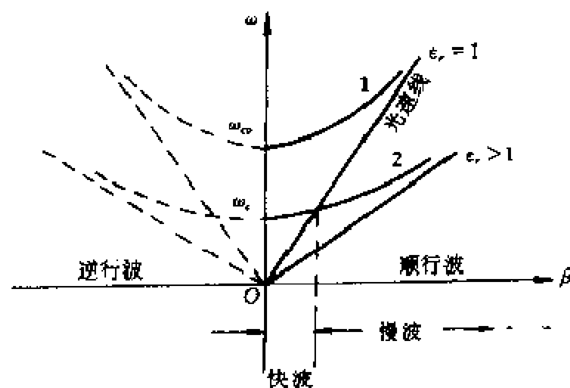



图 8-11 真空和介质中波导的色散曲线——$\omega\beta$ 图比较

填充介质后的色散曲线会与光速线($\varepsilon_r=1$)相交，交点以左为快波区($v_{pz}>c$。关于相速高于光速的解释见 7.2 节)，以右为慢波区($v_{pz}<c$)。当填充 $\varepsilon_r$ 较大的介质时，波导内主要是传输慢波(参见 8.4 节)，只是在 $\omega$ 接近 $\omega_c$ 时整个状态才转变为快波。

TE 模和 TM 模的波阻抗可分别利用(8.2.5)、(8.2.8)式和(8.2.13)、(8.2.14)式算出，它们都是电场与磁场的横向分量之比：

$$Z_{TE}=\frac{E_x}{H_y}=-\frac{E_y}{H_x}=\frac{\omega\mu}{k_z}=\frac{\omega\mu}{\sqrt{k^2-k_c^2}}=\frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}>\eta \tag{8.2.32a}$$

$$Z_{TM}=\frac{E_x}{H_y}=-\frac{E_y}{H_x}=\frac{k_z}{\omega\mu}=\frac{\sqrt{k^2-k_c^2}}{\omega\mu}=\eta\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}<\eta \tag{8.2.32b}$$

其中 $\eta$ 为媒质的本质阻抗。

从上式看出，当 $f<f_c$ 时 $Z$ 将变为虚数即纯电抗。因此，在截止状态下沿波导的衰减波并不表示能量的焦耳损耗，因为波导中是无耗介质。由于 $Z$ 为纯电抗，能量只是在电源与波导之间来回反射而并未消耗掉。

当然，波导中也并不是完全无焦耳损耗的。这主要是因为波导壁并非完纯导体(一般为紫铜、黄铜或银)。由此造成的衰减行波的衰减因子可通过计算损耗功率与传输功率的有关比值而得到的。

当波导的终端阻抗匹配($Z_L=Z_c$)时，波导中没有来自终端的反射波，只有前向的行波。此时，波导管中传输的功率可在波导管横截面上对坡印廷矢量积分而得到。

**四、关于 $TE_{10}$ 模**

在矩形波导中大多采用 $TE_{10}$ 模，这是因为：

1. 采用这种模式容易通过适当设计波导尺寸而实现单模传输。

2. 在同样的截止波长下，传输 $TE_{10}$ 模所需的宽边尺寸 $a$ 最小，且窄边尺寸 $b$ 同截止波长无关，可以设计得尽量小，以便节省材料(但太小了波导容易击穿，且衰减会增大)。

3. $TE_{10}$ 模到相邻的高阶模 $TE_{20}$ 间的频率间距比其他高阶模之间的间距大，因此，可在较宽的频带上传播(高低端频率比为 1.5∶1)。

4. 对于给定的 $b/a$ 比值，在相同的工作频率下，$TE_{10}$ 比其他的模衰减都小。

5. $TE_{10}$ 的 $k_x=\pi/a$，$k_y=0$，代入(8.2.13)式得 $E_{xm}=0$，只剩下 $E_y$，表明在波导中可获得单方向极化。在某些情况下正需要这样。

**五、非矩形波导**

除了矩形波导，圆波导也是一种常用的波导。圆波导中场的分析方法同矩形波导类同，只是改用圆柱坐标下的齐次标量波动方程(6.9.19)及其解式(6.9.24)，并采用纵向分量法。圆波导传输的 $TM_{mn}$ 和 $TE_{mn}$ 模同样各具有相应的截止波长等传输参数。圆波导中传输的主波是 $TE_{11}$ 模，与其他模相比 $TE_{11}$ 模衰减最小。图 8-12 是圆波导的几种低阶模式的场图。

圆波导与矩形波导相比的优点是能覆盖更宽的频带，衰减更小。故其重要的应用领域是微波中继通信。对于同样大的极限功率，圆波导壁的面积小于方波导壁的面积，所以电流热损耗较小，故在微波部件中也得到广泛应用，如圆波导喇叭、波长计、回波箱、移相器、精密可变衰减器、隔离器、调制器中都要使用圆形波导段。

扇形波导由于能同圆柱体共形(共轴)，故可被设计成共形的辐射缝隙、缝隙阵列、宽频带长槽天线。在微波波段的低端优点更显得突出。

椭圆波导可制做成铝制光壁、铜制皱纹壁两种；它柔软可曲、可绕、重量轻、成本低，便于远

距离运输、架设和维护。

脊波导同矩形波导相比，单模工作的频带更宽，且尺寸小、特性阻抗低。

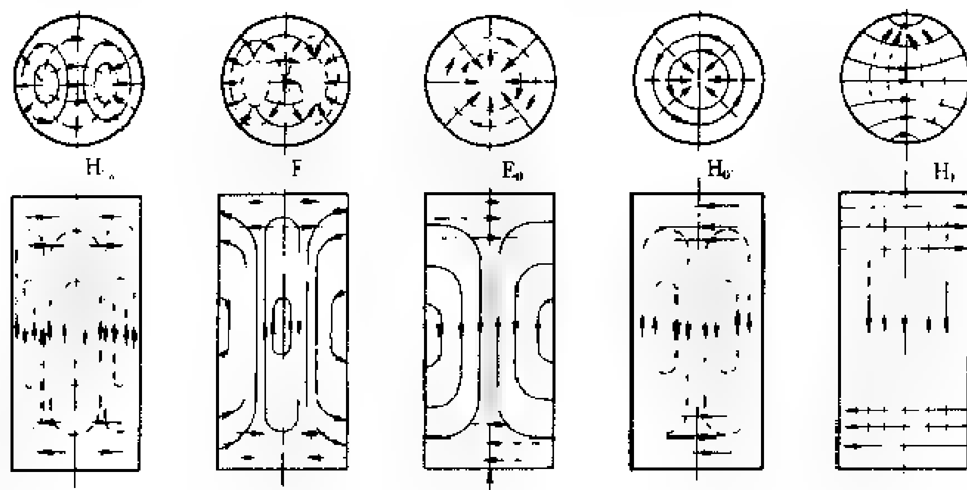


图8-12 圆波导中的TE模(H波)和TM模(E波)
——电力线， 磁力线

以上是几种常用的金属波导管。在光纤广泛应用之前，人们普遍认为它将是最主要的通信传输线。随着光纤的出现，人们较少应用金属波导管了。但至今在一些场合仍是不可少的，因为它们特别适于大功率传输。

## 8.3 谐 振 腔

从上一节我们已看到，矩形波导中场的横向分布均为驻波，仅沿 $z$ 方向为行波。如果在 $z=0$ 和 $z=d$ 处置一短路壁，构成箱状，则行波将在 $z$ 方向来回反射，也形成驻波。这就是谐振腔，如图8-13所示。

1. 谐振频率

为了不破坏原来的场结构，要求 $d$ 为半波长的整数倍，即 $d=l\frac{\lambda}{2}(l=1,2,\cdots)$，这意味着矩形波导中 $TM_{mn}$ 或 $TE_{mn}$ 的相移常数 $k_z$ 必须满足

$$k_z d = l\pi$$

$$k_z = \frac{l\pi}{d}$$

由 $k_z^2=k^2-k_c^2$，得

$$k=(k_c^2+k_z^2)^{1/2}=(k_x^2+k_y^2+k_z^2)^{1/2}=\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{d}\right)^2\right]^{1/2}=k_{mnl}\quad(8.3.1)$$

与 $k_{mnl}$ 相对应的频率就是谐振腔的谐振频率：

$$f_{mnl}=\frac{v}{2\pi}k_{mnl}=v\left[\left(\frac{m}{2a}\right)^2+\left(\frac{n}{2a}\right)^2+\left(\frac{l}{2d}\right)^2\right]^{1/2}\quad\left(v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)\quad(8.3.2)$$

$m$、$n$、$l$ 分别表示在 $a$、$b$、$d$ 长度上即 $x$、$y$、$z$ 方向的半波个数。图8-13中所示为 $m=l=1$，$n=0$ 的情形

由(8.3.2)式可看出，对于给定尺寸 $a$，$b$，$d$ 的谐振腔，随着 $m$，$n$，$l$ 的不同，有无数多种

谐振频率。反过来，同一种谐振频率 $f_{mnl}$ 则对应着一个以上的模式（因为对于给定尺寸的谐振腔，$m,n,l$ 中有两个参数可独立选择）。这也称之为简并现象。此外，由于矩形的三个维度地位是对称的，如果把坐标系转动，使 $x,y,z$ 换位，则物理上的同一种场型从数学上会变成另一种模式。例如按 $x\to y, y\to z, z\to x$ 把坐标系转动，则谐振腔的 $\mathrm{TM}_{mnl}$ 模就变成为 $\mathrm{TE}_{lmn}$ 模，如图 8-14 所示。

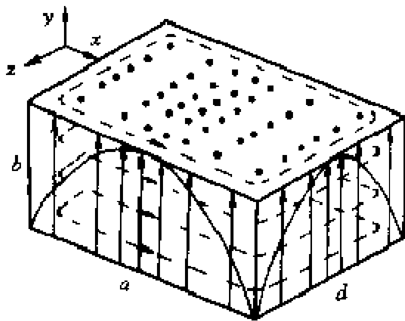


图 8-13 矩形谐振腔中 $\mathrm{TE}_{101}$ 振荡模式的场分布

电力线；--- 磁力线

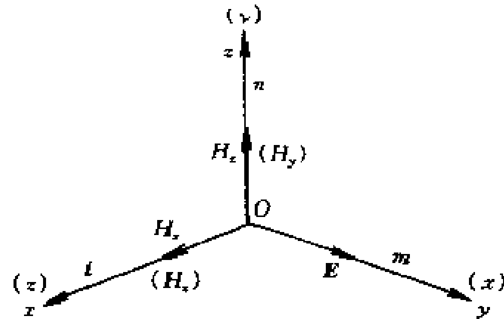


图 8-14 坐标系转动使模式转换

2. 谐振腔中场的解法

由于谐振腔中为无源区，且一般为均匀线性介质（如空气），故腔中的场仍用齐次波动方程来描述。由于在三个维度上皆为驻波，解式(6.9.8)应取如下形式：

$$\Psi_k = F_1F_2F_3 = \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} k_x x \cdot \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} k_y y \cdot \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} k_z z \tag{8.3.3}$$

而 $\Psi_k$ 可代表 $E_{xm}$、$E_{ym}$、或 $E_{zm}$。例如，若 $\Psi_k$ 代表 $E_{xm}$，则

$$E_{xm} = (A\sin k_x x + B\cos k_x x)(C\sin k_y y + D\cos k_y y)(E\sin k_z z + F\cos k_z z)$$

在 $y=0,b$ 和 $z=0,d$ 处应满足 $E_t=E_{xm}=0$，故得

$$D=F=0$$

于是

同理可得

$$\left.\begin{aligned} E_{xm} &= (A_1\sin k_x x + E_1\cos k_x x)\sin k_y y\sin k_z z\\ E_{ym} &= (A_2\sin k_y y + E_2\cos k_y y)\sin k_z z\sin k_x x\\ E_{zm} &= (A_3\sin k_z z + E_3\cos k_z z)\sin k_x x\sin k_y y \end{aligned}\right\} \tag{8.3.4}$$

谐振腔中无源，故应有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{8.3.5}$$

把(8.3.4)代入上式，可得到 $A_1=A_2=A_3=0$（因为只有这样才有可能使上式对任意 $x$、$y$、$z$ 值都成立），$k_xE_1+k_yE_2+k_zE_3=0$ 以及

$$\left.\begin{aligned} E_{xm} &= E_1\cos k_x x\sin k_y y\sin k_z z\\ E_{ym} &= E_2\sin k_x x\cos k_y y\sin k_z z\\ E_{zm} &= E_3\sin k_x x\sin k_y y\cos k_z z \end{aligned}\right\} \tag{8.3.6}$$

由(8.3.6)式可看出：与同一个 $f_{mnl}$ 对应的多种模式中，$m,n,l$ 之中至多只能有一个为零，否则三个场分量将同时为零。

把(8.3.6)式代入 $\boldsymbol{H}_{m}=-\dfrac{\nabla\times\boldsymbol{E}_{m}}{j\omega\mu}$,就得到磁场的三个分量:

$$
\begin{aligned}
H_{xm}&=H_1\sin k_x x\cos k_y y\cos k_z z\\
H_{ym}&=H_2\cos k_x x\sin k_y y\cos k_z z\\
H_{zm}&=H_3\cos k_x x\cos k_y y\sin k_z z
\end{aligned}
\tag{8.3.7}
$$

从(8.3.6)、(8.3.7)式可看出,它们自动满足腔壁上的边界条件。

图 8.13 为 $TE_{101}$ 振荡模式的电力线(实线)、磁力线(虚线)分布情况。

3. 品质因数

对于谐振腔,所关心的性能参数是其品质因数 $Q$,它定义为

$$
Q=\omega\frac{\text{储存能量 }W}{\text{损耗功率 }P}
\tag{8.3.8}
$$

其中损耗功率应包括腔壁上表面电阻的损耗和电介质中的损耗;$W$ 应是电场和磁场贮能之和。电场、磁场贮能的时间平均值 $W_e$ 和 $W_m$ 应分别是电场、磁场能量密度 $w_e$、$w_m$ 对腔体空间 $\tau$ 的积分

$$
W_e=\int_\tau w_e\,\mathrm{d}\tau=\frac{\varepsilon}{4}\int_\tau E^2\mathrm{d}\tau
$$

$$
W_m=\int_\tau w_m\,\mathrm{d}\tau=\frac{\mu}{4}\int_\tau H^2\mathrm{d}\tau
$$

以 $TE_{101}$ 模为例,根据(8.3.6)、(8.3.7)式,它只有 $E_y$、$H_x$、$H_z$ 分量,代入上式可得 $W_e=W_m$,故 $W=2W_e$。损耗功率 $P$ 的计算是把(7.4.19)式表示的损耗功率面密度 $\frac{1}{2}R_S|H_t|^2$ 对全部腔壁 $S$ 进行面积分而求得的:

$$
P=\frac{R_S}{2}\oint_S|H_t|^2\mathrm{d}S
$$

其中的 $H_t$ 在腔的三种端面上分别等于(8.3.7)式中的 $H_x$、$H_y$、$H_z$ 在边界上的值。最终算出 $TE_{101}$ 的空载品质因数为

$$
\begin{aligned}
Q&=(K_{101}ad)^3b\eta/2\pi^2R_S(2a^3b+a^3d+ad^3+2d^3b)\\
&=\frac{abd}{\delta}\cdot\frac{a^2+d^2}{2b(a^3+d^3)+ad(a^2+d^2)}
\end{aligned}
\tag{8.3.9}
$$

上式后一个等号是根据

$$
R_S=\frac{1}{\sigma\delta}\qquad\left(\delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}},\sigma\text{ 为电导率}\right)
$$

和

$$
k_{101}=\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}=\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{d}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{d}\right)^2}
$$

除了矩形波导的一段所形成的谐振腔,也可由圆[柱形]波导或同轴线的一段形成谐振腔。其分析方法与上述完全相仿。圆柱形振腔由于结构简单,加工方便,品质因数高,在实践中应用比较广泛。它主要工作于 $TE_{111}$、$TE_{011}$、$TE_{010}$ 三种振荡模式。

上述几种谐振器以及带状线、微带线型的谐振器都属于传输线型谐振器,多用于波长计、回波箱和滤波器中。此外,还有环形、径向线形、多瓣式等非传输线形谐振器分别应用于塔型管、速调管、磁控管等微波部件中。

从谐振电路的概念出发来理解电磁波的谐振器是有益的。例如，环形谐振器就可以看成是按图 8-15 所示由谐振电路演变而来的。

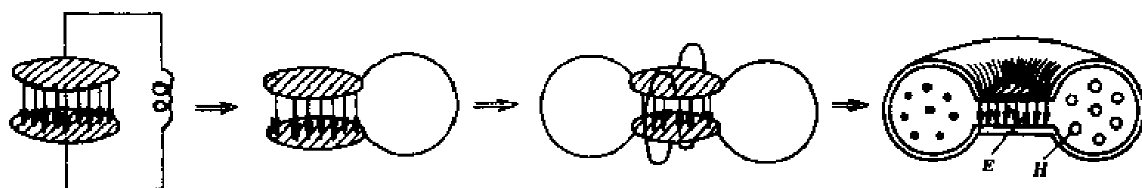



图 8-15　由集总参数 LC 振荡器向谐振腔的演变

## 8.4　介 质 波 导

与闭合的金属波导不同，介质波导是没有空腔导体屏蔽的开放式波导。它的传输机理是当 $\theta>\theta_c$ 时在光密媒质中传播的电磁波在与光疏媒质的分界面上会产生全反射(见 7.7 节的介绍)，所以它能够维持非辐射的导行波。

对介质波导的分析是在与金属波导管不同的媒质和边界条件下求解同样的齐次标量波动方程(6.9.5)或(6.9.19)，但它们的通解 $\Psi_k$ 在这里将被理解为标量位函数而非纵向场分量。

我们仅以最基本的平板介质波导为例作一简单介绍；其他形状，如矩形、圆形、$H$ 型以及槽波导，分析方法大多如此。

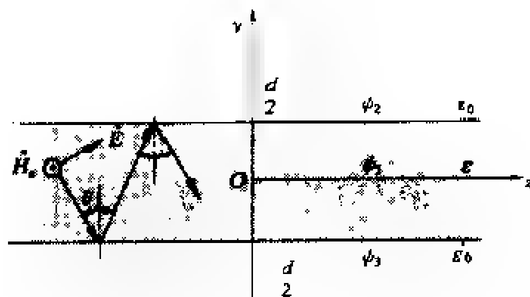



图 8-16　平面介质波导

无限大均匀介质板形成的平面介质波导如图 8-16 所示。波沿 $z$ 方向传播，在 $x$ 方向无变化，介质板内的电磁波在 $y$ 方向来回全反射而形成驻波，构成许多种 TM 或 TE 波型。介质板之外应为衰减场，以使能量被限制在这种微波传输线附近而保证沿 $z$ 方向的正常传输。基于以上分析，按照（6.9.9），在图 8-16 的三个不同区域中应假设齐次标量波动方程（6.9.5）及其解式（6.9.8）中的 $\Psi_k=F_1F_2F_3$ 具有如下的函数形式：

$$\Psi_1=\begin{Bmatrix}A_1\cos k_y y\\ A_2\sin k_y y\end{Bmatrix}e^{-jk_z z}\qquad\left(|y|<\frac{d}{2}\right)$$

$$\Psi_2=B_+e^{-\alpha\left(y-\frac{d}{2}\right)}e^{-jk_z z}\qquad\left(y\geqslant\frac{d}{2}\right)$$

$$\Psi_3=B_-e^{\alpha\left(y+\frac{d}{2}\right)}e^{-jk_z z}\qquad\left(y<-\frac{d}{2}\right)\tag{8.4.1}$$

其中

$$k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\mu\varepsilon\qquad(k_x^2=0)\tag{8.4.2a}$$

$$\alpha^2+k_z^2=k_0^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0(k_x^2=0,k_y=-j\alpha)\tag{8.4.2b}$$

与金属波导管的分析方法不同的是，这里把 $\Psi_i$ 理解为标量位，然后再利用标量位来构造矢量位 $\boldsymbol{A}$（这方面的详细论述参考文献[5]）。对于横磁波，我们应令

$$\begin{cases}\text{矢量磁位}\quad \boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{a}_z\Psi_i\quad (i=1,2,3)\\ \text{矢量电位}\quad \boldsymbol{A}_m=0\end{cases}$$

再利用洛仑兹条件 $\Phi=-\dfrac{\nabla\cdot \boldsymbol{A}}{j\omega\mu\varepsilon}$ 以及 $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi-j\omega\boldsymbol{A}$ 就可由 $\boldsymbol{A}$ 计算出场强：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_i&=\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_i)-j\omega\boldsymbol{A}_i\\ \boldsymbol{H}_i&=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}_i\end{aligned}\right\}\quad(i=1,2,3) \tag{8.4.3}$$

利用上式可算出介质内的场强为：

$$\left.\begin{aligned}E_z&=2jE_0\cos\theta\sin(k_y y)e^{-jk_z z}\\ E_y&=-2E_0\sin\theta\cos(k_y y)e^{-jk_z z}\\ H_x&=\frac{2E_0}{\eta_{TM}}\cos k_y y e^{-jk_z z}\end{aligned}\right\} \tag{8.4.4}$$

其中 $E_0=\dfrac{A_2\omega k_2}{2k}$ 应为图8-16中的入射波振幅，$\eta_{TM}=\dfrac{k_z}{\omega\varepsilon}$。

在介质外，由(8.4.3)式算出的场强则为

$$\left.\begin{aligned}E_z&=\mp j\frac{\alpha^2\eta}{k_z\mu_0}B_\pm e^{\mp\alpha\left(y\mp\frac{d}{2}\right)}e^{-jk_z z}\\ E_y&=\pm\frac{\alpha\eta}{\mu_0}B_\pm e^{\mp\alpha\left(y\mp\frac{d}{2}\right)}e^{-jk_z z}\\ H_x&=\pm\frac{\alpha}{\mu_0}B_\pm e^{\mp\alpha\left(y\mp\frac{d}{2}\right)}e^{-jk_z z}\end{aligned}\right\}\quad |y|\geqslant\frac{d}{2} \tag{8.4.5}$$

然后，根据场的切向分量在 $y=\pm\dfrac{d}{2}$ 时连续的边界条件就得到横磁波的特征方程(即用来求解相移常数 $k_z$ 的方程)；由(8.4.2a、b)求出 $k_y$、$\alpha$ 后代入该特征方程可得到 $\omega\beta$ 图即 $k_z-\omega$ 曲线(因为是超越方程，无法得出解析解，只能图解)。

从(8.4.2)式可看出，介质波导中的传播波型的相移常数 $k_z$(即 $\beta$)介于真空和介质的相移常数之间：

$$k_0<k_z<\sqrt{\varepsilon_r}k_0=k \tag{8.4.6}$$

且介质内外的相移常数同为 $k_z$。这是因为波导的横截面是等相位面，介质内外的场必须同相位。由于必须满足分离常数方程(8.4.2a)式，故不可能有 $k_z>\sqrt{\varepsilon_r}k_0$；而由(8.4.2b)式，当 $k_z\to k_0$ 时会有 $\alpha\to0$，这是一个界线。当 $k_z<k_0$ 时 $\alpha$ 将由实数变为虚数。根据(8.4.5)式，这意味着沿 $y$ 方向将不再是指数衰减场，而是辐射波(行波)，这会影响能量沿 $z$ 方向的正常传输。因此，使 $k_z=k_0$ 的频率就是传输模式消失的频率——截止频率。由(8.4.2)式，$k_z=k_0$ 时将有 $k_y=\omega_c(\mu\varepsilon-\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}$，可由此求出截止频率 $\omega_c$。

$\omega_c$ 的表达式表明，介质波导中存在着无低频截止值的波型。此外，在给定的 $\omega$ 下，这种开放式的波导只存在有限个传输波型，不像闭合式波导那样还存在无限个非传输波型。这可以理解为：介质波导中的非传输波型不是闭合式波导中那种频率离散的模式，而是 $\omega<\omega_c$ 的频谱连续的辐射场。所以，介质波导同金属波导管截止频率的概念是有本质区别的：前者的截止波型为辐射场，后者的截止波型为衰减场。

(8.4.5)式还表明，介质波导这种开放式波导能传输表面波(故也称表面波导)，电磁波的主要能量是在介质内传播，在介质外部则约束在波导表面附近。并且，由于纵向波数 $k_z=$

$\sqrt{k_0^2+\alpha^2}>k_0$，沿 $z$ 方向的相速将小于光速（$v_z=\frac{\omega}{k_z}<\frac{\omega}{k_0}=c$），所以该表面波具有慢波特性。图8-17是几种实用的表面波导及其电力线、磁力线分布。

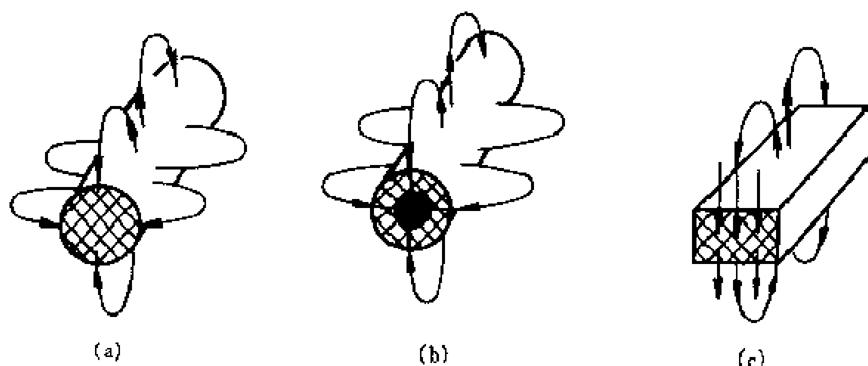



图8-17 表面波导的几种形式

(a)介质导线；(b)Goubeeau波导；(c)矩形介质波导。

用高介电常数、低损耗的介质也可制做谐振器。图8-18是几种常见的介质谐振器。

当 $\varepsilon_r$ 很大（通常取 $\varepsilon_r\geqslant 30$ 的材料），介质的本质阻抗 $\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}}\ll\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=\eta_0$，故电磁波几乎会被全反射：

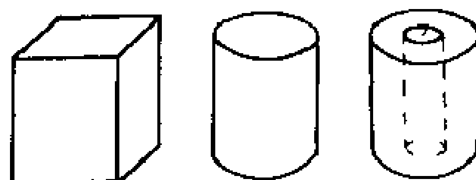


图8-18 几种介质谐振器

$$R=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\approx 1$$

分界面处相当于是开路。而金属谐振腔壁上的全反射则是由于 $\sigma\to\infty$，使 $\eta=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\left(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)}}\to 0$。相当于是短路壁，因而也会有

$$R=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=\frac{\eta-\eta_0}{\eta+\eta_0}\to -1$$

显然，二者的全反射机理是不同的。此外，金属谐振腔的场完全限制在腔内，而介质谐振器的场向外界有透射。

介质谐振器有很多优点，它远比金属谐振腔体积小、重量轻，且 $Q$ 值高，频率稳定性好，谐振频率范围宽，可用到毫米波段（100 GHz以上）。特别是在微波集成电路中，介质谐振器已取代了金属波导类谐振器。

由于介质无耗，又不存在金属波导壁上电流的热损耗，故介质波导可工作于比金属波导更高的频段。一般金属波导管用于厘米波段，而介质波导用于毫米波段，直至光波段。在20世

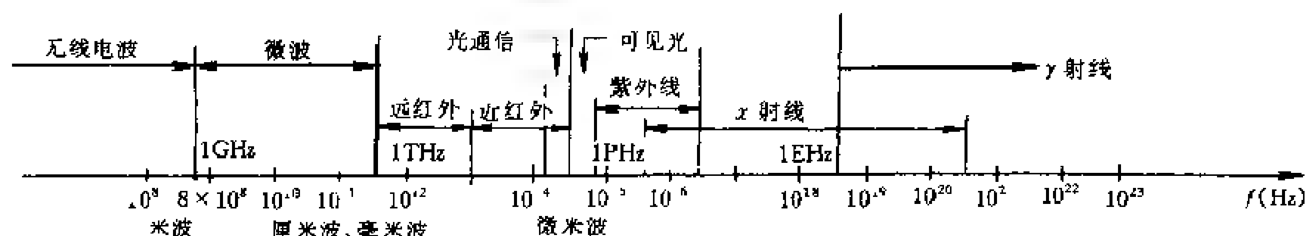



图8-19 波段划分简图

纪50年代后期介质波导曾被认为是远距离、大容量通信的最理想介质，技术问题也已完全解决。但还未来得及广泛应用，就已被光纤的绝对优势所压倒。这是因为在短短的20年中，光导纤维的损耗已从700 dB/km下降到了0.2 dB/km，大大低于同轴线等微波传输线的损耗，容量（指带宽与通信距离的乘积，单位为MHz·km）又千万倍于电波，因而迅速取代了金属波导和尚未广泛应用起来的介质波导。

图8-19表明了微波和光波（或说金属波导管、介质波导和光纤）的适用波段的大致划分

## 8.5 光导纤维

光导纤维的构造如图8-20所示。纤芯主要是在光频下损耗最小的材料——高纯度石英。从纯理论的角度，光导纤维就是缩小了的介质圆波导。纤芯的半径可与光的波长相比拟，约5～10 μm（正如波导管尺寸要与传输波长相比拟），而实际上光纤与介质圆波导有重要差别：纤芯和包层的 $\epsilon_r$ 几乎相同。对于单模光纤，折射率（$n=\sqrt{\epsilon_r}$）的差别仅为0.1%～0.2%（称为弱导光纤）。

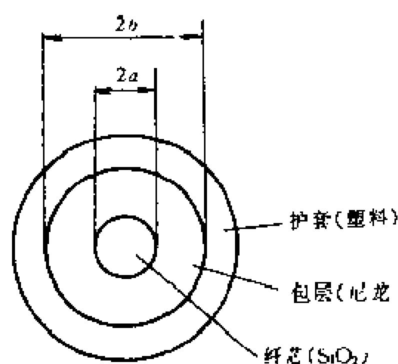


图8-20 光纤截面图

由于多模光纤（指能够传输多种模式的光纤）中传输模式的数量很大，几百以至几千，故用场的方法讨论个别模式意义不大，用几何光学方法更为简单方便，更解决实际问题；而对单模光纤这种只传输一种模式的光波导，用电磁理论去分析却非常有效。其中有些物理现象，如光场透入包层、高阶模的截止，都可得到满意的解释。

光波导与金属波导管相比，虽然分析方法相同，但截止条件、相移常数、相速等都更为复杂。光纤中也不只传输TM、TE模，更重要的是传输 $E_z$、$H_z$ 分量同时存在的混合模式HE（即MF）模和EH（即EM）模，且单模光纤只传 $HE_{11}$ 模。HE模的场分布较接近于图8-12中 $H_0$ 的场图，而EH模的场分布较接近于 $E_{01}$ 的场图。

此外，在金属波导管中电磁波完全局限于波导内，而光波导的场强却近似认为是按高斯分布、存在于 $0\leqslant\rho<\infty$ 的空间的。但是光纤在稳态传输时，场在纤芯之外的包层中衰减很快，在 $\rho$ 接近 $b$ 时场强已可忽略。因而虽然包层厚度有限，也可近似按照包层的边界不存在、一直扩展到无限大空间来分析。

为了突出光纤中的基本现象和基本求解思路，我们只讨论折射率横向分层均匀的阶跃光纤（若 $n$ 连续变化则称为渐变光纤），假设纤芯是 $\epsilon_1$ 为常数的均匀介质圆柱，圆柱外为无限大均匀介质（$\epsilon_2$）。由于光频下的介质都是无磁性的介质，故纤芯和包层折射率分别为 $n_1=\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}=\sqrt{\epsilon_{r1}}$，$n_2=\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}=\sqrt{\epsilon_{r2}}$，且有

$$\Delta=\frac{n_1-n_2}{n_1}\ll 1 \tag{8-5.1}$$

这称为弱导条件。

### 一、光导纤维中场的求解 特征方程

光纤中场的求解思路在数学上与金属圆波导类同，纤芯内外都是在圆柱坐标下的齐次标

量波动方程(6.9.19)的通解(6.9.24)的基础上采用纵向分量法，并在光纤特有的媒质和边界条件下定出特解。在纤芯内外都应假设(6.9.24)式中的 $\Psi_k$ 表示 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的纵向分量 $E_z$、$H_z$。由于纤芯极细，一段光纤完全可以看成是直的，沿光纤纵向为 $z$ 轴。考虑到场强在 $\rho=0$ 处是有限的，在纤芯内(6.9.24)式中的 $B_m(k_\rho\rho)$ 只能取 $J_m(k_\rho\rho)$ 的函数形式，即第一类贝塞尔函数。考虑到 $\rho\to\infty$ 时场强趋于消失，在纤芯外的包层中 $B_m(k_\rho\rho)$ 应取 $K_m(k_\rho\rho)$ 的函数形式，即第二类修正贝塞尔函数(参见图 A4.1)。$F_2(m\varphi)=\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}m\varphi$ 可合并为 $e^{jm\varphi}$ 的形式。假设介质无损耗，则传播常数 $\gamma=j\beta=jk_z$，故在(6.9.2)式中应取 $F_3(k_z z)=e^{-j\beta z}$。

综上所述，纤芯和包层内的纵向场量应分别为

纤芯内($\rho<a$)

$$E_{z1}=E_m J_m(k_{c1}\rho)e^{-j(\beta z-m\varphi)} \tag{8.5.2}$$

$$H_{z1}=H_m J_m(k_{c1}\rho)e^{-j(\beta z-m\varphi)} \tag{8.5.3}$$

包层内($\rho>a$)

$$E_{z2}=E'_m K_m(k_{c2}\rho)e^{-j(\beta z-m\varphi)} \tag{8.5.4}$$

$$H_{z2}=H'_m K_m(k_{c2}\rho)e^{-j(\beta z-m\varphi)} \tag{8.5.5}$$

根据方程(8.1.9)，应有

$$k_{c1}^2=k_1^2-k_z^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_1-\beta^2 \tag{8.5.6}$$

$$k_{c2}^2=\beta^2-k_2^2=\beta^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_2 \tag{8.5.7}$$

由麦克斯韦旋度方程(6.5.14)和(6.5.15)，可导出圆柱坐标下横向和纵向分量之间的关系式(从略)。把(8.5.2)~(8.5.5)式中的纵向分量代入，即可得到各个横向分量

$\rho<a$:

$$E_{\varphi1}=-\left[\frac{m\beta}{k_{c1}^2\rho}E_m J_m(k_{c1}\rho)+j\frac{\omega\mu_0}{k_{c1}}H_m J'_m(k_{c1}\rho)\right]e^{-j(\beta z-m\varphi)} \tag{8.5.8}$$

$$H_{\varphi1}=-\left[\frac{m\beta}{k_{c1}^2\rho}H_m J_m(k_{c1}\rho)-j\frac{\omega\varepsilon_1}{k_{c1}}E_m J'_m(k_{c1}\rho)\right]e^{-j(\beta z-m\varphi)} \tag{8.5.9}$$

$\rho>a$:

$$E_{\varphi2}=-\left[-\frac{m\beta}{k_{c2}^2\rho}E'_m K_m(k_{c2}\rho)-j\frac{\omega\mu_0}{k_{c2}}H'_m K'_m(k_{c2}\rho)\right]e^{-j(\beta z-m\varphi)} \tag{8.5.10}$$

$$H_{\varphi2}=-\left[-\frac{m\beta}{k_{c2}^2\rho}H'_m K_m(k_{c2}\rho)+j\frac{\omega\varepsilon_2}{k_{c2}}E'_m K'_m(k_{c2}\rho)\right]e^{-j(\beta z-m\varphi)} \tag{8.5.11}$$

其中 $J'_m$、$K'_m$ 分别为 $J_m$、$K_m$ 的导函数。然后，根据 $\rho=a$ 处场量切向分量连续的边界条件，把(8.5.2)~(8.5.11)代入 $E_{z1}=E_{z2}$，$H_{z1}=H_{z2}$，$E_{\varphi1}=E_{\varphi2}$，$H_{\varphi1}=H_{\varphi2}$，可得到关于 $E_m$、$H_m$、$E'_m$、$H'_m$ 的四元一次代数方程。它是一个齐次线性代数方程组，为使 $E_m$、$H_m$、$E'_m$、$H'_m$ 具有非零解，其系数行列式必须等于零。将其化简，即可得到光纤中导行波的特征方程(用未求解相移常数 $\beta$ 的方程)：

$$\left[\frac{J'_m(k_{c1}a)}{k_{c1}J_m(k_{c1}a)}+\frac{K'_m(k_{c2}a)}{k_{c2}K_m(k_{c2}a)}\right]\left[\frac{k_1^2J'_m(k_{c1}a)}{k_{c1}J_m(k_{c1}a)}+\frac{k_2^2K'_m(k_{c2}a)}{k_{c2}K_m(k_{c2}a)}\right]=\frac{m^2\beta^2}{a^2}\left(\frac{1}{k_{c1}^2}+\frac{1}{k_{c2}^2}\right)^2 \tag{8.5.12}$$

把(8.5.12)同(8.5.6)、(8.5.7)式联立，就可解出 $k_{c1}$、$k_{c2}$ 及 $\beta$，从而确定光纤中的传播特性。

## 二、截止频率、模式场和相移常数

由 8.2 节，在金属波导管中，只要 $k_z^2=\beta^2>0$ 即 $k_z=\beta$ 为实数，波就能沿 $z$ 方向正常传播。而作为介质波导的光纤却不如此简单。若仅仅满足 $\beta^2>0$ 但却有 $\beta^2<\omega^2\mu_0\varepsilon_2$，按照

(8.5.7)式，在包层中就会使 $k_{c2}^2<0$ 即 $k_{c2}$ 为虚数。从附录 A4 中可知，这时 $K_m(k_{c2}\rho)$ 和 $K'_m(k_{c2}\rho)$ 就不再是衰减函数，而是成为 $H_m^{(2)}$（汉克尔函数）的形状。按照(6.9.26)，$H_m^{(2)}(k\rho)$ 表示沿 $\rho$ 向外辐射的行波，这就使光能在纵向迅速衰减，无法传播。为使场沿 $\rho$ 方向衰减以保证沿 $z$ 方向正常传播，必须满足 $k_{c2}^2>0$。按照(8.5.7)式，即必须使

$$k_2^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_2<\beta^2$$

另外，在纤芯内，为使场在横向呈驻波分布，按照(6.9.26)，必须满足 $k_{c1}^2>0$，由(8.5.6)式，即必须使

$$\beta^2<\omega^2\mu_0\varepsilon_1=k_1^2$$

综上所述，光纤中各种模式的传播条件为

$$k_0n_2=k_2<\beta<k_1=k_0n_1 \qquad (k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}) \tag{8.5.13}$$

截止条件为 $k_{c2}^2=0$，即

$$\beta=k_2=k_0n_2 \tag{8.5.14}$$

使上式成立的频率即为截止频率。(8.5.13)式表明，光纤中传输波型的相移常数是介于包层介质的相移常数和纤芯介质的相移常数之间的一个值。而且，纤芯内外是同一个 $\beta$ 值，以保证波传播的横断面上场量同相位。

为了书写的简洁方便，我们还可令

$$U=a(k_0^2n_1^2-\beta^2)^{1/2}=ak_{c1} \tag{8.5.15}$$

$$W=a(\beta^2-k_0^2n_2^2)^{1/2}=ak_{c2} \tag{8.5.16}$$

$$V^2=U^2+W^2=a^2k_0^2(n_1^2-n_2^2) \tag{8.5.17}$$

在光纤的介质和结构确定的情况下 $V$ 只与光频有关，因此称为归一化频率。于是，截止条件也可写为 $W=0$，截止频率则是使 $W$ 为零的频率。此外，在弱导条件(8.5.1)之下，特征方程(8.5.12)也可变为更简单的形式：

$$\frac{1}{U}\frac{J'_m(U)}{J_m(U)}+\frac{1}{W}\frac{K'_m(W)}{K_m(W)}=\pm m\left(\frac{1}{U^2}+\frac{1}{W^2}\right) \tag{8.5.18}$$

根据上式中 $m$ 的三种情况，即可得到场模及相应的截止频率：

(1) 当 $m=0$，可以导出传输模为 TE、TM 模，此时(8.5.18)式变为

$$\frac{UJ_0(U)}{J'_0(U)}=-\frac{WK_0(W)}{K'_0(W)}$$

由截止条件 $W=0$ 以及(8.5.17)式，可得到

$$J_0(V)=J_0(U)=0 \tag{8.5.19}$$

由附录 A4 中零阶贝塞尔函数的根，即可得到归一化截止频率 $V_{mn}(n=1,2,\cdots)$，其中

$$V_{01}=2.4048$$

$$V_{02}=5.5201$$

$$V_{03}=8.6577$$

(2) 当 $m$ 之前取"+"号，$m\geqslant1$ 时，传输模为 EH 模。

(3) 当 $m$ 之前取"−"号，$m>0$ 时，传输模为 HE 模。

在(2)、(3)两种情况下，均可利用有关的特殊函数的递推公式、近似公式导出相应的截止条件，进而得到截止频率。

值得注意的是，从以上计算中可发现，对于 $HE_{11}$ 模有 $k_{c1}\approx0$。由特征方程和贝赛尔函数的有关递推公式可进一步导出截止频率 $f_c\approx0$。换言之，$HE_{11}$ 可在任意频率下传播(随着 $f$ 的提高，最容易出现的是 $TE_{01}$ 和 $TM_{01}$ 模)，单模传输就是基于这一现象。

$HE_{11}$ 模为最低阶模($f_c=0$)而不是 $TE_{01}$ 或 $TM_{01}$ 为最低模的物理解释可以从它们的模式场的图形(图 8.21)看出：

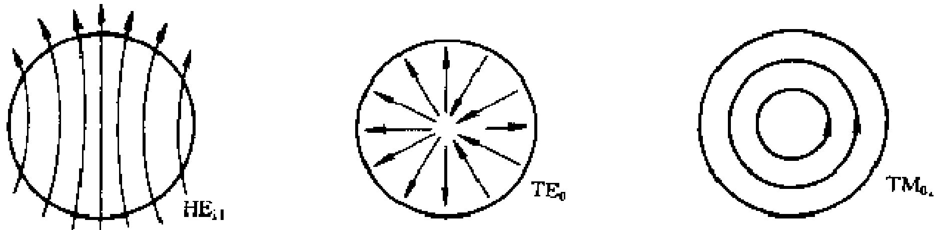



图 8.21　光纤中最低阶的三种模式场

$HE_{11}$ 的模式场最接近于均匀平面波——TEM 波。从光学的常识判断，随着波长的增加，很细的芯层的作用下降，应该逐步向 TEM 平面波过渡，所以应该是最接近均匀平面波的那个模式才能传播，故 $HE_{11}$ 模是最低阶模。

特征方程(8.5.18)实为一个 $V\sim\beta$ 或 $\omega\sim\beta$ 之间的关系式。把它与(8.5.15)、(8.5.16)联立就可得到方程的图解(由于是超越方程，无法得到解析解)。工程上一般利用归一化频率 $V$ 画成 $\frac{\beta}{k_0}\sim V$ 曲线。每种模式各有一条曲线，形成一个 $\frac{\beta}{k_0}\sim V$ 曲线族，如图 8.22 所示。其中横坐标 $V$ 是由(8.5.17)式导出的：

$$V=(U^2+W^2)^{1/2}=ak_0(n_1^2-n_2^2)^{1/2}$$

$$=\frac{2\pi a}{\lambda}\sqrt{n_1^2-n_2^2}$$

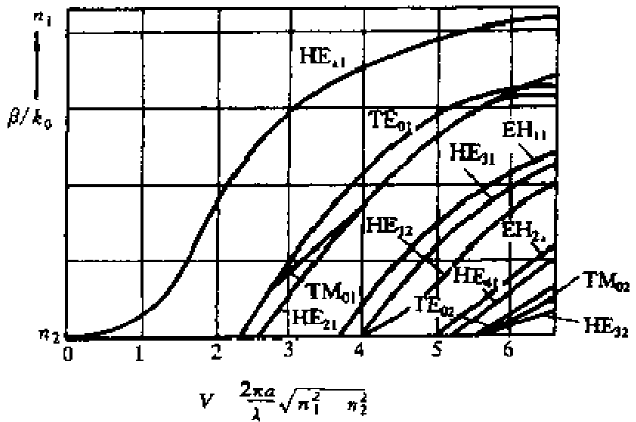



图 8.22　光纤特征方程的图解 $\frac{\beta}{k_0}\sim V$ 曲线

该图表明了在给定的光纤尺寸下，在给定的介质($n_1,n_2$)中可能存在的传输模式，而实际传输何种模式则取决于激励源(光源的类型等因素)。反过来，在激励源给定的情况下能传输何种模式，则取决于是何种媒质($n_1,n_2$)。

### 三、光纤的色散

色散是光纤的重要性能之一。色散会使脉冲信号展宽或畸变，限制光纤的传输容量。

色散的机理是这样的：如果把光波看成载体，我们希望在它所携带的信号带宽中各光频的传播速度相同，以使输入光纤的脉冲信号经过所要求的长度 $L$ 后不展宽。根据 7.8 节，这就要求群速即波包(包络)的传输速度 $v_g=d\omega/d\beta$ 为常数。换言之，应要求 $\frac{dv_g}{d\omega}=0$。如果 $v_g\neq$ 常数，则信号带宽中各光频的时延 $\tau=\frac{l}{v_g}\neq$ 常数，表明各光频不同时到达输出端，故使信号展宽。换言之，群时延

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\omega}=L\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\omega^2} \tag{8.5.20}$$

将不为零，故上式也是色散的定义式。色散也可换成如下以 $\lambda$ 来定义的形式：

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\lambda}=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\right)=-\frac{L}{2\pi c}\left(2\lambda\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\lambda}+\lambda^2\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\lambda^2}\right) \tag{8.5.21}$$

色散的起因主要有三种：

1. 材料色散

设介质材料是对波长敏感的，即色散的：$\varepsilon_r=\varepsilon_r(\lambda)$，$\lambda$ 为真空中的波长。可近似认为该介质中的相移常数

$$\beta=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi f\sqrt{\varepsilon_r(\lambda)}}{c}=\frac{2\pi f n(\lambda)}{c} \tag{8.5.22}$$

代入(8.5.20)式，得

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\lambda}=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\right)=-\frac{L}{c}\lambda\frac{\mathrm{d}^2 n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^2} \tag{8.5.23}$$

上式表明材料色散与折射率对波长的二阶导数成正比。6.5 节曾介绍过高频下介质极化的滞后现象(阻尼)会造成介质的色散：$\varepsilon_r=\varepsilon_r(\omega)$。这里我们看到：色散表明 $n$ 对波长的敏感，它会使非单色光脉冲中不同波长(即不同色光)的传播速度不同，延长时间不同，造成脉冲展宽。

2. 模式色散

由于多模光纤中存在许多传输模式，由图 8-21 我们可看出，即使在同一 $\omega$ 之下，每种模式各有其 $\beta$，而 $\beta=\frac{\omega}{v}$，会引起不同的模式群速度不同，造成脉冲展宽。

采用单模传输就可完全避免模式色散，使信号传输速率大大提高。如前所述，单模光纤中的主模是 $\mathrm{HE}_{11}$ 模，如果使单模光纤工作于较低的频段：

$$f<f_c(\mathrm{TE}_{01})=f_c(\mathrm{TM}_{01})=\frac{2.405}{2\pi a\sqrt{\mu_0(n_1^2-n_2^2)}}$$

或写为

$$\lambda>\lambda_c=\frac{2\pi a\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{2.405}$$

就可避免模式色散。上式就是光纤的单模传输条件，其中的 2.405 是方程 $\mathrm{J}_0(V)=0$ 的第一个根 $V_{01}$。长途干线的光通信，主要是由单模光纤承担的。

3. 波导色散

为了使光束缚在光纤中传播，必须有一定的不均匀结构(比如说两层结构——纤芯与包层的 $n_1$ 与 $n_2$ 不同)。而这样的两层结构致使不同频率的光的传播速度不同，即 $\beta(\omega)$ 不同，从而群速 $v_g$ 也随 $\omega$ 变化，所以引起色散。

除了色散，衰减或损耗也是光纤的主要现象。光通信从大气转入光导纤维的理想能够变成现实，损耗降低起了关键的作用。吸收和散射是造成损耗的主要原因。这方面的详细讨论见光通信的专著。

光通信有许多突出的优点：它无需用铜材，抗电磁干扰，保密性强，损耗低，通信距离极长，通信容量极大，即使我们的技术能使用上光频的 1/100 也已很可观。这也是本书对电磁理论在光波导中的应用作以上介绍的原因。

# 习 题 8

8.1 根据麦克斯韦方程论证：填充空气的波导管中不可能存在 TEM 模。

8.2 证明单一模式的 EM 波（TE 波或 TM 波）的电场和磁场总是相互垂直的。

*8.3 对传输型的 TE、TM 模，在单位长度的波导内贮存的电场能和磁场能的时间平均值相等：$\overline{W}_m = \overline{W}_e$，而对于截止波型则有

$$\overline{W}_m > \overline{W}_e \qquad (\text{TE 模})$$

$$\overline{W}_m < \overline{W}_e \qquad (\text{TM 模})$$

试就矩形波导证明之。

8.4 求证当 $f < f_c$ 时，场量的衰减常数 $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_c}$，与频率无关。

8.5 已知矩型波导中 TM 模的纵向场分量为

$$E_z = E_0 \sin\frac{\pi}{3}x \sin\frac{\pi}{3}y \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{2}}{3}\pi z\right)$$

①求截止波长 $\lambda_c$ 和波导波长 $\lambda_z$；

②如果此模为 $TM_{32}$，求波导尺寸。

8.6 一个空气填充的矩型波导尺寸为 $a \times b$，且 $b < a < 2b$，以 $TE_{10}$ 模工作于 $f = 3$ GHz。若要求工作频率至少比 $TE_{10}$ 模的截止频率高 20%，而又比与之最临近的高次模的截止频率低 20%，试决定尺寸 $a$ 和 $b$。

8.7 矩形波导内充空气，横截面尺寸为 $a \times b = 7.2\ \text{cm} \times 3.4\ \text{cm}$。

①当工作波长为 $\lambda = 16$ cm，8 cm，6.5 cm时，波导中可能传输哪些模式？

②若要求工作频率范围最低须比 $TE_{10}$ 模的截止频率高 5%，最高须比 $TE_{10}$ 最邻近的高次模的截止频率低 5%，试算出此频率范围。

8.8 一填充空气的正方形截面的波导，边长为 $a$，确定只能传输 $TE_{10}$ 模的工作波长范围。

8.9 一空气填充的矩形波导尺寸为 $a = 2.29$ cm，$b = 1.02$ cm。若传 $TE_{10}$ 模，工作频率 $f = 10$ GHz，求：

①相移常数 $\beta$，模式阻抗 $\eta_{TE}$；

②若波导改为填充 $\mu_r = 1$，$\varepsilon_r = 4$ 的完纯介质，重求 $TE_{10}$ 模的 $\beta$ 和 $\eta_{TE}$；

③若工作频率降到 $f = 5\ \text{GHz} < f_c$，试确定 $TE_{10}$ 模的衰减常数 $\alpha$ 和模式阻抗 $\eta_{TE}$，并计算场量衰减到参考值的 $e^{-1}$ 时的距离。

8.10 谐振腔的谐振频率取决于哪些因素？谐振波长又取决于哪些因素？若有一填充空气的谐振腔已谐振于 $TE_{101}$ 模，现将此谐振腔填充某种介质（$\mu_0$，$\varepsilon$），问是否还能谐振于同一模式？如何使之重新谐振于 $TE_{101}$ 模？

8.11 阶跃光纤纤芯折射率 $n_1 = 1.47$，相对折射率 $\Delta = 0.2\%$，求包层折射率 $n_2$；并问在工作波长为1.31 μm时，纤芯半径 $a$ 应为多大才能保证单模传输？

# 第 9 章　稳态简谐波的天线辐射场

在前几章中，我们应用 6.9 节求解无源区的齐次标量波动方程得到的通解讨论了电磁波在自由空间的传播，在分界面上的反射与折射，在受约束的空间——各种波导和光导纤维中的传播。但所有这些都没有对波的发源进行探讨。本章将在 6.10 节得到的有源区的非齐次波动方程（达朗贝尔方程）的积分解的基础上分析稳态简谐波的天线辐射场。

产生电磁波的振荡源一般称为天线，当振荡源的频率提高到波长与天线尺寸可比拟时，辐射就显著了。本章我们只讨论达到稳态的简谐波的辐射场。

对于天线，所关心的参数是它的辐射场强、方向性以及辐射功率和效率。

天线的类型可大体分为线天线与面天线。求解天线问题的解析方法，原则上是找出满足天线边界条件的麦克斯韦方程组的解。但这种方法在数学上遇到很大困难，甚至无法求解（因而在求解过程的不少环节上都不得不根据实际情况作一些近似）。本章所介绍的解析法是从 6.10 节解出的达朗贝尔方程的通解——标量位函数的积分表达式(6.10.8)出发的。这个解式的一部分是滞后位，利用滞后位可导出元电流（等效为电偶极子）的辐射场。本章的中间部分是利用电与磁的对偶性和电磁学上的巴俾涅原理求解磁偶极子与开槽天线的辐射场。解式(6.10.8)的另一部分就是克希霍夫公式，本章的后半部介绍了如何用克希霍夫公式计算口径绕射场，即面天线的辐射场。

在全部讨论中都是把天线作为发射天线来分析的。因此，在本章末介绍了互易定理，从而获取该天线用于接收时的有关参量。

## 9.1　滞后位　克希霍夫公式

从第六章得到的达朗贝尔方程的积分解式(6.10.8)

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\tau}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4\pi}\oint_{S}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{r}')}{\partial n} - \Phi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\right]\mathrm{d}S$$

中，可以导出几个重要的推论，它们是求解天线辐射场的基础公式。

1. *滞后位*

当标量波函数 $\Phi$ 满足无限远条件(6.10.12)、(6.10.13)（意味着场源只分布在有限的区域）时，对于内域问题，前已证明解式(6.10.8)中沿 $S_\infty$ 的面积分将消失而只剩下体积分项：

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\tau}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{d}\tau \quad (R = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \tag{9.1.1}$$

上式也可用无界空间格林函数(6.10.18)的形式写成

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\tau}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\varepsilon}\mathrm{d}\tau \quad \left(G = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{4\pi R}\right) \tag{9.1.2}$$

(9.1.1)式带有时间因子$e^{j\omega t}$时的形式应为

$$\Phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\tau}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')e^{j\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}}{R}\mathrm{d}\tau\quad\left(v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right)\tag{9.1.3}$$

矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的三个直角分量都满足形如(6.8.12)的标量波动方程,假设无限远条件也满足,则它们都应具有形如(9.1.3)式的解,因而非齐次矢量波动方程(6.8.11)中矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的解式可以从(9.1.3)式直接写出:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\tau}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')e^{j\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}}{R}\mathrm{d}\tau\tag{9.1.4}$$

若不限于时谐场,对于一般的时变场源 $\rho(\boldsymbol{r}',t)$,则与(9.1.3)和(9.1.4)相应的解式应为

$$\Phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\tau}\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{R}{v}\right)}{R}\mathrm{d}\tau\tag{9.1.5}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\tau}\frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{R}{v}\right)}{R}\mathrm{d}\tau\tag{9.1.6}$$

解式(9.1.3)~(9.1.6)表明,在 $t$ 时刻,场点 $P$ 的标量电位和矢量磁位并不是由 $t$ 时刻的源($\rho$ 或$\boldsymbol{J}$)的值决定的,而是由早先的 $t-\frac{R}{v}$时刻的源所决定的。也就是说,观察点 $P$ 的"相位"滞后于源的"相位",滞后的时间$\frac{R}{v}$取决于$P$ 点与源点的距离$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$和电磁波在该种媒质中的传播速度 $v$。这正如我们若能站在牛郎星上,在某时刻看到的织女星,其实是 16.4 年前织女星的模样。

基于这种位场变化在时间上滞后的事实,我们把(9.1.3)、(9.1.5)式表示的标量位以及(9.1.4)、(9.1.6)式所表示的矢量位称为滞后位。

从滞后位出发,可计算偶极子天线的辐射场,并进而计算线天线,以至天线阵的辐射场。

2. 克希霍夫公式

上面讨论了解式(6.10.8)中面积分项为零的情况,这里将讨论另一种与之相反的情况。如若在 6.10 节非齐次波动方程的内域问题中场源都分布在外域[如图 9-1(a)所示],或是在外域问题中场源都分布在内域[如图 9-1(b)所示],由于所讨论的空间体积 $\tau$ 中没有场源,解式(6.10.8)中的体积分项将为零,只剩下面积分项。虽然外域问题中 $\tau$ 的整个界面 $S$ 是由划分内、外域的界面 $S_1$ 和 $S_\infty$ 共同构成的,但是 $\Phi$ 满足无限远条件(因为场源仅存在于有限的内域中)会使 $\oint_{S_\infty}=0$,从而(a)、(b)两种情况下都将有

$$\Phi_P=\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\frac{e^{-jkR}}{R}\nabla\Phi-\Phi\nabla\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

或写成

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\frac{e^{-jkR}}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)\right]\mathrm{d}S\quad(R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\tag{9.1.7}$$

其中对 $S$ 的面积分在外域问题即图 9-1(b)的情况下只需在 $S_1$ 上进行。注意,无论在哪种情况下,$\boldsymbol{n}$ 都是指向所讨论区域$\tau$ 之外的,如图 9-1 所示。因为解式(6.10.8)从根本上是由散度定理→格林定理推导而来的。如果使用的法线反向,指向所讨论区域 $\tau$ 的内部,则(9.1.7)式中被积函数就应改变符号。

(9.1.7)式就是标量克希霍夫公式。它实质上是数学形式的惠更斯原理。它表明,场点 $P$ 处的标量波振幅可以表示为各面元 $dS$ 上的等效源产生的子波的总和。这些等效源是由界面 $S$ 上的 $\Phi$ 和 $\nabla\Phi$ 来决定的。而 $\Phi$ 和 $\nabla\Phi$ 不是彼此独立的,是通过波动方程相联系的,已知界面上 $\Phi$ 分布的叫作 Dirichlet 问题,已知界面上 $\nabla\Phi$ 分布的称为 Neumann 问题。进一步的讨论可参阅有关文献[5]。

利用克希霍夫公式可以计算口径绕射问题,避免在天线系统的复杂边界条件下求解麦克斯韦方程,因而是计算面天线辐射场的基础。

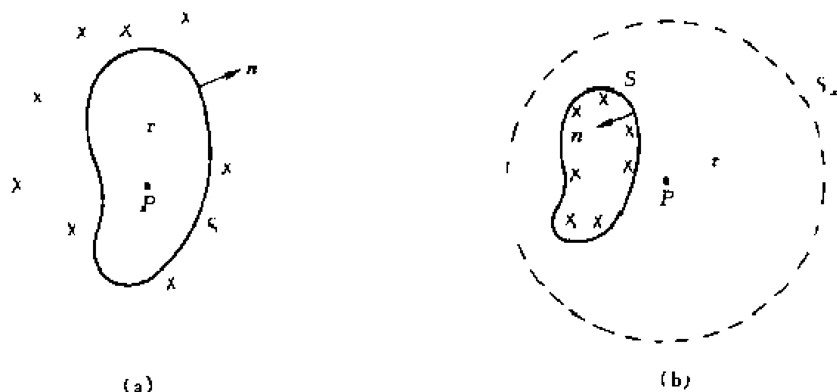



图 9-1 克希霍夫公式的适用问题的场源分布
(a)内域问题; (b)外域问题。

## 9.2 偶极子天线

在静电场问题中,电偶极子是一对相距距离很小的等值异号的点电荷系统。若这对点电荷的电荷量随时间变化,分别为 $+q(t)$ 和 $-q(t)$,两个点电荷之间的距离为 $dl$,$dl\to 0$,则称之为交变电偶极子,或简称为偶极子。交变电偶极子是最简单的辐射源,它所产生的电磁场是分析各种线天线的电磁场的理论基础,具有很高的理论和工程实用价值。我们就从交变电偶极子开始,讨论天线的辐射问题。

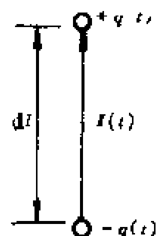



图 9-2 电偶极子

如图 9-2 所示,偶极子电荷量的变化,是通过电荷之间的电流 $I(t)$ 实现的。根据电荷守恒定律可知

$$I(t)=\frac{dq(t)}{dt} \tag{9.2.1}$$

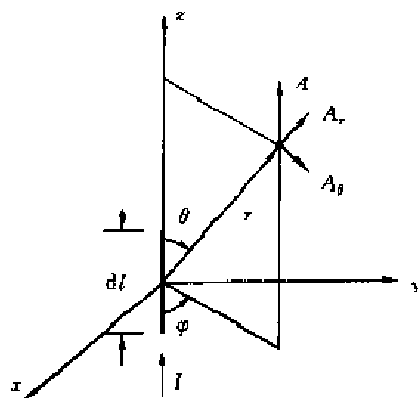



图 9-3 偶极子天线

对于正弦交变电偶极子,可用复数表示为

$$I=j\omega q,\quad q=\frac{I}{j\omega} \tag{9.2.2}$$

式中 $I$、$q$ 均为复数,必要时可用带点的符号表示。由于 $dl\to 0$,因此可认为 $dl$ 上各点的电流是相等的。这样,偶极子 $qdl$ 就可当作电流元 $Idl$ 来处理,于是,在静态场中相互独立的两种场源在时变场中成为了一体,以(9.2.2)式相联系,我们可以用任意一种形式来计算电磁场,所得结果是一样的。

设正弦交变电流元 $Idl$ 位于坐标原点,沿 $z$ 轴放置,如图

9-3 所示。下面我们利用上节所得到的矢量磁位的表达式计算距离原点 $r$ 处的 $P$ 点的场强。

将(9.1.4)式写成复数形式为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\tau}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}\mathrm{d}\tau$$

式中代入了 $\beta = \dfrac{\omega}{v}$，由已知

$$I\mathrm{d}l\boldsymbol{a}_z = \frac{I}{S}S\mathrm{d}l\boldsymbol{a}_z = \boldsymbol{J}\mathrm{d}\tau$$

式中 $S$ 为电流元的截面积，可得矢量位

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}_z\frac{\mu I\mathrm{d}l}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r} = \boldsymbol{a}_z A_z \tag{9.2.3}$$

变换到球坐标中，就有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu I\mathrm{d}l}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r}(\boldsymbol{a}_r\cos\theta - \boldsymbol{a}_\theta\sin\theta) = \boldsymbol{a}_r A_r + \boldsymbol{a}_\theta A_\theta \tag{9.2.4}$$

于是可由(6.8.1)式求出磁场

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\mu r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_r & r\boldsymbol{a}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{a}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & 0\end{vmatrix} \tag{9.2.5}$$

将 $A_r = \dfrac{\mu I\mathrm{d}l}{4\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r}\cos\theta$，$A_\theta = -\dfrac{\mu I\mathrm{d}l}{4\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r}\sin\theta$代入上式，可解得

$$H_\varphi = \frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{4\pi}\left(\mathrm{j}\frac{\beta}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r} \tag{9.2.6}$$

$$H_r = H_\theta = 0$$

可以看出，电流元 $\boldsymbol{a}_z I\mathrm{d}l$ 激励的磁场只有 $\boldsymbol{a}_\varphi$ 方向上的分量。

电场可由

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\epsilon}\nabla\times\boldsymbol{H} \tag{9.2.7}$$

解得为

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{I\mathrm{d}l\cos\theta}{2\pi\omega\epsilon}\left(\frac{\beta}{r^2} - \mathrm{j}\frac{1}{r^3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r} \\ E_\theta &= \frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{4\pi\omega\epsilon}\left(\mathrm{j}\frac{\beta^2}{r} + \frac{\beta}{r^2} - \mathrm{j}\frac{1}{r^3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r} \\ E_\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9.2.8}$$

可见，电流元 $\boldsymbol{a}_z I\mathrm{d}l$ 激励的电场具有 $\boldsymbol{a}_r$ 和 $\boldsymbol{a}_\theta$ 两个方向上的分量。

为了便于分析，我们将(9.2.6)和(9.2.8)式改写成下面的形式

$$H_\varphi = -\frac{I\mathrm{d}l\beta^2\sin\theta}{4\pi}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\beta r} + \frac{1}{(\mathrm{j}\beta r)^2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r} \tag{9.2.9}$$

$$E_r = -\frac{I\mathrm{d}l\beta^2\eta\cos\theta}{2\pi}\left[\frac{1}{(\mathrm{j}\beta r)^2} + \frac{1}{(\mathrm{j}\beta r)^3}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r} \tag{9.2.10}$$

$$E_\theta = -\frac{I\mathrm{d}l\beta^2\eta\sin\theta}{4\pi}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\beta r} + \frac{1}{(\mathrm{j}\beta r)^2} + \frac{1}{(\mathrm{j}\beta r)^3}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r} \tag{9.2.11}$$

式中 $\eta=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$ 是媒质的波阻抗。下面，我们就对这三个式子进行分析，从而引出有关辐射问题的一些基本概念。

1. 近区场

如果 $\beta r\ll 1$，即 $2\pi r\ll\lambda$，也就是说以偶极子为原点、以 $r$ 为半径所画出的任一圆的周长远小于电磁波的波长时，则称满足这个条件的空间区域为偶极子天线的近区。

在近区内，由于 $\beta r\ll 1$，因此有

$$(\beta r)^{-3}\gg(\beta r)^{-2}\gg(\beta r)^{-1} \tag{9.2.12}$$

以及

$$e^{-j\beta r}\approx 1 \tag{9.2.13}$$

于是，由式(9.3.9)可知，在近区内磁场可表示为

$$\boldsymbol{H}(r)=\boldsymbol{a}_\varphi\frac{Idl\sin\theta}{4\pi r^2} \tag{9.2.14}$$

这和恒定电流的磁场强度公式，即毕奥-萨伐尔公式(4.1.1)在形式上完全一样。类似地，将(9.3.12)、(9.2.13)以及(9.2.2)式带入到(9.2.10)和(9.2.11)式中，可得到近区内电场的近似表达式为

$$\boldsymbol{E}(r)\approx\frac{p}{4\pi\varepsilon r^3}(\boldsymbol{a}_r 2\cos\theta+\boldsymbol{a}_\theta\sin\theta) \tag{9.2.15}$$

显然，该式与静电场中电偶极子的场式(2.4.4)在形式上完全一样。由于交变电偶极子在近区内的电磁场的主要成分与静态场中电偶极子的电场和恒定电流元的磁场在形式上完全一样，因此通常把交变电偶极子在近区内的场称为“似静场”。

由(9.2.14)和(9.2.15)式可以看出，似静场的复数玻印廷矢量是纯虚数，电磁场传播的有功功率为零。因此，似静场的能量没有发生流动，向外辐射，而是在电场和磁场之间相互交换，就好像被束缚在近区内似的。所以，在讨论辐射问题时，也常将似静场称作“束缚场”或“感应场”。

2. 远区场

当观察点远离交变电偶极子，满足 $\beta r\gg 1$ 的区域，就称为远区。在远区中，有

$$(\beta r)^{-1}\gg(\beta r)^{-2}\gg(\beta r)^{-3} \tag{9.2.16}$$

因此，远区中的电磁场可写为

$$H_\varphi\approx\frac{Idl\sin\theta}{4\pi}\frac{j\beta}{r}e^{-j\beta r}=j\frac{Idl\sin\theta}{2\lambda r}e^{-j\beta r} \tag{9.2.17}$$

$$E_\theta\approx\frac{Idl\sin\theta}{4\pi}\frac{j\beta}{r}\eta e^{-j\beta r}=j\eta\frac{Idl\sin\theta}{2\lambda r}e^{-j\beta r} \tag{9.2.18}$$

$$E_r\approx 0 \tag{9.2.19}$$

可以看出，远区场的主要成分只有横向分量，即电场和磁场相互垂直，且都垂直于矢径 $\boldsymbol{r}$，其比值：

$$\frac{E_\theta}{H_\varphi}=\frac{\beta}{\omega\varepsilon}=\eta \tag{9.2.20}$$

等于媒质的本质阻抗，因此，远区的主要波是 TEM 波。若用矢量形式表示，远区场满足下列关系式：

$$\boldsymbol{E}=\eta\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{a}_r \tag{9.2.21}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\eta}\boldsymbol{a}_r\times\boldsymbol{E} \tag{9.2.22}$$

而且，电场和磁场的等相面是 $r$ 等于常数的球面，而在等相面上，电磁场的振幅是按 $\sin\theta$ 变化

的，因此，该波是一个非均匀球面波。

此外，我们还可以看出，$H_\varphi$ 和 $E_\theta$ 的相位相同，因而它们的玻印廷矢量

$$S = \frac{1}{2}E \times H^* = a_r \frac{1}{2}\eta |H_\varphi|^2 \tag{9.2.23}$$

为实数，这表明，这部分电磁能量是沿着 $a_r$ 方向向外传播的。而且，由于 $H_\varphi$ 和 $E_\theta$ 均与 $r$ 成反比，因此，玻印廷矢量与 $r^2$ 成反比，这样，若取一个半径为 $r$ 的球面对 $S$ 做通量积分，则可得到一个与 $r$ 无关的常数，即

$$\oint_S S(r) \cdot dS = \frac{\pi}{3}\eta I^2\left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2 \tag{9.2.24}$$

其中 $I$ 为电流振幅值，说明远区场的主要成分所携带的电磁功率，将全部辐射出去，我们把这部分与 $r$ 成反比的场，称为辐射场。而电场和磁场中与 $r$ 的高次方成反比的项是属于不能辐射的成分，为了简单，我们把它们统称为束缚场或感应场。

3 辐射场的方向性

从上面的分析我们知道，偶极子天线的辐射场是非均匀的，其场强正比于 $\sin\theta$，$\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时，辐射场为零，而在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，辐射最强。这种电磁辐射的方向性是所有天线都具有的特性。在电磁场工程中，通常使用方向性函数来表示在远区半径为常数的大球面上天线辐射的功率或场强随空间方向坐标变化的规律，分别称为功率方向性函数和场强方向性函数。以场强方向性函数为例，其定义为

$$F(\theta,\varphi) = \frac{|E(\theta,\varphi)|}{|E_{max}|} \tag{9.2.25}$$

其中，$|E(\theta,\varphi)|$ 为在距天线 $r$ 的球面上辐射电场在 $(\theta,\varphi)$ 方向上的振幅，$|E_{max}|$ 为距天线 $r$ 的球面上辐射电场在辐射最强方向上的振幅。例如，对于上面介绍的偶极子天线，其场强方向性函数为

$$F(\theta) = \sin\theta \tag{9.2.26}$$

类似地，也可以定义功率方向性函数 $P(\theta,\varphi)$，且有

$$P(\theta,\varphi) = F^2(\theta,\varphi)$$

为了直观地反应天线辐射的方向性，将方向性函数绘成图形，称为方向图，也叫波瓣图，或辐射图。偶极子天线的场强方向图示于图 9-4，其中图(a)是 $yOz$ 平面的剖面图，称为 $E$ 面方向图，因为辐射场的 $E$ 矢量在该平面上，并与 $H$ 矢量垂直；图(b)是 $xOy$ 平面的方向图，称为 $H$ 面方向图，因为 $H$ 矢量在该平面上而且与 $E$ 矢量垂直；图(c)是方向图的立体模型，它是由图(a)所示曲线绕天线轴旋转一周所构成的回旋体。但除了最基本的天线，其他天线的立体辐

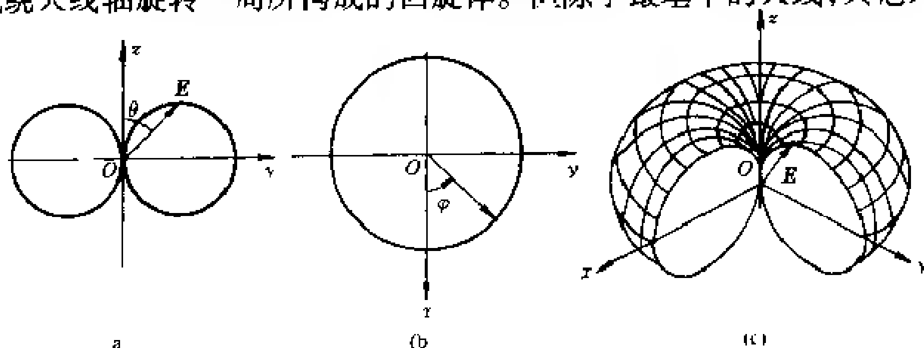



图 9-4 偶极子天线的方向图

射图都很复杂，有时甚至很难绘制。

4 辐射功率

天线向自由空间辐射的电磁波功率，称为辐射功率，用 $P_r$ 表示。它是复数玻印廷矢量对远区任一球面的通量积分，对偶极子天线，即是(9.2.24)式，为

$$P_r = \oint_S \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\pi}{3}\eta I^2\left(\frac{\mathrm{d}l}{\lambda}\right)^2$$

将空气中的 $\eta = 120\pi$ 代入，可得

$$P_r = 40\pi^2 I^2\left(\frac{\mathrm{d}l}{\lambda_0}\right)^2 \tag{9.2.27}$$

注意，式中 $\lambda_0$ 是空气中的波长，$I$ 是偶极子上的电流振幅值，若以有效值表示电流，则有

$$I = \sqrt{2} I_{有效}$$

于是

$$P_r = 80\pi^2 I_{有效}^2\left(\frac{\mathrm{d}l}{\lambda_0}\right)^2 \tag{9.2.28}$$

式中 $I$ 的单位为 A，$P_r$ 的单位为 W。

5 辐射电阻

若把辐射场与电路对应起来，借用电路的概念，把辐射功率写成

$$P_r = I_{有效}^2 R_r \tag{9.2.29}$$

则可得到

$$R_r = 80\pi^2\left(\frac{\mathrm{d}l}{\lambda_0}\right)^2 \tag{9.2.30}$$

这里的 $R_r$ 称为辐射电阻，单位为 Ω。辐射电阻反映了当天线中激起某一电场强度时，天线辐射电磁波能力的大小，它取决于天线的电尺寸 $\frac{\mathrm{d}l}{\lambda_0}$。与辐射功率相比，辐射电阻更能说明天线的质量，因为辐射功率不仅取决于天线的性质，还与天线中的电流强度有关，而辐射电阻却唯一地由天线本身的结构所确定。

6. 方向性系数

由图 9-4 可看到，天线向各方向辐射的强度是不相同的。为了定量地描述某一天线辐射功率的集中程度，在工程上，通常使用方向性系数来将该天线与理想的点源天线做比较。所谓理想的点源天线，是指它的辐射没有方向性，也就是说辐射强度在空间各方向是相等的，其辐射图是一个球形。这种点源天线实际上并不存在，只是天线间的方向性做比较时所选用的参考标准。通常方向性系数的定义为：在相同的辐射功率下实际天线产生的最大辐射强度与点源天线在同一点产生的辐射强度的比值。辐射强度是指天线在其所在空间的单位立体角内所辐射的功率，等于辐射功率密度即玻印廷矢量与距离 $r$ 平方的乘积。因此，辐射强度与电场强度的平方成正比，于是，方向性系数 $D$ 可写成

$$D = \left.\frac{E_m^2}{E_0^2}\right|_{P_r = P_0} \tag{9.2.31}$$

式中 $E_m$ 和 $E_0$ 分别表示实际天线产生的最大电场强度与点源天线在同一点产生的电场强度。由于场强平方与功率成正比，因此，方向性系数的另一种定义可表述为：在产生相等电场强度的前提下，点源天线的辐射功率 $P_0$ 与实际天线的总辐射功率 $P_r$ 的比值，即

$$D = \left.\frac{P_0}{P_r}\right|_{E_m = E_0} \tag{9.2.32}$$

**例 9.1** 求偶极子天线的方向性系数。

**解** 已知偶极子天线的最大辐射方向在 $\theta = 90^\circ$ 方向。在此方向上,电场强度取得最大值,为

$$E_m = |E_\theta|_{\theta=90^\circ} = \eta \frac{I\mathrm{d}l}{2\lambda r} \tag{9.2.33}$$

点源天线欲产生这样大的电场强度,即在包围点源天线半径同为 $r$ 的球面上各点均有 $E_0 = E_m$,它所辐射的总功率须为

$$P_0 = 4\pi r^2 \frac{E_0^2}{2\eta} = \frac{\pi}{2\lambda^2}(I\mathrm{d}l)^2 \eta = 60\pi^2 I^2 \left(\frac{\mathrm{d}l}{\lambda}\right)^2$$

将该式与(9.2.27)式代入(9.2.32)式,可得

$$D = \frac{P_0}{P_r} = 1.5 \tag{9.2.34}$$

这就是偶极子天线的方向性系数。它表明,在垂直天线轴方向产生相等电场强度的条件下,偶极子天线的总辐射功率是点源天线的总辐射功率的 $\frac{2}{3}$。如果两天线的效率都是 100%,则偶极子天线需要的输入功率也只是点源天线需要的输入功率的三分之二。换句话说,在辐射功率相等的情况下,偶极子天线在垂直于天线轴方向所产生的电场强度是点源天线在同一点所产生的电场强度的 $\sqrt{1.5} \approx 1.22$ 倍。

7 天线效率

天线的效率 $\eta_a$ 可粗略地定义为天线的辐射功率 $P_r$ 与输入的总功率 $P_{in}$ 之比,即

$$\eta_a = \frac{P_r}{P_{in}} = \frac{I^2 R_r}{I^2 R_a} = \frac{R_r}{R_a} \tag{9.2.35}$$

式中 $R_a$ 为天线电阻,包括天线的辐射电阻 $R_r$ 和损耗电阻两部分。其中损耗电阻是指当天线中激起某一电流强度时,天线在能量变换过程中的功率损耗量。利用天线效率可计算出天线输入端和天线结构的损耗。

由式(9.2.35)可以看出,欲提高天线效率,必须提高辐射电阻,降低损耗电阻。超短波天线一般辐射电阻大,损耗小,效率高,几乎可以接近 1。中短波天线广泛使用的是偶极子天线,由于其电尺寸 $\mathrm{d}l/\lambda$ 很小,辐射电阻不高,损耗较大,效率很低。

8. 天线增益

天线增益是天线增益系数的简称,其定义方法与方向性系数相类似,是以实际天线的输入功率与无损耗($\eta_0 = 1$)点源天线的输入功率做比较而定义的。仿照方向性系数的定义式(9.2.31)和(9.2.32),可得到天线增益 $G$ 的两个定义式如下:

$$G = \left.\frac{E_m^2}{E_0^2}\right|_{P_{in} = P_{0in}} \tag{9.2.36}$$

$$G = \left.\frac{P_{0in}}{P_{in}}\right|_{E_m = E_0} \tag{9.2.37}$$

(9.2.37)式表明,实际天线在最大辐射方向上某点产生相等电场强度的条件下,点源天线的总输入功率比实际天线的总输入功率所提高的倍数。

将(9.2.35)式及 $\eta_0$ 1代入(9 2 37)式,可得

$$G = \frac{P_0}{\frac{P_r}{\eta_a}} = \eta D \tag{9.2.38}$$

该式表示以点源天线作为比较标准时,天线增益与效率和方向性系数之间的关系。当天线效率接近100%时,增益便与方向系数近似相等。

以上我们对偶极子天线作了比较详尽的介绍。这种天线的长度很小,所以可假定天线上的电流振幅沿线相等。实际上天线的尺寸远比$dl/\lambda$大很多,天线上的电流分布也不可能到处一样。在讨论电磁干扰问题时,具有天线效应的一些导线也不一定是直线型的,导线上的电流分布不仅大小不一,连方向也可能不同。对这些天线求解辐射场时可以运用叠加原理,先把整副天线看成是由许许多多的偶极子天线组成,这些偶极子天线上各段的电流大小和方向并不相同,然后利用矢量积分求和的办法,把它们在某点产生的场强叠加起来,就可得到该点的总场强。例如,对于图9 5中长度为$\lambda/2$的半波天线,在观察点$P$的矢量磁位为

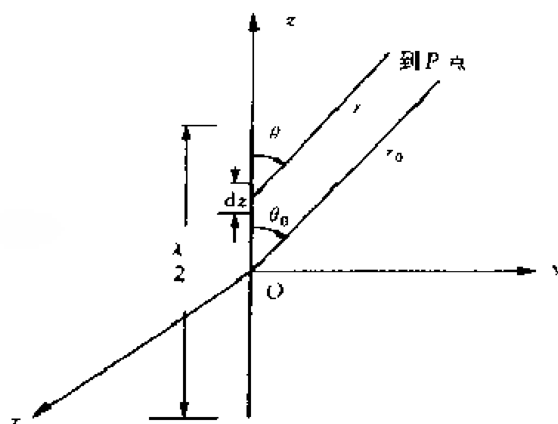


图9 5 利用叠加原理求半波天线的辐射场

$$A_z(r_0, \theta_0) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \frac{I(z)e^{-j\beta r}}{r} dz \tag{9.2.39}$$

式中$I(z)$表示沿天线变化的电流。求出矢量位后,即可按(9.2.5)与(9.2.7)式求出$P$点的磁场强度与电场强度

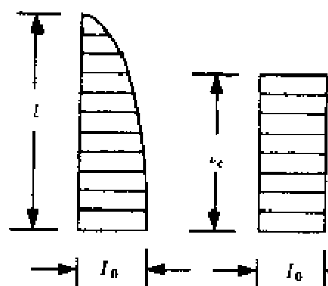


图9 6 有效长度概念

另外,也可用有效长度的概念来比较线天线辐射电磁波的能力。天线的有效长度$l_e$以最大辐射方向的场强为标准,当某一天线在最大辐射方向的场强与电流元在最大辐射方向的场强相等时,该天线相当于多长的电流元,此长度即定义为天线的有效长度。即假设有一长度为$l_e$的电流元,其上均匀分布电流$I_e$,又假设某实际天线的波腹电流(或馈电点电流)亦为$I_0$,且两天线在最大辐射方向上的场强相等,则称$l_e$为该实际天线的有效长度,如图9-6所示。有效长度常用于衡量中长波天线及某些长度较短的短波天线的辐射效能。应当注意的是,有效长度的概念,通常只用于电尺寸小于$\lambda/4$的天线。从有效长度的定义可知,天线的辐射场强与天线的有效长度成正比,有效长度的数值取决于天线方向性函数的最大值和天线上的电流分布。通常,天线的有效长度小于它的几何尺寸。天线上的电流分布得越均匀,其有效长度就越接近于几何尺寸。在实际天线中,为使天线电流尽量分布得均匀些,常常在天线顶部加装水平部分或其他形式的顶电容,以增加天线的有效长度。例如,实际的偶极子天线可能如图9 7所示,用平行双线给偶极子馈电,在偶极子两端加上金属

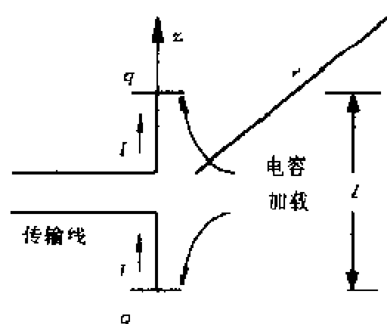


图9 7 实际偶极子天线

圆盘，两圆盘形成电容，盘上电荷 $q$ 与线上电流 $I$ 的关系即是 $I=j\omega q$。

## 9.3 电与磁的对偶性

我们在研究电磁场的过程中会发现，电与磁经常是成对出现的，电场与磁场的分析方法也有相当的一致性。例如，在静电场中，为了简化电场的计算而引入标量电位，在恒定磁场中，也仿照静电场，可以在无源区引入标量磁位，并将静电场标量电位的解的形式直接套用过来，因为它们均满足拉普拉斯方程，因此解的形式也必然是相同的。这样做的理论根据是二重性原理，所谓二重性原理就是：如果描述两种不同物理现象的方程具有相同的数学形式，则它们的解答也必取相同的数学形式。

在求解电磁场问题时，如果能将电场与磁场的方程完全对应起来，即电场和磁场所满足的方程在形式上完全一样，则在相同边界条件下，其解的数学形式也必然相同。这时若电场或磁场的解式已知，则可很方便地得到另一场量的解式。

如果我们用磁偶极子的磁荷模型来代替安培模型，即将磁偶极子看作是一对相距很近的极性相反的磁荷，而将磁荷的运动定义为磁流，则电场和磁场的各物理量就可以一一地对应起来，麦克斯韦方程组在形式上就完全是对称的：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{J}_{e} \tag{9.3.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\boldsymbol{J}_{m} \tag{9.3.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\rho_{m} \tag{9.3.3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_{e} \tag{9.3.4}$$

电流连续性方程为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{e}=-\frac{\partial\rho_{e}}{\partial t} \tag{9.3.5}$$

磁流连续性方程为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{m}=-\frac{\partial\rho_{m}}{\partial t} \tag{9.3.6}$$

式中下标 m 表示磁量，e 表示电量。$\boldsymbol{J}_{m}$ 是磁流密度，量纲是 V/m；$\rho_{m}$ 是磁荷密度，量纲是 Wb/m。

(9.3.1)式表示产生磁场的旋度源是电流和位移电流(变化的电场)，(9.3.2)式表示产生电场的旋度源是磁流和位移磁流(变化的磁场)，(9.3.3)式表示产生磁场的散度源是磁荷，(9.3.4)式表示产生电场的散度源是电荷。(9.3.1)式的等号右边是正号，表示电流和磁场之间有右手螺旋关系，(9.3.2)式的等号右边是负号，表示磁流和电场之间有左手螺旋关系。

假使我们将电场 $\boldsymbol{E}$(或磁场 $\boldsymbol{H}$)写成是由电源产生的电场 $\boldsymbol{E}_{e}$(或磁场 $\boldsymbol{H}_{e}$)与由磁源产生的电场 $\boldsymbol{E}_{m}$(或磁场 $\boldsymbol{H}_{m}$)二者之和，即

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{e}+\boldsymbol{E}_{m}\qquad\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_{e}+\boldsymbol{D}_{m}\\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_{e}+\boldsymbol{H}_{m}\qquad\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{e}+\boldsymbol{B}_{m}\end{aligned}\right\} \tag{9.3.7}$$

则有

$$
\left.\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{E}_{e} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}_{e}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{H}_{e} &= \frac{\partial \boldsymbol{D}_{e}}{\partial t} + \boldsymbol{J}_{e} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B}_{e} &= 0 \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D}_{e} &= \rho_{e}
\end{aligned}\right\} \tag{9.3.8}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{E}_{m} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}_{m}}{\partial t} - \boldsymbol{J}_{m} \\
\nabla \times \boldsymbol{H}_{m} &= \frac{\partial \boldsymbol{D}_{m}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B}_{m} &= \rho_{m} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D}_{m} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{9.3.9}
$$

从这些式子可以看到电量和磁量的对偶性。

仿此，相应于矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 有矢量电位 $\boldsymbol{F}$；相应于标量电位 $\Phi$ 有标量磁位 $\Psi$。即相应于

$$\boldsymbol{H}_{e} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{9.3.10}$$

$$\boldsymbol{E}_{e} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{9.3.11}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\boldsymbol{J}_{e}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} \mathrm{d}\tau \tag{9.3.12}$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\rho_{e}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{\varepsilon r} \mathrm{d}\tau \tag{9.3.13}$$

有

$$\boldsymbol{E}_{m} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \boldsymbol{F} \tag{9.3.14}$$

$$\boldsymbol{H}_{m} = -\nabla \Psi - \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} \tag{9.3.15}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\boldsymbol{J}_{m}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} \mathrm{d}\tau \tag{9.3.16}$$

$$\Psi = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\rho_{m}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{\mu r} \mathrm{d}\tau \tag{9.3.17}$$

当电源量和磁源量同时存在时，总场量应为它们分别产生的场量和：

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \boldsymbol{F} \tag{9.3.18}$$

$$\boldsymbol{H} = -\nabla \Psi - \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{9.3.19}$$

(9.3.1)式与(9.3.2)式如写成积分形式为

$$\oint_{C} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + I \tag{9.3.20}$$

$$\oint_{C} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - I_{m} \tag{9.3.21}$$

式中 $\Psi$ 代表电通量，量纲是 C；$\Phi$ 代表磁通量，量纲是 Wb；$I_m$ 是磁流，量纲是 V。

此外，电磁场的边界条件也可写为

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_{el} \tag{9.3.22}$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=-\boldsymbol{J}_{ml} \tag{9.3.23}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=\rho_{mS} \tag{9.3.24}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_{eS} \tag{9.3.25}$$

式中 $\boldsymbol{J}_{ml}$ 和 $\rho_{mS}$ 分别代表介质分解面上的表面磁流线密度和表面磁荷密度，它们与 $\boldsymbol{J}_m$ 和 $\rho_m$ 一样，也是假想的等效量。根据以上电源量和磁源量之间的对偶关系，我们不难找出它们之间的互换规则：即怎样由一电源量的公式求出它的磁源量的对偶公式，或相反。

互换的规则是

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{E}_e\leftrightarrow H_m\\&H_e\leftrightarrow -E_m\\&J_e\leftrightarrow \boldsymbol{J}_m\\&\varepsilon\leftrightarrow\mu\\&\mu\leftrightarrow\varepsilon\\&\rho_e\leftrightarrow\rho_m\\&\eta\leftrightarrow\frac{1}{\eta}\end{aligned}\right\} \tag{9.3.26}$$

使用这样的对偶关系，可以很方便地求解许多电磁场问题。

## 9.4 磁偶极子与缝隙天线

我们已经知道，对于介质磁化机理的分析可以采用两种模型，即安培模型和磁荷模型。安培模型在物理解释上比较清楚，而磁荷模型在计算上有便利之处。这两种模型对外部是等效的，都称为磁偶极子。与交变电偶极子一样，交变磁偶极子也是一种基本的辐射源，它的电磁场是分析环形天线的基础。磁偶极子的辐射场依两种模型而有两种计算方法。

一个面积为 $S$ 的通有交变电流 $\boldsymbol{I}$ 的电流环，若其线度远小于波长，因而有 $S\to 0$，则可视为一个交变磁偶极子。在第四章恒定磁场中，我们曾经利用先求矢量位，再求磁场的方法，计算过小直流电流环的磁场。这里，对交变磁偶极子即小电流环也可采用同样的方法，只不过这里的矢量位是时变的，宜采用矢量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 利用(9.3.12)式计算。算出 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 后，就不难算出远区的磁场和电场了。

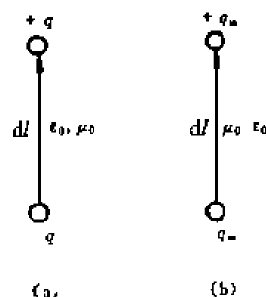


图 9-8 电偶极子和磁偶极子

计算磁偶极子辐射场的另一种方法是利用上一节的电磁对偶原理进行电磁置换。在 9.2 节中我们已经计算出了电偶极子的场，由于图 9-8 所示的电偶极子和磁偶极子是一对电磁对偶的辐射系统，因此，按照电磁互换规则 $\rho_e\to\rho_m$，即 $q_e\to q_m$，并注意到 $p_m=\frac{1}{\mu}q_m\mathrm{d}l=SI$，及 $p_e=q_e\mathrm{d}l=\frac{I\mathrm{d}l}{\mathrm{j}\omega}$，即把 $I\mathrm{d}l$ 置换成 $\mathrm{j}\omega\mu SI$，可以写出磁偶极子的电磁场为

$$E_\varphi=\frac{\mathrm{j}\omega\mu IS\beta^2}{4\pi}\sin\theta\left[\frac{1}{\mathrm{j}\beta r}+\frac{1}{(\mathrm{j}\beta r)^2}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r} \tag{9.4.1}$$

$$H_r = \frac{j\omega\mu IS\beta^2\cos\theta}{2\pi\eta}\left[\frac{1}{(j\beta r)^2}+\frac{1}{(j\beta r)^3}\right]e^{-j\beta r} \tag{9.4.2}$$

$$H_\theta = \frac{j\omega\mu IS\beta^2\sin\theta}{4\pi\eta}\left[\frac{1}{j\beta r}+\frac{1}{(j\beta r)^2}+\frac{1}{(j\beta r)^3}\right]e^{-j\beta r} \tag{9.4.3}$$

利用电磁对偶原理,还可以很方便地计算缝隙天线的辐射。缝隙天线是一种在波导壁上开缝,使波导中传输的电磁能由缝隙中辐射出来的辐射器。对高速飞行器,一般都不希望在其外部架设天线,在这种情况下,缝隙天线是比较理想的天线形式。

由于计算有限尺寸导体上的缝隙的辐射很复杂,为了简单,我们只讨论这种理想情况下的模型,即在一块厚度趋于零的无限大导体板上开有一个矩形缝隙,缝隙的长为 $l$,宽为 $w$,并且 $w \ll l < \lambda$,如图 9.9(a)所示。图中坐标系的原点位于缝隙的中心,导体板与平面 $xOz$ 重合,缝隙的长 $l$ 平行于 $z$ 轴,宽 $w$ 平行于 $x$ 轴。在缝隙的中央,用一个交变电压源 $U$ 激励,如图 9.9(b)所示。

为了使用电磁对偶原理求解缝隙天线的辐射场,需要找出它的对偶系统。为此,我们先对图 9.9 的模型作一分析。在该系统中,显然,导体板两侧的电场是关于导体板 $y=0$ 平面对称的。因此,我们可以只讨论 $y>0$ 区域中的场。在 $y>0$ 区域中,它的边界 $S$ 是由三部分组成的:缝隙面 $S_1$,理想导体面 $S_2$ 以及无穷远处的 $S_3$,如图 9.9 中所示。下面我们来分析各面上的边界条件。

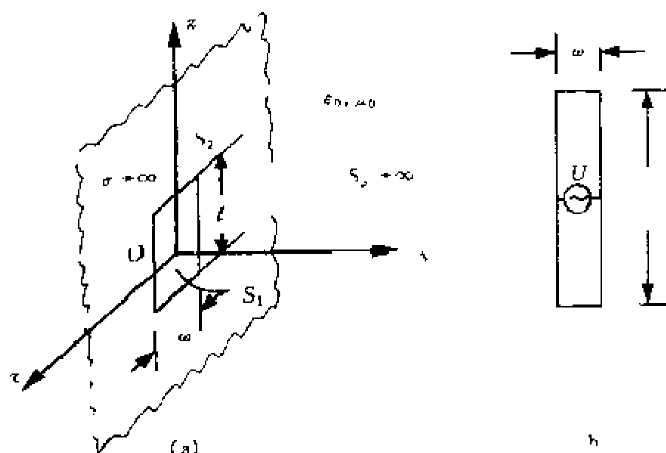



图 9.9 理想缝隙天线

在 $S_1$ 上,由于 $w \ll l$,可以忽略边缘效应,于是,$S_1$ 上的电场切向分量为

$$E_{1t}|_{S_1} = \frac{U}{w} \neq 0 \tag{9.4.4}$$

等效为表面磁流

$$\boldsymbol{J}_{mS} = \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_x \times \boldsymbol{a}_y E_{1t} = \boldsymbol{a}_z \frac{U}{w} \tag{9.4.5}$$

考虑到 $S_1$ 上没有面电流,磁场的切向分量在 $S_1$ 两侧应连续,即

$$H_{1t}|_{S_1^-} = H_{1t}|_{S_1^+} \tag{9.4.6}$$

式中的“+”、“-”号分别表示金属板的前后两侧。又由于 $S_1$ 面上的电场产生的切向磁场与电场垂直,且在 $S_1$ 两侧是大小相等,方向相反的,即

$$H_{1t}|_{S_1^-} = -H_{1t}|_{S_1^+} \tag{9.4.7}$$

因此可知,$S_1$ 上磁场的切向分量为零,即

$$H_{1t}|_{S_1^+} = 0 \tag{9.4.8}$$

在 $S_2$ 上,电场和磁场应满足理想导体表面的边界条件,有

$$E_{2t}|_{S_2} = 0 \tag{9.4.9}$$

$$H_{2n}|_{S_2} = 0 \tag{9.4.10}$$

在无穷远处 $S_3$ 上，缝隙的影响将消失，应有

$$\boldsymbol{E}_3\big|_{S_3} = \boldsymbol{H}_3\big|_{S_2} = 0 \tag{9.4.11}$$

在以上边界所围成的区域中，由于没有其他产生电磁场的源，因此，我们在构造对偶系统时，也要注意满足这一条件。最简单的对偶系统就是将图9-9(a)中的缝隙所等效的磁流对偶成与缝隙尺寸相同的理想导体细条上的电流，即电流元系统，如图9-10所示，其中坐标系的建立与图9-9(a)相合。下面我们来证明这两系统在 $y>0$ 区域是对偶系统。

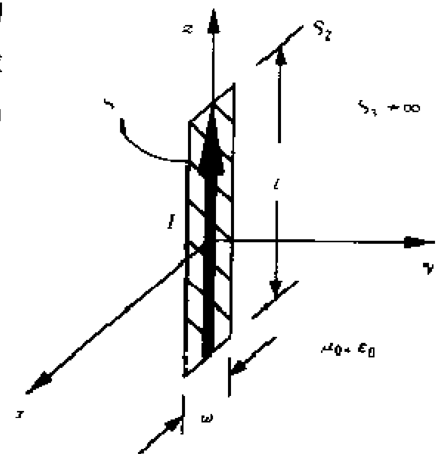



图9-10　金属板天线

在图9-10中，$S_1$ 是理想导体表面，应有

$$E_{1t}\big|_{S_1} = 0 \tag{9.4.12}$$

金属板上的面电流

$$\boldsymbol{J}_S = \boldsymbol{a}_z \frac{I}{w} \tag{9.4.13}$$

考虑到该电流在金属板两侧产生的磁场切向分量大小相等，方向相反，即由

$$\boldsymbol{H}_1\big|_{S_1^+} = \boldsymbol{J}_S^+ \times \boldsymbol{a}_y = \boldsymbol{a}_x \boldsymbol{J}_S^+$$

$$\boldsymbol{H}_1\big|_{S_1^-} = \boldsymbol{J}_S^- \times (-\boldsymbol{a}_y) = \boldsymbol{a}_x \boldsymbol{J}_S^-$$

$$\boldsymbol{J}_S^+ = \boldsymbol{J}_S^- = \frac{1}{2}\boldsymbol{J}_S$$

可得

$$H_{1t}\big|_{S_1^+} = \frac{1}{2}J_S = \frac{I}{2w} \neq 0 \tag{9.4.14}$$

对于 $S_2$ 面，由于它位于 $xOz$ 平面，只要注意到图9-10所示是一电流元系统，其磁场只有 $\boldsymbol{a}_\varphi$ 方向分量，电场只有 $\boldsymbol{a}_r$ 和 $\boldsymbol{a}_\theta$ 方向的分量，就可得出

$$H_{2t}\big|_{S_2} = 0 \tag{9.4.15}$$

$$E_{2n}\big|_{S_2} = 0 \tag{9.4.16}$$

而在无穷远处的 $S_3$ 上，位于坐标原点的电流元的影响自然消失，所以有

$$\boldsymbol{H}_3\big|_{S_3} = \boldsymbol{E}_3\big|_{S_3} = 0 \tag{9.4.17}$$

由以上分析可以看出，图9-9和图9-10所示的两系统是一对电磁对偶系统。于是，我们就可以把电流元 $Il$ 产生的辐射场（远场）

$$H_\varphi = \mathrm{j}\frac{Il}{2\lambda r}\sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r} \tag{9.4.18}$$

$$E_\theta = \mathrm{j}\frac{Il}{2\lambda r}\eta\sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r} \tag{9.4.19}$$

经电磁对偶置换

$$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{J}_S^+ = \frac{I}{2w} \to \boldsymbol{J}_{mS} = \frac{U}{w} \text{即} I \to 2U$$

$$\eta \to \frac{1}{\eta}$$

得到 $y>0$ 区域中,缝隙天线的辐射场为

$$E_\varphi = \mathrm{j}\frac{Ul}{\lambda r}\sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r} \tag{9.4.20}$$

$$H_\theta = -\mathrm{j}\frac{Ul}{\lambda \eta r}\sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r} \tag{9.4.21}$$

综上所述,我们得到一个非常重要的结论:无限大理想金属板上的缝隙天线所产生的辐射场和具有与缝隙相同尺寸的金属板天线所产生的辐射场具有电磁对偶性,将两系统的 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 置换后,其方向性图是相同的。一般把图 9-10 所示的金属板天线称为图 9-9 所示缝隙天线的互补天线。若两图中的 $l$ 取为半个波长,即 $l=\lambda/2$,则称这种天线为半波天线。这是一种非常重要的天线,经常用于短波和超短波通讯。图 9-11 示出了缝隙半波天线和金属板半波天线的方向图,可以看出,它们是相同的。应注意的是,两天线的激励方向相差 90°。

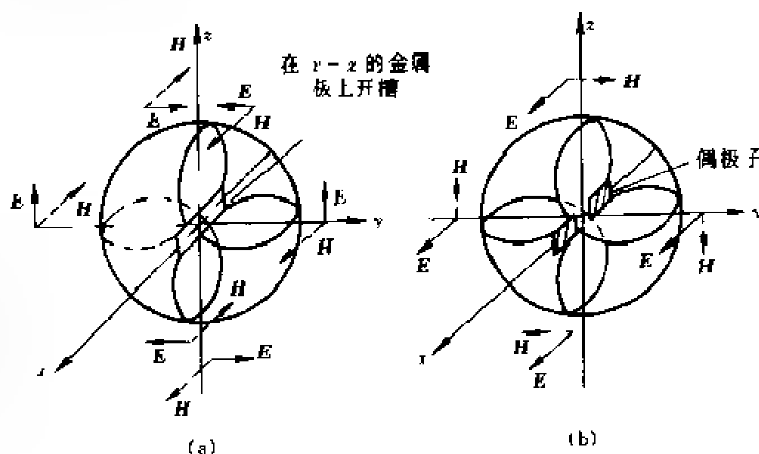



图 9-11 半波缝隙天线及其互补天线的方向图

事实上,由互补天线求缝隙天线的方法可以由电磁学上的巴俾涅原理来证明。巴俾涅原理最初应用于光学系统,其基本表述为:在开口屏后观察面上的场与其互补结构——吸收屏后观察面上的场相加,等于任何屏均不存在时观察面上同一点的场,如图 9-12 所示。这里,互补结构是指透光部分与不透光部分可以彼此互换的结构。设观察面上任一点的场量在(a)图中用 $\boldsymbol{F}_s$ 表示,在(b)图中用 $\boldsymbol{F}_m$ 表示,在(c)图中用 $\boldsymbol{F}_0$ 表示,则巴俾涅原理的数学表达式为

$$\boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{F}_m = \boldsymbol{F}_0 \tag{9.4.22}$$

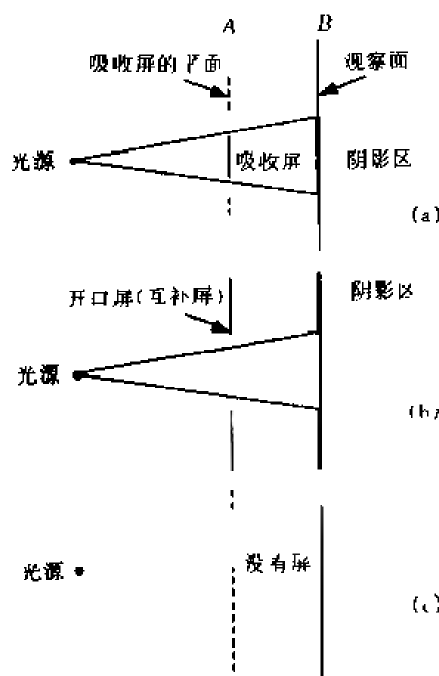



图 9-12 巴俾涅原理的光学说明

1946 年布克(H.G.Booker)将巴俾涅原理首先推广应用到电磁场理论,以论述互补平面屏的矢量电磁场问题。这里所谓的互补平面屏是指任意的两块面积 $S$ 和 $A$,其中一块为理想导电屏($\sigma=\infty$)、另一块为理想导磁屏($\mu=\infty$),它们合起来能够构成一个完全连续而无空隙或重叠的单一实体屏时,就称这两种结构是互补的。

参照图 9-13,电磁场的巴俾涅原理可表述为:若某电源比如电流元 $\boldsymbol{J}$ 辐射的电磁场在经过一开口电屏后在观察点 $P$ 的场量为 $\boldsymbol{E}_e$、$\boldsymbol{H}_e$[图(a)],将该电屏换成其互补屏后,此辐射场在观察点 $P$ 的场量为 $\boldsymbol{E}_m$、$\boldsymbol{H}_m$[图(b)],则没有屏存在时的入射场在 $P$ 点的场量 $\boldsymbol{E}_i$、$\boldsymbol{H}_i$[图(c)]可用前两者之和

表示,即

$$\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E}_e + \boldsymbol{E}_m \tag{9.4.23}$$

$$\boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{H}_e + \boldsymbol{H}_m \tag{9.4.24}$$

虽然电磁场的巴俾涅原理是作为一种原理提出的,但仍然可以严格地证明。

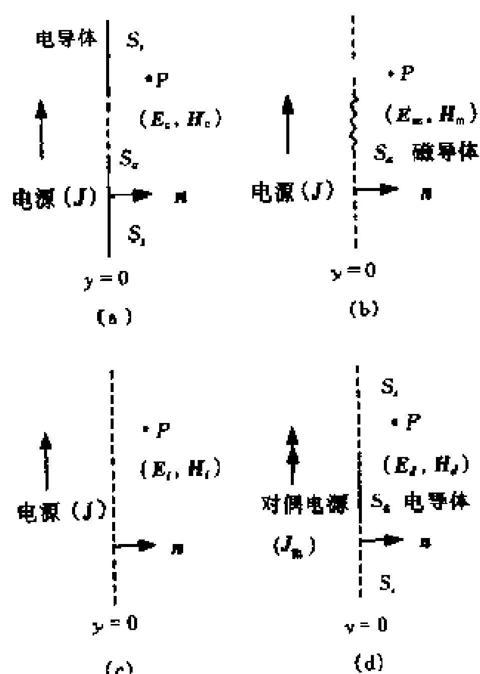



图 9-13 电磁场的巴俾涅原理

现在如果我们利用电磁对偶原理,把(b)图的磁屏换成(d)图的电屏,同时把电流源 $\boldsymbol{J}$ 换成磁流源 $\boldsymbol{J}_m$,则(d)图中观察点 $P$ 的电场 $\boldsymbol{E}_d$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_d$ 在数值上应等于 $\boldsymbol{H}_m$ 和 $-\boldsymbol{E}_m$,(9.4.23)和(9.4.24)式变为

$$\boldsymbol{E}_e - \boldsymbol{H}_d = \boldsymbol{E}_t \tag{9.4.25}$$

$$\boldsymbol{H}_e + \boldsymbol{E}_d = \boldsymbol{H}_t \tag{9.4.26}$$

现在我们来单独看图(d),辐射源发出的入射场 $\boldsymbol{E}_{id}$,$\boldsymbol{H}_{id}$ 在导体片上感应出表面电流和表面磁流(感应定理),这些面流再次辐射形成的场称为散射场。显然,观察点 $P$ 处的总场 $\boldsymbol{E}_d$、$\boldsymbol{H}_d$ 是入射场 $\boldsymbol{E}_{id}$、$\boldsymbol{H}_{id}$ 和散射场 $\boldsymbol{E}_{sd}$、$\boldsymbol{H}_{sd}$ 的叠加:

$$\boldsymbol{E}_d = \boldsymbol{E}_{id} + \boldsymbol{E}_{sd} \tag{9.4.27}$$

$$\boldsymbol{H}_d = \boldsymbol{H}_{id} + \boldsymbol{H}_{sd} \tag{9.4.28}$$

注意到这里的入射场 $\boldsymbol{E}_{id}$、$\boldsymbol{H}_{id}$ 与对偶电源图(c)的入射场 $\boldsymbol{E}_i$、$\boldsymbol{H}_i$ 按互换规则在数值上有

$$\boldsymbol{E}_{id} = \boldsymbol{H}_i$$

$$\boldsymbol{H}_{id} = -\boldsymbol{E}_i$$

于是(9.4.25)式可变换成

$$\boldsymbol{E}_e - \boldsymbol{H}_d = \boldsymbol{E}_e - (\boldsymbol{H}_{id} + \boldsymbol{H}_{sd}) = \boldsymbol{E}_e - (-\boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{H}_{sd})$$

$$= \boldsymbol{E}_e + \boldsymbol{E}_i - \boldsymbol{H}_{sd} = \boldsymbol{E}_t$$

由此

$$\boldsymbol{E}_e = \boldsymbol{H}_{sd} \tag{9.4.29}$$

类似地,由(9.4.26)式可得

$$\boldsymbol{H}_e = -\boldsymbol{E}_{sd} \tag{9.4.30}$$

(9.4.29)式和(9.4.30)式表明,对应于图(a)的缝隙天线的辐射场可以由对应于图(d)的导体片——缝隙天线的互补天线的辐射场来求解。

## 9.5 天 线 阵

从前面的分析我们知道,偶极子天线电尺寸很小,辐射能力差;半波天线电尺寸较大,辐射能力比偶极子天线大了许多,但在方向性上,与偶极子天线相类似,并无明显改善。这类天线用作中短波广播天线比较合适,因为它的方向图在水平面是均匀的。但对于定向通讯、雷达探测等要求天线的辐射功率集中在预定方向以提高天线的辐射效能的场合,则需要天线的方向图在某一方向比较尖,而单独一根这样的天线是做不到的。解决的办法是可以使用其他方向图较尖的天线如抛物面天线,或者是将许多天线放在一起构成天线阵。后者叫做阵列或离散

阵列，用以组成这种阵列的天线叫做阵元。前者其实是应用了后者的原理，可以称之为连续阵列。天线阵之所以能形成较尖的方向图，是因为阵元受同一频率的馈源所激励，它们在空间的辐射会形成干涉场，使某些方向的辐射场相互叠加而增强，又使某些方向的辐射场彼此抵消而减弱。于是，便可产生某种相应的特定方向图。本节只讨论离散阵列。我们先看一个最简单的天线阵，即如图9-14所示的二元天线阵。

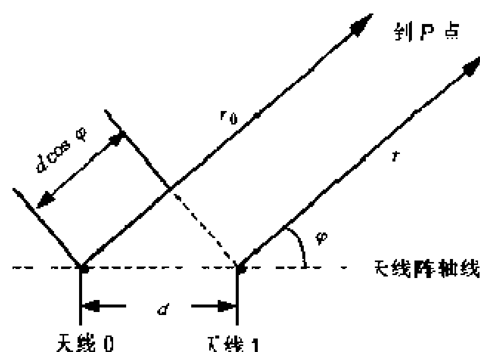


图9-14　二元天线阵

图中，天线0与天线1为同一类天线，例如，都是偶极子天线或都是缝隙天线，它们的取向（排列方向）相同，两天线间的距离为 $d$，它们到观察点 $P$ 的距离分别为 $r_0$ 和 $r_1$。由于观察点很远，$r_0$ 与 $r_1$ 可看成平行。在计算两天线到 $P$ 点的距离时，可近似令 $r_1\approx r_0$；但在计算两天线到 $P$ 点的相位差时，应采用较为准确的关系式 $r_1\approx r_0-d\cos\varphi$。设天线0的电流为 $I_0$，天线1的电流为 $I_1=mI_0e^{-j\alpha}$（$m$ 与 $\alpha$ 为常数），则天线1的辐射波在到达 $P$ 点时将较天线0的辐射波超前相位

$$\psi=\beta d\cos\varphi-\alpha \tag{9.5.1}$$

等式右边第一项是由两天线间的相对位置引起的，第二项是由两天线电流的相对相位引起的。若天线0在 $P$ 点产生的场强是 $\boldsymbol{E}_0$，则由于电场强度正比于电流的一次方，天线1在 $P$ 点产生的场强应为 $\boldsymbol{E}_1=m\boldsymbol{E}_0e^{j\psi}$。于是合成场强为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_0(1+me^{j\psi}) \tag{9.5.2}$$

上式中第一个因子 $E_0$ 是天线0单独产生于 $P$ 点的场强，由天线的类型（更确切说是由它的电流分布）决定，称为元因子；第二个因子只依赖于两天线间电流的比值、相位差和它们之间的相对位置，与天线是什么类型无关，因此称为阵因子。显然，由相同两天线构成的天线阵，它们的合成方向图是单独一副天线的方向图乘上阵因子。

当天线阵的元数增多，并且各阵元电流的振幅、相位和它们的取向又都是任意时，天线阵辐射场的计算将变得非常复杂。下面我们只讨论工程上常用的一种简单天线阵即均匀直线式天线阵。

各阵元的中心排列在一直线上的天线阵称为直线阵。所谓均匀直线式天线阵是指各阵元除了以相同的取向和相等的间距排列成一直线外，它们的电流大小相等，而相位则以均匀的比例递增或递减。

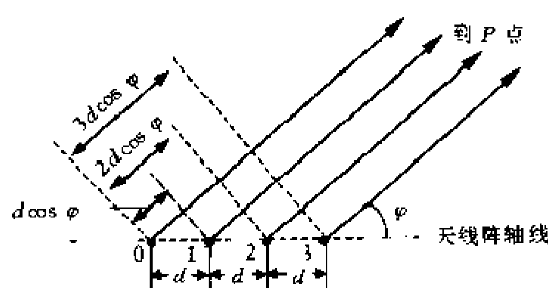


图9-15　均匀直线式天线阵

图9-15表示一N元均匀直线式天线阵。其中相邻两天线间的距离为 $d$，相位差为 $\alpha$。由前面所述可知，在观察点，天线1辐射的电磁波较天线0辐射的电磁波超前相位 $\psi_1=\beta d\cos\varphi-\alpha$，天线2辐射的电磁波较天线0辐射的电磁波超前相位 $\psi_2=2\beta d\cos\varphi-2\alpha=2\psi_1$，天线3辐射的电磁波较天线0辐射的电磁波超前相位 $\psi_3=3\beta d\cos\varphi-3\alpha=3\psi_1$，依此类推。于是在观察点的合成场强为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_{N-1}\\&=\boldsymbol{E}_0[1+e^{j\psi}+e^{j2\psi}+\cdots+e^{j(N-1)\psi}]\end{aligned} \tag{9.5.3}$$

式中

$$\psi = \psi_1 = \beta d\cos\varphi - \alpha \tag{9.5.4}$$

利用等比级数求和公式,(9.5.3)式可写成

$$|\boldsymbol{E}| = E_0 \left|\frac{1-e^{jN\psi}}{1-e^{j\psi}}\right| = E_0 \sqrt{\frac{(1-\cos N\psi)^2+\sin^2 N\psi}{(1-\cos\psi)^2+\sin^2\psi}}$$

$$= E_0 \frac{\sin\dfrac{N\psi}{2}}{\sin\dfrac{\psi}{2}} = E_0 f(\psi) \tag{9.5.5}$$

式中,

$$f(\psi) = \frac{\sin\dfrac{N\psi}{2}}{\sin\dfrac{\psi}{2}} \tag{9.5.6}$$

为 $N$ 元均匀直线式天线阵的阵因子。阵因子的最大值可由 $\mathrm{d}f(\psi)/\mathrm{d}\psi = 0$ 求得,不难算出,$\psi = 0$ 时,$f(\psi)$取最大值,即阵因子出现最大值的条件是

$$\psi = 0 \tag{9.5.7}$$

当各阵元电流同相时,$\alpha = 0$,$\psi = \beta d\cos\varphi$,就称为同相天线阵,其阵因子为

$$f(\psi) = \frac{\sin\left(\dfrac{N}{2}\beta d\cos\varphi\right)}{\sin\left(\dfrac{1}{2}\beta d\cos\varphi\right)} \tag{9.5.8}$$

最大辐射方向由 $\psi = \beta d\cos\varphi = 0$,可得

$$\varphi = (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad (m = 0,1,2,\cdots)$$

也就是说,在 $\psi = \pi/2$ 和 $3\pi/2$ 方向,同相均匀直线阵有最大的辐射。按式(9.5.8)作出的四元阵的方向图如图9-16所示,其中各天线间的距离 $d = \lambda/2$。因为这种阵在轴线两侧有最大辐射,所以在工程上被称为侧射式天线阵。

如果令均匀直线式天线阵的一般公式(9.5.3)中的 $\psi = 0$,可得

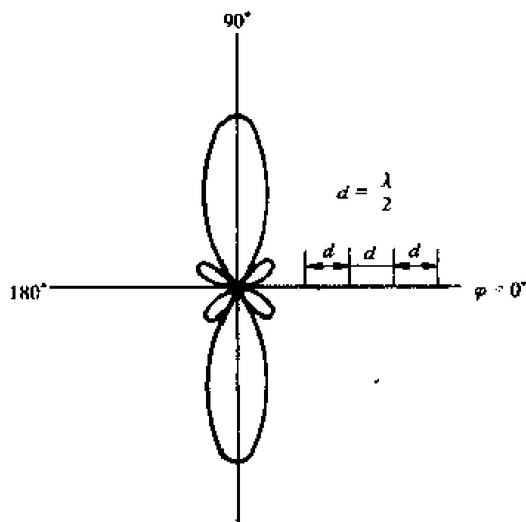



图9-16 四元侧射式天线阵的方向图

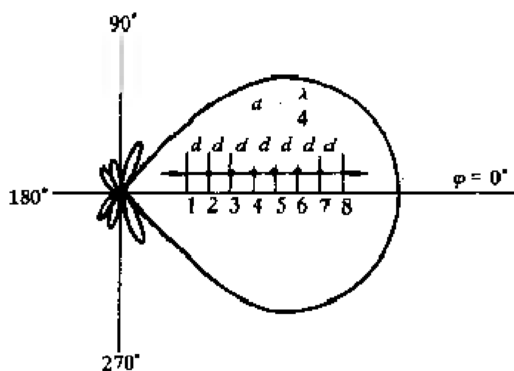



图9-17 八元端射式天线阵的方向图

$$\cos\varphi = \cos\varphi_m - \frac{\alpha}{\beta d} \tag{9.5.9}$$

它表示天线阵的最大辐射方向 $\varphi_m$ 取决于相邻两阵元之间的相位差 $\alpha$。改变 $\alpha$，可以改变天线阵的最大辐射方向，这就是相控阵天线的工作原理。当 $\alpha = \beta d$ 时，$\varphi_m = 0$，因此天线阵在 $\varphi = 0$ 方向有最大辐射，这种均匀直线式天线阵在工程上被称为端射式天线阵。图 9-17 示出了八元端射式天线阵的方向图，其中阵元间距 $d = \lambda/4$。

## 9.6 几何光学法

随着频率的升高，电磁波的似光特性越来越明显。因此，在微波段普遍采用一些类似光学结构的天线系统，如口径天线或面型天线，这类天线一般均由两个部件组成，一个部件是馈源，用以产生射频电磁波；另一个部件是聚束装置，用以将馈源产生的电磁波进行反射，以形成天线系统的方向性。

几何光学法是口径天线理论的重要组成部分之一，可用以直接确定某些天线的口径场。此种方法利用的是射线光学理论，即认为光以射线形式传播，在均匀媒质中，射线是直线，遇到不同媒质的分界面会发生反射和折射，其方向可用反射定律和折射定律描述。事实上，几何光学就是电磁波的零波长极限。电磁波的等相位面称为波前，由波前的负梯度（波矢）构成的有向场线（射线）即是电磁波传播的路径。

几何光学的一个重要假设是功率沿射线传播。另外，功率流管概念是几何光学的另一个基本概念，即在由射束组成的管内，通过任何截面的光能保持不变。于是对于图 9-18 所示的射线管，电磁波在等相面 1 上的小块面积 $dS_1$ 上的功率与在等相面 2 上的小块面积 $dS_2$ 上的功率必然相等。如果用 $p_1$ 和 $p_2$ 分别表示 $dS_1$ 和 $dS_2$ 上的功率密度，则有

图 9-18 功率流管

$$p_1 dS_1 = p_2 dS_2 \tag{9.6.1}$$

利用这一公式可以求出电磁波沿射线的功率分布情况，当射线发散时，功率密度减小，当射线集中时，功率密度增大。显然，功率流射线管的概念不能用于焦点上，因为焦点的射线管截面积为零，要使(9.6.1)式保持一常数，则功率密度必为无穷大，与实际不符。

下面我们以微波天线中的抛物面天线为例来说明如何用几何光学法设计天线。我们要求设计一个反射面，使它能把圆柱面波前变为平面波前。我们知道，直线源能产生柱面波，因此，我们把一直线源放在 $z$ 轴上，如图 9-19 所示，且假定线源向各方向辐射的强度与 $\varphi$ 无关。圆柱面波前变为平面波前要求从 $O$ 点发出的所有射线经反射面反射后全部平行于 $x$ 轴，并且它们到达 $y$ 轴的路径相等。已知从 $O$ 点发出的沿 $x$ 轴的射线经反射后到达 $y$ 轴所走过的路径长度为 $2f$，而从 $O$ 点发出的任一射线经反射后到达 $y$ 轴所走过的路径长度为 $R + R\cos\varphi$。按照要求，此二长度应相等，于是可得到表示反射面形状的极坐标方程为

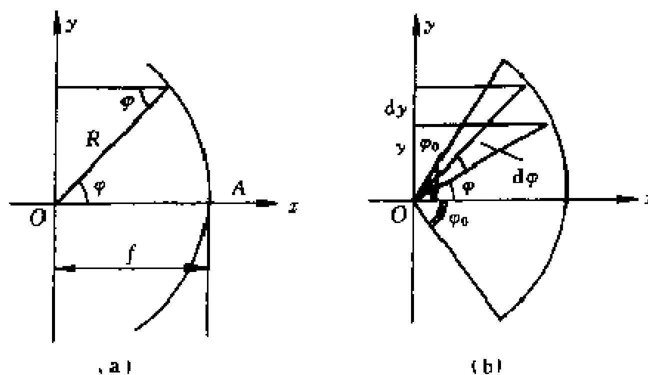


图 9-19 设计反射面使圆柱面波前变为平面波前

$$R = \frac{2f}{1+\cos\varphi} \tag{9.6.2}$$

这是一抛物柱面方程，$Oz$ 轴就是它的焦轴。因此，该天线的形状可设计成抛物柱面，直线型馈源应位于此抛物柱面的焦轴上。

现在我们就可以计算天线口径上的场量分布了。我们先来观察一下功率分布的情况。根据在射线管内功率不变的假设，图 9-19(b)中 $\mathrm{d}\varphi$ 角内的功率将全部分配在 $\mathrm{d}y$ 上。如果用 $p_y$ 表示在 $y$ 点的功率密度，则在 $z$ 方向单位距离的 $\mathrm{d}y$ 带上的功率为 $P_1 = p_y\mathrm{d}y$。另一方面，如果用 $q$ 表示 $z$ 方向的单位距离在 $xy$ 平面上单位角内的功率，则在 $\mathrm{d}\varphi$ 角内应有 $P_2 = q\mathrm{d}\varphi$。因而，令 $P_1 = P_2$，可得

$$\frac{p_y}{q} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(R\sin\varphi)} \tag{9.6.3}$$

将(9.6.2)式代入，可得

$$p_y = \frac{1+\cos\varphi}{2f}q \tag{9.6.4}$$

在 $y$ 轴上，对应于 $\varphi$ 角的功率密度 $p_y$ 与对应于 $\varphi = 0$ 的功率密度 $p_0$ 的比值为

$$\frac{p_y}{p_0} = \frac{1+\cos\varphi}{2} \tag{9.6.5}$$

这时电场强度的比值为

$$\frac{E_y}{E_0} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} \tag{9.6.6}$$

由上面的讨论可以看到，经过抛物柱面的反射，由馈源发出的圆柱波到达 $yz$ 平面时变成了平面波，也就是说在 $yz$ 平面上，场量的相位是相同的，但是振幅却不相等，它们按(9.6.6)式分布。

## 9.7 口径天线

到目前为止，我们已经介绍了几种简单天线的分析和计算，对电磁场的辐射特性有了一定的认识。总的来说，天线辐射的基本原理有二，一是在天线结构上施加外电压激励起强迫震荡电流而产生电磁波辐射，如偶极子天线等；二是将电磁波引入到天线结构引起感应电流而产生电磁场，如反射面天线等。因此，天线理论的主要问题是求解载流天线结构的电磁辐射特性及电磁波的散射、绕射场分布。所谓散射是指电磁波在传播途径上遇到障碍物如理想导体时，在其上感应出的电流和电荷再次产生辐射的现象；而绕射是偏离了几何光学定律的散射。它们的求解都属于电磁场的边值问题，即根据边界条件求解麦克斯韦方程。对于线天线，一般是根据给定的天线电流求解辐射场，而对于具有一定尺寸的口径的面天线，则是由口径场分布来求解辐射场。这是求解天线的严格解法。但通常情况下，除了极少数非常简单的天线，这种严格解法非常复杂甚至难于求解，所以常常采用近似方法求解。本节我们采用克希霍夫公式来求解口径天线的绕射场。

利用克希霍夫公式可以计算任一封闭面 $S$ 上的 $\Psi$ 和 $\partial\Psi/\partial n$ 的组合分布已知情况下的 $S$ 面内任意一点的波函数。例如，对于上一节我们介绍的抛物面天线，可以用一个封闭面将该天线系统包围起来，先由封闭面内部的天线系统求出封闭面上的场量分布(称为内场解)，然后由

封闭面上的场量分布求出外部的场量(称为外场解)。选择封闭面时,应考虑到尽量能够使计算简化。例如,对图9-20所示的抛物面天线,可以选用金属面 $S''$ 和口径面 $S'$ 来构成封闭面。其中金属面 $S''$ 的外表面场量分布可以认为是零,因为一般情况下,电磁波不能穿过金属面。而口径面 $S'$ 上的场分布可以用上节讲过的几何光学法求解。这样,整个封闭面 $S$ 上的场量分布求出后,就可以用克希霍夫公式计算封闭面外的场量分布了。

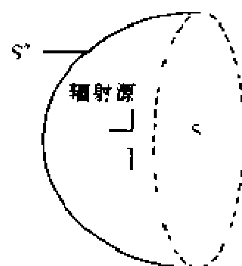



图9-20 求天线系统的辐射场

## 一、平面口径的绕射

下面我们具体计算一下无限大金属平板上的口径绕射场。如图9-21所示,在无限大金属平板上,开有任意形状的小孔,辐射源放在 $O$ 点。从 $O$ 点辐射的电磁波入射到小孔的边缘、拐角等处时,产生绕射,绕射波偏离了几何光学定律,从而与入射波一起在金属板右侧产生辐射场,我们把它统称为绕射场。现在,我们来求孔外任一点 $P$ 的场强。首先取一封闭面将辐射源包围起来,封闭面的一部分 $S'$ 取为口径面,另外一部分 $S''$ 沿着金属板延伸到无穷远处,其余部分 $S'''$ 在无穷远处。然后,我们来找出这三个面上的 $\Psi$ 和 $\partial\Psi/\partial n$ 的分布。

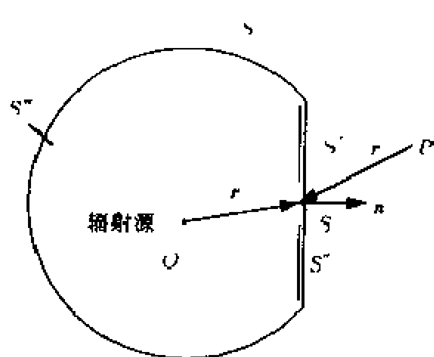



图9-21 无限大金属平板上的口径绕射

在 $S'$ 上,我们可以假定 $\Psi$ 和 $\partial\Psi/\partial n$ 等于原来入射波的值。当口径尺寸远大于工作波长时,这种假设比较接近实际情况,可认为是近似正确的。在 $S''$ 上,除了边缘处,我们认为电磁波不能穿过金属板,因此 $S''$ 上的 $\Psi$ 和 $\partial\Psi/\partial n$ 均为零。而 $S'''$ 在无穷远处,按照辐射条件应有 $\Psi=0, \partial\Psi/\partial n=0$。因此采用(9.1.7)式计算 $P$ 点的 $\Psi$ 时,只需在 $S'$ 上进行积分即可,即

$$\Psi_P=\frac{1}{4\pi}\int_{S'}\left[\Psi_i\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)-\frac{e^{-j\beta r}}{r}\frac{\partial\Psi_i}{\partial n}\right]dS \tag{9.7.1}$$

式中 $\Psi_i$ 为口径面上入射波的波函数。已知从 $O$ 点出发的波为球面波,可用下式表示:

$$\Psi_i=A\frac{e^{-j\beta r_i}}{r_i} \tag{9.7.2}$$

式中 $A$ 为常数。将 $\Psi_i$ 代入(9.7.1)式,算出

$$\frac{\partial\Psi_i}{\partial n}=A\frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{e^{-j\beta r_i}}{r_i}\right)\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{n}=-A\left(\frac{1}{r_i}+j\beta\right)\frac{e^{-j\beta r_i}}{r_i}\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{n}$$

及

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{n}=-\left(\frac{1}{r}+j\beta\right)\frac{e^{-j\beta r}}{r}\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{n}$$

式中 $\boldsymbol{a}_i$、$\boldsymbol{a}_r$ 及 $\boldsymbol{n}$ 均为单位矢量(参看图9-21),于是(9.7.1)式可写为

$$\Psi_P=-\frac{1}{4\pi}\int_{S'}\left[A\frac{e^{-j\beta r_i}}{r_i}\left(\frac{1}{r}+j\beta\right)\frac{e^{-j\beta r}}{r}\boldsymbol{a}_r-A\frac{e^{-j\beta r}}{r}\left(\frac{1}{r_i}+j\beta\right)\frac{e^{-j\beta r_i}}{r_i}\boldsymbol{a}_i\right]\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{9.7.3}$$

当 $r$ 和 $r_i$ 比波长大得多时,包含 $1/r^2$ 和 $1/r_i^2$ 的各项可以忽略不计。于是上式简化为

$$\Psi_P=-\frac{jA\beta}{4\pi}\int_{S'}\frac{e^{-j\beta(r+r_i)}}{rr_i}(\boldsymbol{a}_r-\boldsymbol{a}_i)\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{9.7.4}$$

当来波是垂直口径面入射的均匀平面波时,如图9-22所示,则 $\Psi_i=A\frac{e^{-j\beta r_i}}{r_i}$ 为一常数,

$\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{n}=1,\boldsymbol{a}_r\cdot\boldsymbol{n}=-\cos\theta$，于是(9.7.4)式可写为

$$\Psi_P=\frac{\mathrm{j}\Psi_i}{2\lambda}\int_S\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r}(1+\cos\theta)\mathrm{d}S \tag{9.7.5}$$

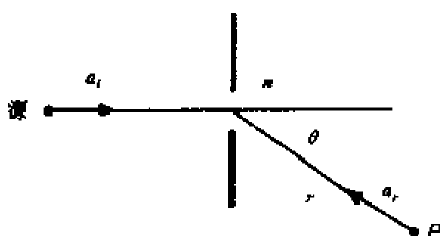



图 9-22 垂直入射式的口径绕射

如果我们关心的场量仅限于在口径面的法线附近，即 $\theta$ 角很小的区域或法线方向上，则 $\cos\theta\approx1$，于是上式可进一步简化为

$$\Psi_P=\frac{\mathrm{j}\Psi_i}{\lambda}\int_S\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r}}{r}\mathrm{d}S \tag{9.7.6}$$

## 二、矩形口径面的绕射

设图 9-23 的 $xOy$ 平面为一无限大的金属平面，其上开有口径为 $2a\times2b$ 的矩形孔。现在让我们来求一均匀平面波从 $-z$ 向 $+z$ 方向垂直投射到这块金属板上通过矩形口径时的绕射场强。假设入射波电场只有沿 $x$ 轴方向的分量，且可用下式表示

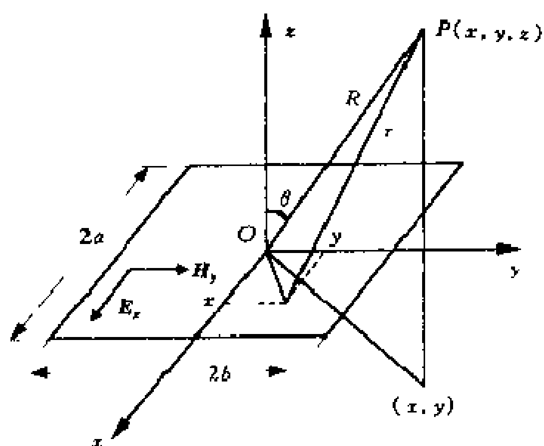



图 9-23 矩形口径面的绕射场强

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_xE_x=\boldsymbol{a}_xE_m\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z_0}=\boldsymbol{a}_xE_0$$

则 $E_0$ 满足克希霍夫公式中所要求的条件，可以用(9.7.6)式来计算。另外，观察点 $P$ 的坐标为 $P(x,y,z)$，它到原点 $O$ 的距离为 $R$，表示为

$$R^2=x^2+y^2+z^2 \tag{9.7.7}$$

口径面上一点 $(x',y')$ 到 $P(x,y,z)$ 点的距离为 $r$，表示为

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+z^2 \tag{9.7.8}$$

将(9.7.7)的 $z^2$ 代入上式，得

$$r^2=R^2-2(xx'+yy')+(x'^2+y'^2)=R^2\left[1-\frac{2(xx'+yy')}{R^2}+\frac{x'^2+y'^2}{R^2}\right]$$

因而

$$r=R\left[1-\frac{2(xx'+yy')}{R^2}+\frac{x'^2+y'^2}{R^2}\right]^{1/2}\approx R\left[1-\frac{xx'+yy'}{R^2}+\frac{x'^2+y'^2}{2R^2}+\cdots\right] \tag{9.7.9}$$

当观察点距离口径很远时，$R^2\gg(x'^2+y'^2)$，上式括弧中第三项及以后各项均可忽略不计，于是

$$r\approx R-\frac{xx'+yy'}{R} \tag{9.7.10}$$

将 $x=R\sin\theta\cos\varphi$，$y=R\sin\theta\sin\varphi$ 代入上式，可得

$$r\approx R-x'\sin\theta\cos\varphi-y'\sin\theta\sin\varphi \tag{9.7.11}$$

将此式代入(9.7.6)中，并令分母 $r\approx R$，可得 $P$ 点的电场为

$$E_P=\frac{\mathrm{j}E_0}{\lambda}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R}\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta\sin\theta(\cos\varphi x'+\sin\varphi y')}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{9.7.12}$$

积分结果为

$$E_P = \frac{j4abE_0}{\lambda R} e^{-j\beta R} \frac{\sin(\beta a \sin\theta\cos\varphi)}{\beta a \sin\theta\cos\varphi} \cdot \frac{\sin(\beta b \sin\theta\sin\varphi)}{\beta b \sin\theta\sin\varphi} \tag{9.7.13}$$

在 $\varphi = 0°$ 平面上,电场的方向性函数

$$F_E(\varphi = 0°) = \frac{\sin(\beta a \sin\theta)}{\beta a \sin\theta} \tag{9.7.14}$$

在 $\varphi = 90°$ 平面上,电场的方向性函数

$$F_E(\varphi = 90°) = \frac{\sin(\beta b \sin\theta)}{\beta b \sin\theta} \tag{9.7.15}$$

磁场的方向性函数在 $\varphi = 0°$ 平面上为(9.7.15)式,在 $\varphi = 90°$ 平面上则为(9.7.14)式。图 9 24 表示因子随 $u$ 的变化曲线($u = \beta a \sin\theta$ 或 $\beta b \sin\theta$)。

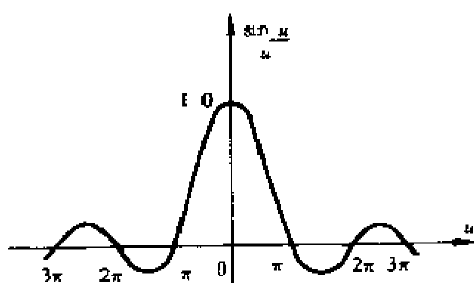



图 9 24 $\frac{\sin u}{u}$ 曲线

(1) 主辐射方向

当 $u \to 0$ 时,$\lim\limits_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$,表示当 $\theta = 0$ 时,(9.7.14)和(9.7.15)式具有最大值

$$E_P = E_{P\max} = j\frac{4abE_0}{\lambda R} e^{-j\beta R} \tag{9.7.16}$$

因此,$\theta = 0$ 方向为矩形口径的主辐射方向。

(2) 零辐射方向

电场和磁场的场量均为零时,称为零辐射方向,即

$$F_E(\theta_0) = F_H(\theta_0) = 0$$

于是

$$\sin(\beta a \sin\theta_0) = \sin(\beta b \sin\theta_0) = 0$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta_0 = \frac{2\pi}{\lambda} b \sin\theta_0 = \pi$$

在法线附近,$\sin\theta_0 \approx \theta_0$ 代入上式,有

$$\frac{2a}{\lambda}\theta_0 = \frac{2b}{\lambda}\theta_0 = 1$$

相应 $E$、$H$ 面的零辐射宽度分别为

$$2\theta_{0E} = \lambda / a \quad (\text{rad}) \tag{9.7.17}$$

$$2\theta_{0H} = \lambda / b \quad (\text{rad}) \tag{9.7.18}$$

(3)增益系数和方向性系数

口径面辐射的效率很高,接近于1,故 $G \approx D$。根据方向性系数的定义

$$D = \left.\frac{P_0}{P}\right|_{E = E_0}$$

通过口径面的总功率为

$$P = \int_S \boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{S} = S(4ab) = 4abE_0^2/\eta \tag{9.7.19}$$

面产生与(9.7.16)相等电场的点源天线的总功率为

$$P_0 = 4\pi R^2 \frac{|E_{P\max}|^2}{\eta} = \frac{64\pi a^2 b^2 E_0^2}{\eta\lambda^2} \tag{9.7.20}$$

于是
$$D=\frac{P_0}{P}=\frac{16\pi ab}{\lambda^2}=\frac{4\pi}{\lambda^2}\cdot S \tag{9.7.21}$$

而
$$G\approx D=\frac{4\pi}{\lambda^2}\cdot S \tag{9.7.22}$$

式中 $S=4ab$ 代表口径的面积。该式是由口径面积 $S$ 和工作波长 $\lambda$ 计算均匀激励口径面方向性系数的通用公式。

对于口径面上场分布不是均匀激励的情况，也可仿照同样方法求解。

**例 9.2** 抛物面天线的直径为 $d=30\ \text{m}$，工作波长为 $\lambda=3\ \text{cm}$，假定天线口径面上的场量为均匀分布，求天线的方向性系数。当天线的效率为 $\eta=50\%$ 时。问天线的增益多大？

**解** 抛物面天线的口径面积为 $S=\pi d^2/4$，代入(9.7.21)式，可得天线的方向性系数为
$$D=\frac{4\pi}{\lambda^2}\cdot S=\frac{4\pi}{\lambda^2}\frac{\pi d^2}{4}=\left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)^2=\left(\frac{30\pi}{0.03}\right)^2\approx 10^7$$

天线的增益为
$$G=\eta D\approx 0.5\times 10^7=5\times 10^6$$

或用分贝表示为
$$G_{\text{dB}}=10\lg G=10\lg 5\times 10^6=67\ \text{dB}$$

## 9.8 互易定理

本章的大部分篇幅我们是在讨论发射天线。对于接收天线，通常有两种分析方法，一种是求解边值问题，即根据接收天线在周围电磁波作用下产生的感应电流及其满足的导体边界条件和电流连续性原理，建立天线电流分布函数的积分方程，从方程的解计算天线的各种参数。这些参数是与发射天线的参数相对应的。另一种方法是利用互易定理来求解，即将接收天线直接按发射天线进行分析，所得结果亦为天线的接收特性。本节我们主要介绍后一种方法，即利用互易定理来分析接收天线的特性。

### 一、互易定理

在线性各向同性媒质中，假设有同频电流源 $\boldsymbol{J}_1$ 和 $\boldsymbol{J}_2$ 两个辐射系统，分别占有体积 $\tau_1$ 和 $\tau_2$，两辐射源分别单独存在时，各自产生的电磁场分别为 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{H}_2$，则根据矢量公式
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B}) \tag{9.8.1}$$

有
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{H}_2\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}_1)-\boldsymbol{E}_1\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}_2) \tag{9.8.2}$$

将正弦场的麦克斯韦方程
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$$

代入(9.8.2)式，可得
$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2)&=\boldsymbol{H}_2\cdot(-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}_1)-\boldsymbol{E}_1\cdot(\boldsymbol{J}_2+\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_2)\\&=-\mathrm{j}\omega(\mu\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2+\varepsilon\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2)-\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{J}_2\end{aligned} \tag{9.8.3}$$

若将下标 1 和 2 对调，可写出
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_1)=-\mathrm{j}\omega(\mu\boldsymbol{H}_2\cdot\boldsymbol{H}_1+\varepsilon\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{E}_1)-\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{J}_1 \tag{9.8.4}$$

用(9.8.3)式减去(9.8.4)式，可得

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{J}_1-\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{J}_2 \tag{9.8.5}$$

将上式两边同时对任一体积积分,并根据散度定理把左边的体积分改写成面积分,可得

$$\oint_S(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_1)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_\tau(\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{J}_1-\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{J}_2)\mathrm{d}\tau \tag{9.8.6}$$

式中 $S$ 为包围 $\tau$ 的封闭面,$\boldsymbol{n}$ 为封闭面的外法线方向。(9.8.6)式即是电磁场互易定理的一般形式。

现在让我们来讨论几个特殊情况。

(1)当所取体积扩大到无限远时,(9.8.6)式左边的面积分变为零,此时

$$\int_{\tau_\infty}\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{J}_1\mathrm{d}\tau=\int_{\tau_\infty}\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{J}_2\mathrm{d}\tau \tag{9.8.7}$$

此式称为卡森形式的互易定理,它表述了一个源与另一个场之间的相互关系。

(2)当体积分是在除去 $\tau_1$ 和 $\tau_2$ 之外的整个空间上进行时,则(9.8.6)式右边的积分为零,左边的积分应在 $S_1$、$S_2$ 和 $S_\infty$ 上进行,而无限远处 $S_\infty$ 上的积分为零,因而(9.8.6)式可写为

$$\int_{S_1+S_2}(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_1)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0 \tag{9.8.8}$$

这就是洛仑兹形式的互易定理。如果 $S_1$ 和 $S_2$ 是导体表面,例如是天线表面,则因切向电场应为零即 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$,而有

$$(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H}=0$$

因此,(9.8.8)式变为

$$\int_{S_1+S_2}(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_2)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_{S_1+S_2}(\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_1)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0 \tag{9.8.9}$$

**二、互易定理的应用**

设有两个偶极子天线分别用作收发天线,如图 9-25 所示。先在天线 1 的输入端加上电压源 $U_1$,令天线 2 的输入端短路,则天线 1 产生的场 $\boldsymbol{E}_{21}$,$\boldsymbol{H}_{21}$ 在天线 2 上感应出电流 $\boldsymbol{J}_{21}$。然后将激励源与短路对换,令天线 1 输入端短路,在天线 2 的输入端加电压源 $U_2$,则其产生的场 $\boldsymbol{E}_{12}$,$\boldsymbol{H}_{12}$ 在天线 1 上感应出电流 $\boldsymbol{J}_{12}$。于是按(9.8.7)式,有

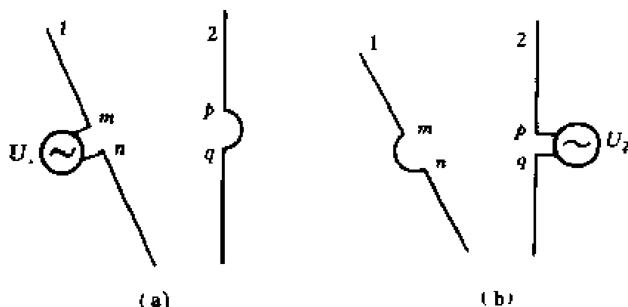


图 9-25 互易性

$$\int_{\tau_1+\tau_2}\boldsymbol{E}_{21}\cdot\boldsymbol{J}_{12}\mathrm{d}\tau=\int_{\tau_1+\tau_2}\boldsymbol{E}_{12}\cdot\boldsymbol{J}_{21}\mathrm{d}\tau$$

当天线为细导线时,$\boldsymbol{J}\mathrm{d}\tau=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,此时上式变为

$$I_{12}\int_{l_1+l_2}\boldsymbol{E}_{21}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=I_{21}\int_{l_1+l_2}\boldsymbol{E}_{12}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{9.8.10}$$

左边的 $\boldsymbol{E}_{21}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 在 $l_2$ 上为零,在 $l_1$ 上除输入端处外亦为零。因此(9.8.10)式左边应等于 $I_{12}U_1$。同理可知右边应等于 $I_{21}U_2$,于是

$$I_{12}U_1=I_{21}U_2$$

或写成

$$\frac{U_1}{I_{21}}=\frac{U_2}{I_{12}} \tag{9.8.11}$$

上式的左边是端口 1 的输入电压对端口 2 的输出电流的互阻抗 $Z_{21}$，右边则是端口 2 的输入电压对端口 1 的输出电流的互阻抗 $Z_{12}$，该式表明二者相等 $Z_{21}=Z_{12}$。这正是如图 9-26 所示的无源线性四端网络的互易定理。可见场理论与电路理论是一致的，而且场理论具有更普遍的意义。




图 9-26　两个天线的等效网络

现在我们就用(9.8.11)式来分析接收天线的特性。设天线 1 加电压 $U_1$，流入天线 1 的输入电流为 $I_1$，如图 9-27(a)所示，则

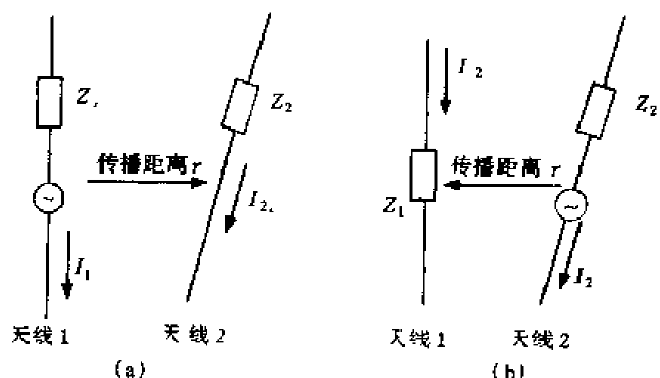



图 9-27　任意排列二天线间相互作用关系

$$I_1=\frac{U_1}{Z_1+Z_{1in}} \qquad (9.8.12)$$

式中 $Z_{1in}$ 是天线 1 的输入阻抗，$Z_1$ 是电源内阻抗，它连接在天线 1 上。

设天线 1 辐射的电磁场在天线 2 上产生的场强为

$$E_{21}=\frac{30\beta l_{ea1}I_1}{r}F_1(\theta,\varphi) \qquad (9.8.13)$$

式中 $l_{ea1}$ 是天线 1 的有效长度，$F_1(\theta,\varphi)$ 是它的方向性函数。由式(9.8.12)和式(9.8.13)得

$$U_1=\frac{rE_{21}(Z_1+Z_{1in})}{30\beta l_{ea1}F_1(\theta,\varphi)} \qquad (9.8.14)$$

此时，如果图 9-27(a)中 $Z_2$ 是天线 2 的负载，亦即连接在天线 2 的接收机输入阻抗，则在 $E_{21}$ 作用下 $Z_2$ 上便有电流 $I_{21}$ 流动。

现在，保持两天线位置不变，天线 1 不加电压，天线 2 加电压 $U_2$，它在天线 1 上产生场强 $E_{12}$，在 $Z_1$ 上有电流 $I_{12}$ 流动。于是与(9.8.14)式类似，有

$$U_2=\frac{rE_{12}(Z_2+Z_{2in})}{30\beta l_{ea2}F_2(\theta,\varphi)} \qquad (9.8.15)$$

式中 $Z_2$、$Z_{2in}$、$l_{ea2}$ 及 $F_2(\theta,\varphi)$ 分别为天线 2 的电源电阻、输入阻抗、有效长度及方向性函数。

根据(9.8.11)式，应有

$$\frac{rE_{21}(Z_1+Z_{1in})}{30\beta l_{ea1}F_1(\theta,\varphi)I_{21}}=\frac{rE_{12}(Z_2+Z_{2in})}{30\beta l_{ea2}F_2(\theta,\varphi)I_{12}} \qquad (9.8.16)$$

将同一天线的各参量放在一起，则得

$$\frac{I_{12}(Z_1+Z_{1in})}{E_{12}l_{ea1}F_1(\theta,\varphi)}=\frac{I_{21}(Z_2+Z_{2in})}{E_{21}l_{ea2}F_2(\theta,\varphi)} \qquad (9.8.17)$$

该式左边各因子仅与天线 1 有关，右边各因子仅与天线 2 有关，两边要相等，须等于一常数，因此，对任一天线，有

$$\frac{I(Z+Z_{in})}{El_{ea}F_a(\theta,\varphi)}=C \qquad (9.8.18)$$

式中下标 $a$ 表示发射，$E$ 是外电场，$I$ 是天线输入端感应的电流，$Z$ 是当天线用作接收时连接在天线端点的接收机输入阻抗。这三个参数是属于天线接收时的参数。$Z_{in}$、$F_a(\theta,\varphi)$、$l_{ea}$ 分别是该天线

作为发射时的输入阻抗、方向性函数和有效长度，这三个参数是属于天线发射时的参数。(9.8.18)式给出了接收天线上的电流与该天线用作发射时的各参量之间的关系。所以只要知道了一个天线用作发射时的特性，就可求出这一天线用作接收时的特性。从接收的角度来考虑，将上式改写成

$$I = \frac{CEl_{ea}F_a(\theta,\varphi)}{Z + Z_{in}} \tag{9.8.19}$$

于是接收天线相当于一个有源二端网络，其等效电路如图 9-28 所示。其中电源电压为

$$U = CEl_{ea}F_a(\theta,\varphi) \tag{9.8.20}$$

由于 $Z$ 是接收机的输入阻抗，因此该二端网的内阻即为 $Z_{in}$，而 $Z_{in}$ 是该天线用作发射时的输入阻抗，因此可知，天线用作接收时的阻抗等于用作发射时的输入阻抗。

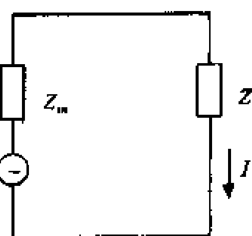


图 9-28　接收天线等效电路

现在来确定常数 $C$。以偶极子天线为例，如图 9-29 所示。设偶极子天线长为 $2l$，天线轴与来波方向夹角为 $\theta$，则外电场在天线轴线方向的分量为 $E\sin\theta$，天线上感应的电动势为

$$U = 2lE\sin\theta \tag{9.8.21}$$

另外，由(9.8.20)式出发，对于长度为 $2l$ 的偶极子天线，可知其 $l_{ea} = 2l$，$F_a(\theta,\varphi) = \sin\theta$，则由(9.8.20)式可得

$$U = CE2l\sin\theta \tag{9.8.22}$$

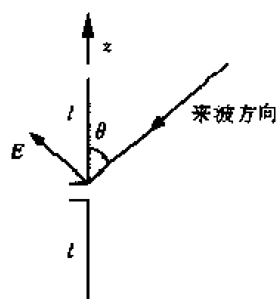


图 9-29　偶极子天线

比较(9.8.21)和(9.8.22)式可得

$$C = 1$$

于是，(9.8.20)式可写为

$$U = El_{ea}F_a(\theta,\varphi) \tag{9.8.23}$$

该式说明，天线用作接收时，在外电场 $E$ 的作用下，天线上感应的电动势应等于该天线用作发射时的有效长度与方向性函数以及外电场强度的乘积。这是由互易定理得出的结论。而另一方面，从接收天线本身来讲。其两个端点间的感应电动势应等于外电场强度乘以接收天线的有效长度及方向性函数，即

$$U = El_{er}F_r(\theta,\varphi) \tag{9.8.24}$$

式中下标 r 表示接收。因此，比较式(9.8.23)和(9.8.24)可知

$$l_{ea} = l_{er} \tag{9.8.25}$$

$$F_a(\theta,\varphi) = F_r(\theta,\varphi) \tag{9.8.26}$$

也就是说，天线用作接收时的有效长度和方向性函数与该天线用作发射时的有效长度和方向性函数分别相等。

由以上讨论可得如下结论：

(1)天线的方向性函数在用作发射时和用作接收时相同。接收天线的方向性函数是指接收天线对不同方向的来波所感应的电动势的大小的变化规律，由式(9.8.26)可知，这一变化关系就是该天线用作发射时的方向性函数。

(2)天线的阻抗用作接收时和用作发射时相同。

(3)天线的有效长度用作接收时和用作发射时相同。接收天线有效长度指的是天线感应

电动势除以最大接收方向的来波场强，即 $l_{er}=U/E$，而在此方向上 $F(\theta,\varphi)=1$，所以(9.8.23)式变为 $U=El_{ea}$或 $l_{ea}=U/E$，因此接收天线的有效长度就是该天线用作发射时的有效长度，$l_{er}=l_{ea}$。

## 习　题　9

9.1　如果振荡频率分别为50 Hz和50 MHz，问在距电偶极子多远处，辐射场等于感应场？

9.2　对自由空间中电流元，令 $\dfrac{I_0 l\eta}{4\pi\lambda^2}=2\text{ V/m}$，当 $r/\lambda=0.2$ 时，求 $E_\theta/H_\varphi$的比值。

9.3　电偶极子长10 m，电流振幅1 A，频率为1 MHz，求：

①在垂直于偶极子轴方向上10 m及100 km处的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{S}$ 和$\boldsymbol{S}_{平均}$；

②该偶极子的辐射功率 $P_r$。

9.4　一个工作频率为1 kHz的长波导航台，使用了一根500 m长的线天线，假设天线放置在空气中，要使在20 000 km处的接收点的电场强度达到50 μV/m(有效值)，天线的辐射功率最小应是多少？接收点应位于天线的什么方位上？天线的辐射电阻是多少？

9.5　在空气中，长度为 $0.01\lambda$ 的偶极子天线，如果放在无界的净水中，仍使用原来的工作频率，净水的 $\epsilon_r=80$，$\mu_r=1$，$\sigma=0$，计算该天线放在水中的辐射电阻。

9.6　一个沿 $z$ 方向放置在原点的交变电偶极子的远区，如果接收点分别沿 $\boldsymbol{a}_r$ 方向、$\boldsymbol{a}_\varphi$方向和$\boldsymbol{a}_\theta$ 方向移动，接收点的电场强度应如何变化？

9.7　题 9.7 图所示一半波天线，其上电流分布为

$$I=I_m\cos kz \qquad (-l/2<z<l/2)$$

①求证当 $r_0\gg l$ 时，由(9.2.39)式可解得

$$A_z=\frac{I_m e^{-jkr_0}}{2\pi kr_0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$$

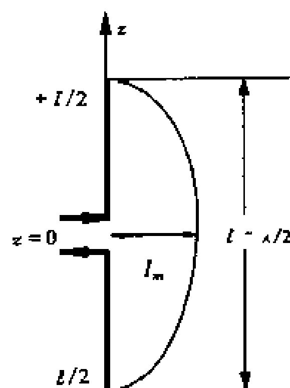
② 求远区的磁场和电场；

③用极坐标画出方向图；

④求玻印廷矢量；

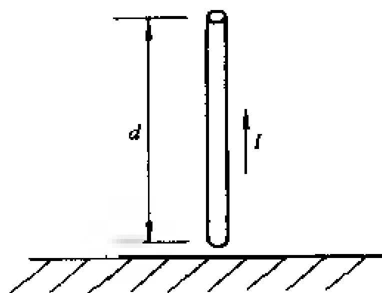
⑤已知 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}d\theta=0.609$，求辐射电阻；

⑥求方向性系数。



题 9.7图

9.8　一个直径为0.5 m、密绕100圈的环形天线，用1 kHz、0.1 A(有效值)的交变电流激励，求它的辐射功率和辐射电阻。



题 9.9图

9.9　如题 9.9 图所示，设 $d=\lambda/4$，称为四分之一波长单极子天线。在导电面上一点离天线1.6 km处，电场强度为100 mV/m，求：

①馈入单极子的电流；

②馈入天线的平均功率。

9.10　均匀直线式天线阵的元间距 $d=\lambda/2$，如要求它的最大辐射方向在偏离天线阵的轴线 ±60°的方向，问单元之间的相位差应是多少？

9.11 如题 9.11 图所示，在 $z$ 轴上 $z=\pm\frac{\lambda}{2}$ 处放置电流元，沿 $\boldsymbol{a}_z$ 方向有相同的电流 $I_0\cos\omega t$，求：

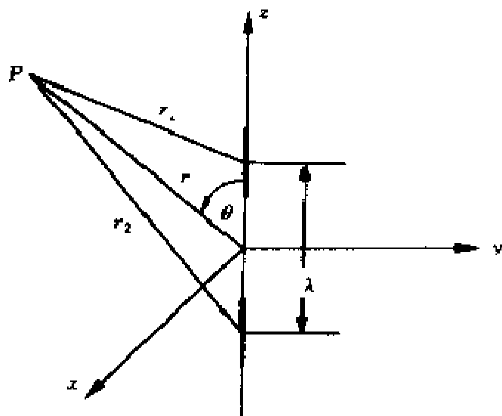
①每个电流元分别至点 $P(r=5\lambda,\theta=30°,\varphi=0)$ 的距离；

②求 $\varphi=0$ 平面上远区矢量磁位 $\boldsymbol{A}(r,\theta,0)$。

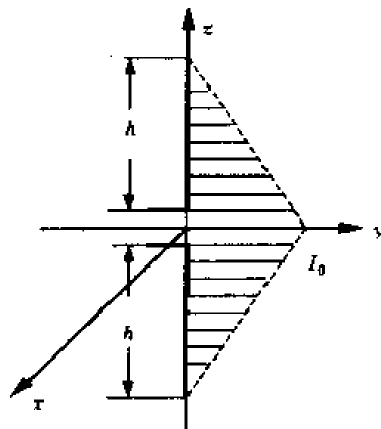
9.12 一短天线长 $2h<\lambda/4$，天线上的电流线性分布如题 9.12 图所示。

①求辐射功率；

②若激励电流沿线分布是均匀的，都是 $I_0$，辐射功率和题(1)相同，则电偶极子等效长度应多大？




题 9.11 图



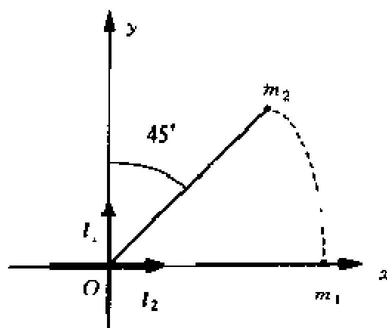

题 9.12 图

9.13 题 9.13 图表示空气中两个完全相同的电偶极子互相垂直放置，其上电流幅度相等，相位相差 $\frac{\pi}{3}$，即 $I_1=I_2e^{j\frac{\pi}{3}}$。如已知 $x$ 轴上 $m_1$ 点（远区）玻印廷矢量之值为 $S_{1平均}=1\ \mathrm{mW/m^2}$，求 $xOy$ 平面上 $m_2$ 点（$Om_1=Om_2$）的平均玻印廷矢量 $S_{2平均}$的值。

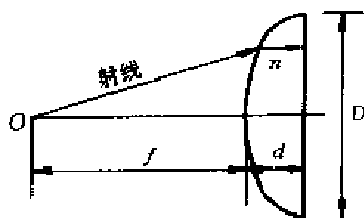
9.14 介质透镜的折射指数为 $n$，直径为 $D(D\gg\lambda)$，它离开点源 $O$ 的距离为 $f$（见题 9.14 图）。试求此透镜的轮廓线形状，以使入射波经透镜折射后变为平面波。

9.15 设均匀平面波垂直入射到无限大金属平板上的圆孔，求口径面法线方向的绕设场。已知：

$$\int_0^{2\pi}e^{ju\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=2\pi J_0(u)$$




题 9.13 图




题 9.14 图

# 第 10 章　狭义相对论

相对论是近代物理的重要支柱,分为狭义相对论和广义相对论两部分。狭义相对论的产生与对运动参考系中的电磁运动规律的研究密切相关,同时它的建立又大大地深化了人们对电磁现象的认识。本章我们从基本的实验事实出发,提出两个基本假设:相对性原理和光速不变原理,并由此导出洛仑兹变换式。相对论所涉及的基本问题,是研究相对运动着的观测者观测物理现象时所得的结果的一致性问题。1905 年爱因斯坦提出了狭义相对论,它是本书考虑相对论时所采用的唯一形式。狭义相对论所论及的观测者们都是以恒定的速度相对运动着。"相对"这一词是指这些观测者在他们各自所处的坐标系中对于同一现象的描写所作的假定的等价性而言的。我们将要看到,我们能够在经典电磁理论中找到狭义相对论的起源,因而我们将从考虑这些运动着的观测者如何描述某些电磁效应开始。

## 10.1　狭义相对论的历史起源

按照习惯,每当人们研究电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$时,其位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 和时间 $t$ 是指相对于某一特定的惯性坐标系而言的,并假设测定 $\boldsymbol{r}$ 和 $t$ 时的 $\boldsymbol{E}$ 的观察者相对于这些坐标是静止的。由力学知识知道,一个固定在地球表面上的坐标系,对于我们所研究的大多数问题来说,是一个令人满意的近似惯性坐标系。

当我们讨论法拉第定律时,对于运动的观察者来说,观察到的电场是

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{10.1.1}$$

其中,不带撇的量是静止观察者测定的,上式说明了一种联系两个坐标系中场的方式。而法拉第定律

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

是一个与介质的运动形式无关的表达式。但是,现在我们更感性兴趣的是,式(10.1.1)表明,两个作相对运动的观察者以不同的方式描述同一物理现象。作为一个极端的例子,如果 $\boldsymbol{E}=0$,即对于静止观察者看来完全是磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的场,而作相对运动的观察者看来却为电场 $\boldsymbol{E}'$。因此,电场并不是一个在给定点和给定时刻的绝对物理量,而它还要取决于观测者的运动。

式(10.1.1)实质上是根据法拉第电磁感应定律和应用伽利略相对性原理的结果。在图 10-1 中,为了简单起见,我们给出了坐标轴为互相平行的两个直角坐标系。他们的原点的相对位置由位置矢量 $\boldsymbol{R}_0$ 给定,在 $t=0$ 时刻它们的原点互相重合,坐标系 $S'$相对于 $S$ 以恒定速度 $\boldsymbol{V}$ 运动。点 $P$ 的位置矢量是$\boldsymbol{r}$ 和$\boldsymbol{r}'$,

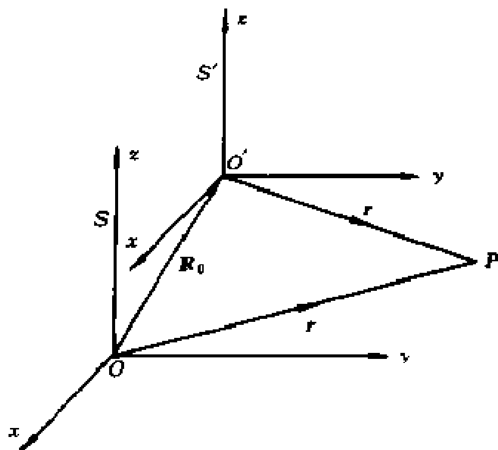



图 10-1

因此

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_0 \tag{10.1.2}$$

因此，如果在两个坐标系中测量点 $P$ 的速度，则它们被以下熟悉的结果联系起来：

$$\boldsymbol{v}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_0}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}$$

由于 $V$ 是常数，因此加速度是相等的，即

$$\boldsymbol{a}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}$$

所以，作用于点 $P$ 质点 $m$ 上的加速度也是相等的，即

$$\boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

因此，在两个以恒定速度相对运动的坐标系中，力学的基本定律具有相同的形式。也就是说，一切惯性坐标系都同样适合于作参考系。这一结论称为伽利略相对性原理。而联系一个给定"事件"的两个坐标系和时间($t=t'$)的式(10.1.2)则称为伽利略变换，式(10.1.2)是完全普遍的形式，现在我们仅考虑相对运动是沿着 $xx'$公共的方向，因而 $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{a}_x$。这样就能够将式(10.1.2)写成如下分量的形式

$$x' = x - Vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t \tag{10.1.3}$$

这样两个坐标系之间的速度关系为

$$v'_x = v_x - V \qquad v'_y = v_y \qquad v'_z = v_z$$

由于场的表达式随所选用的坐标系而变化，因此，我们很自然地需要知道式(10.1.3)是如何影响确定电磁场的方程(即麦克斯韦方程)的。为方便起见，我们来考虑麦克斯韦方程的一个推论，即波动方程

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{10.1.4}$$

就足够了。在真空中场的任何分量都满足这一方程。我们已经知道，以上波动方程具有速度为 c 的平面波解。以下我们将证明，经过伽利略变换，这一方程的形式并不保持不变，但是，平面波的解仍然可能存在。

为了便于说明问题，并不失一般性，取 $x$ 轴的正向与平面波的传播方向一致，于是平面波方程可以简化为

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{10.1.5}$$

现在让我们对 $\Phi$ 作伽利略变换，按式(10.1.3)作 $x'$和$t'$的代换，则有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial x'}$$

进一步可以得到

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2}$$

类似地，有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -V\frac{\partial\Phi}{\partial x'} + \frac{\partial\Phi}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} - 2V\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2}$$

将以上推导结果代入平面波方程(10.1.5),经整理后得

$$(c^2-v^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} - V^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} \quad 2V\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'} \tag{10.1.6}$$

很显然,此式与不带撇的坐标系中场所满足的方程(10.1.5)有着不同的形式。然而,此方程仍然存在一个平面波解

$$\Phi(x',t') = \Phi_0\cos k(x'-v't') \tag{10.1.7}$$

其中,$v'$为相速度。将上式代入式(10.1.6),可以验证,只要相速度$v'$满足

$$v' \quad c+V$$

式(10.1.6)就是方程(10.1.5)的一个解。如果平面波沿正$x'$方向传播,它的速度为$c-V$,而波沿负$x'$方向传播时,它的速度为$c+V$。因此,这些结果与伽利略变换(10.1.3)式所给出的特殊情况相符合。

这一计算结果表明,如果伽利略相对性原理和波动方程(10.1.4)同时都是正确的,那么在以恒定速度作相对运动的不同坐标系中观测时,电磁效应一般是不同的,特别是在真空中平面波的速度并不等于一个常数值c。由于波动方程是麦克斯韦方程的推论,以上结果意味着,只可能存在一个唯一的坐标系,在此坐标系中麦克斯韦方程具有我们在前几章所应用过的形式,并且电磁波的传播速度为c。这一特定的参考系一般等同于力学中的原惯性系,即一个相对于“固定恒星”的固定参考系。这一参考系还必须具有传播电磁波的性质,这个系统就是人们曾经寻找过的“以太”。

然而,“以太”的引入有一个明显的不足,那就是不同的坐标系不等价。但是,不同坐标系的等价概念是这样的简单和富有吸引力,因面促使我们有必要考虑另一种可能性,即存在有一个对力学和电磁学面言,“等价性”都成立的公共的相对性原理。如果这种情况确实成立,那么建立在伽利略变换和牛顿力学基础上的伽利略相对性原理实际上就是一个不合理的原理。

物理学的基础是一个实验科学,在“等价性”与“伽利略相对性原理”之间的抉择,也只能依靠实验结果。历史上,一种办法是假定麦克斯韦方程和伽利略变换两者都是正确的,即存在一个特定的参考系(“以太”)。那么固定在地球上的实验室参考系相对于原惯性系(“以太”)就是运动的,于是我们应该能够测到与这一运动相关的效应,比如光速是可变的(相对于以太)。以下我们介绍最有代表性的著名实验——迈克耳孙-莫雷(Michelson-Morly)实验。

此实验的目的是要证明伽利略相对性原理的质点速度合成公式同样适用于电磁波的速度。如果把$V$解释为相对于“以太”$S'$的速度,那么波的速度将依赖于介质的运动,而相对于“以太”的速度才是c。1887年迈克耳孙-莫雷首先进行了测量电磁波速(光是一种特殊的电磁波)实验。

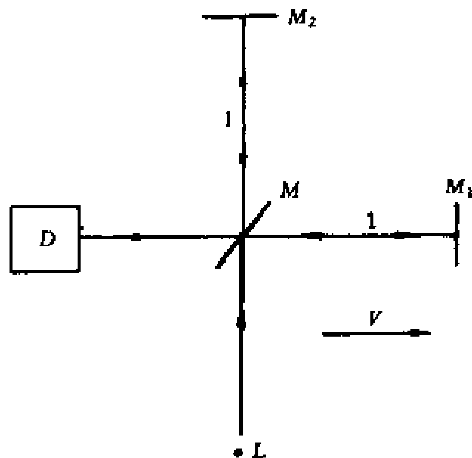


图10-2 迈克耳孙-莫雷实验装置

实验装置如图10-2所示。该系统相对于“以太”以速度$V$运动。来自光源$L$的光射到部分镀银的玻璃板$M$上,然后分成在互相垂直的方向传播的两束光,它们分别传播到反射镜$M_1$和$M_2$,且距离都是$l$,并且都按原路径反射回来。这样,每一束光都将有一部分沿装置的第四臂传播到探测器$D$。显然,由于这两束光在部分路径上的速度不同,因面在探测器处会产生相位差,导致干涉效应,能够在合成光束中作为可变的的振幅而被观测到。为了计算相位差,我们需要计算出光束沿它们各自的路径传播所

需的时间。

如图10-2所示，假设臂1处在仪器运动的方向，那么，根据伽利略变换，朝1臂外侧传播的光的速度为 $c-V$，而返回路程上的光的速度为 $c+V$。由此可以计算出光沿着这个臂来回所需的时间是

$$t_1=\frac{l}{c-V}+\frac{l}{c+V}=\frac{2l}{c}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1}\approx\frac{2l}{c}\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)$$

由于臂2与运动方向垂直，根据伽利略变换，可求得光的合成速度为 $(c^2-V^2)^{1/2}$，因此光沿这个路径传播所需的时间是

$$t_2=\frac{2l}{(c^2-V^2)^{1/2}}\approx\frac{2l}{c}\left(1+\frac{V^2}{2c^2}\right)$$

所以，这两个时间不一样的，它们的差是

$$\Delta t=t_1-t_2\approx\frac{l}{c}\left(\frac{V}{c}\right)^2$$

假设以上装置的臂长 $l=15$ m，运动速度为 $V=3\times10^4$ m/s，代入上式可得到光沿两个路径的时间差 $\Delta t=0.5\times10^{-15}$，如果采用波长为 $0.5\times10^{-6}$m的可见光，则这个很小的时间差会产生 $\Delta\Phi=\omega\Delta t=2\pi c\Delta t/\lambda=0.3(2\pi)$ 弧度的相位差，可以看出，这个相位差很大，在探测臂 $D$ 应能看到相应的干涉效应。然而，迈克耳孙和莫雷没有观察到这种效应。后来，人们多次重复作了这个实验和经过改变的实验，并且仪器的灵敏性、精密性大有提高。但是，始终观察不到相应的干涉效应。因此，如果要把伽利略相对性原理应用于电磁学，就产生了特定参考系"以太"的想法。但是，并没有任何类型的实验结果支持电磁学的"以太"。这就导致我们假定对于电磁学和力学存在一公共的相对性原理，这就是爱因斯坦提出的狭义相对性原理。然而，狭义相对论不是建立在单个实验基础之上的，它已经为大量的天文、物理、微观粒子等实验所验证。

## 10.2 狭义相对论的数学描述

爱因斯坦通过深入地考虑迈克耳孙-莫雷实验以及大量的前人所作的实验结果，他于1905年提出了如下(本质上相同的)两个假设：

(1)所有坐标系对物理现象的描述都是同样适当的；

(2)光在真空中的速度对于所有观察者都是相同的，并且与光源的运动无关。

第一个涉及所有的坐标系，尽管我们是把自己局限于惯性坐标系(恒定速度的坐标系)。这个假设断言，整个物理学有一个公共的相对性原理，尽管我们只是从质点力学和电磁学来考虑这一原理。

前面看到，将麦克斯韦方程和伽利略变换相结合得出绝对速度以及可能产生的影响，但这样的预言没有被实验所证实。这可能是伽利略变换不正确，也可能是麦克斯韦方程不完全正确。爱因斯坦选择了第一个可能性。

因为人们迄今还没有办法从正面直接证明这两条基本原理的正确性，所以还称它们为"假设"。但到目前为止，尚未发现任一事实与这两条基本原理及由此引出的结论相抵触；相反，由它们所预言的效应却不断地为实验所证实。

与光速不变原理相符合的变换是洛仑兹变换。为简单起见，我们考虑两个沿它们的公共

的 $xx'$ 方向以速度 $V$ 作相对运动的坐标系 $S$ 和 $S'$。这样对于某个给定事件，在 $S$ 坐标系中可用坐标和时间 $(x,y,z,t)$ 来描述，在 $S'$ 坐标系中可用坐标和时间 $(x',y',z',t')$ 来描述。因此，洛仑兹变换就是建立这两组四维坐标之间的定量关系。

假定在两个坐标系的原点重合的瞬间，从原点发出一个光脉冲。光速不变原理要求两个坐标系中的观察者会看到光在所有方向上都以同样的速度 $c$ 传播，即两个观察者都将看到一个波阵面为球面的光，其球心都在坐标系的原点，面半径为光速 $c$ 乘时间 $t$。于是波阵面方程为

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0 \qquad x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0 \tag{10.2.1}$$

即有恒等式：

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 \tag{10.2.2}$$

上式表明，坐标变换时，方程两边的量必须是不变量。

由于坐标系的相对运动方向取在 $xx'$ 轴上，假定垂直于运动方向的坐标不变是合理的，也即是说

$$y=y' \qquad z=z'$$

那么式(10.2.2)简化为

$$x^2-c^2t^2=x'^2-c^2t'^2 \tag{10.2.3}$$

鉴于参照系 $S'$ 相对于参照系 $S$ 的运动速度为 $V$，从 $S$ 的角度来看，原点 $O'$ 在 $S$ 中的 $x$ 坐标应该是 $Vt$。另一方面，从 $S'$ 的角度来看，原点 $O$ 在 $S'$ 中的 $x'$ 坐标应该是 $-Vt'$。因此方程(10.2.3)最简单形式，即线性形式的解为

$$x'=\gamma(x-Vt) \qquad x=\gamma'(x'+Vt') \tag{10.2.4}$$

其中，$\gamma$ 和 $\gamma'$ 是待定常数。解得

$$t'=\gamma\left[t-\frac{x}{V}\left(1-\frac{1}{\gamma\gamma'}\right)\right] \tag{10.2.5}$$

将 $x'$ 和 $t'$ 的表达式代入方程(10.2.3)，得到

$$x^2\left[1-\gamma^2+\frac{\gamma^2c^2}{V^2}\left(1-\frac{1}{\gamma\gamma'}\right)^2\right]+2xt\left[\gamma^2V-\frac{\gamma^2c^2}{V^2}\left(1-\frac{1}{\gamma\gamma'}\right)\right]+t^2\left[\gamma^2(c^2-V^2)-c^2\right]=0 \tag{10.2.6}$$

上式对所有 $x$ 和 $t$ 都成立，因此必须有

$$1-\gamma^2+\frac{\gamma^2c^2}{V^2}\left(1-\frac{1}{\gamma\gamma'}\right)^2=0$$

$$\gamma^2V-\frac{\gamma^2c^2}{V}\left(1-\frac{1}{\gamma\gamma'}\right)^2=0$$

$$\gamma^2(c^2-V^2)-c^2=0$$

解出

$$\gamma=\gamma'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{10.2.7}$$

因此，洛仑兹变换为

$$x'=\gamma(x-Vt), \quad y'=y, \quad z'=z, \quad t'=\gamma\left(t-\frac{V}{c^2}x\right) \tag{10.2.8}$$

由(10.2.8)可以解出

$$x=\gamma(x'+Vt)\quad y=y'\quad z=z'\quad t=\gamma\left(t'+\frac{V}{c^2}x'\right) \tag{10.2.9}$$

可以看出，变换关系(10.2.8)和(10.2.9)之间的转换是等价的，并且像我们所期望的那样改变 $V$ 的符号。

如果令 $\frac{V}{c}\to 0$，因而 $\gamma\to 1$，则洛仑兹变换式(10.2.8)退化成伽利略变换。事实上，当 $\frac{V}{c}\ll 1$ 时，伽利略变换可看成是洛仑兹变换的一级近似。

一个方便的做法是将 $V$ 与 c 的比值用一个特殊的符号 $\beta$ 来表示：

$$\beta=\frac{V}{c}$$

因此

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

而洛仑兹变换式(10.2.8)可表示为

$$x'=\gamma(x-\beta ct),\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right) \tag{10.2.10}$$

洛仑兹变换集中地体现了狭义相对论的时空观念，定量地揭示了时间和空间的统一性以及它们同物质运动的紧密精密联系。

式(10.2.10)是在选取两惯性系间坐标最简单的情况下导出的，称为特殊洛仑兹变换。如果 $S'$ 系相对于 $S$ 系的速度 $\boldsymbol{V}=V_x\boldsymbol{a}_x+V_y\boldsymbol{a}_y+V_z\boldsymbol{a}_z$，那么不难证明，洛仑兹变换的一般形式将为

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+(\gamma-1)\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}\boldsymbol{V}-\gamma\boldsymbol{V}t$$

$$t'=\gamma\left(t-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}\right)$$

显然，当 $\boldsymbol{V}=V\boldsymbol{a}_x$ 时，上述一般洛仑兹变换就过渡到(10.2.10)式。

**例 10.1** 同时性的相对性。

假设在 $S$ 坐标系中有两个事件在在不同的点 $x_1$ 和 $x_2$ 同时发生，即 $t_1=t_2$。由洛仑兹变换式(10.2.10)可知，在 $S'$ 坐标系中观测这两个事件时，观测到的时间分别是

$$t'_1=\gamma\left(t_1-\frac{\beta}{c}x_1\right)\qquad t'_2=\gamma\left(t_2-\frac{\beta}{c}x_2\right)$$

这两个事件的时间差

$$\Delta t'=t'_2-t'_1=-\frac{\gamma\beta}{c}(x_2-x_1)\neq 0 \tag{10.2.11}$$

以上计算结果表明，同时性不是绝对的性质，它同观测者的相对运动状况有关。同时的相对性是指两异地事件的同时性具有相对性，对同地事件而言，同时性是绝对的。

由于同时性是相对的，所以我们就不可能找到一个对所有惯性系普遍适用的绝对时间，也就是说，不可能找到一个普遍的时间标准。这和经典时空观的 $t'=t$ 是格格不入的。

**例 10.2** 时间膨胀。

假设在 $S$ 坐标系中有一个时钟位于 $x_0$ 点，它按固定的时间间隔 $\Delta t$ 发出某种特殊的信

号，这里 $\Delta t = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$，等等。由洛仑兹变换知，在 $S$ 坐标系中观测这两个事件时，观测到的时间间隔是

$$\Delta t' = \gamma \Delta t > \Delta t \tag{10.2.12}$$

以上结果表明，运动的观测者看到的时间间隔要长些，即时间膨胀了。

由于目前人造运载工具的速度远小于光速，所以有关运动时钟延缓的试验，基本上都是借助高能粒子间接进行的。

**例 10.3** 洛仑兹收缩。

假设在 $S$ 坐标系中用一个与两点 $x_1$ 和 $x_2$ 相对静止的尺子测得的距离

$$L = x_2 - x_1$$

而运动的观测者用坐标 $x'_2$ 和 $x'_1$ 标志测量点，得出的长度为

$$L' = x'_2 - x'_1 = \gamma[x_2 - x_1 - \beta c(t_2 - t_1)]$$

然而，$x'_2$ 和 $x'_1$ 的值在 $S'$ 内必须同时确定，即 $t'_2 = t'_1$。由洛仑兹变换式(10.2.10)可知

$$t_2 - t_1 = \frac{\beta}{c}(x_2 - x_1) = \frac{\beta}{c}L$$

将上式代入 $L'$ 的表达式，得

$$L' = \gamma(1 - \beta^2)L = \frac{L}{\gamma} = L\sqrt{1 - \beta^2} < L \tag{10.2.13}$$

以上计算结果表明，在运动的观测者看来长度将按系数 $\frac{1}{\gamma}$ 收缩。

运动物体在其运动方向上长度的缩短，反映出空间距离也有相对性。运动时钟延缓和运动长度缩短是运动物质间时空关系的客观反映，是统一时空的两个基本属性。它们两者间是相互联系的，与物质的具体结构和运动的具体机制无关。这两个效应是物质的运动影响测量所导致的结果，它们是真实的、可以测量的，不存在任何主观的随意性。

相对论运动学效应和收缩因子 $\sqrt{1 - \beta^2}$ 密切地联系在一起。我们可以看到，当物体运动的速度有限，即 $v \ll c$ 时，$\sqrt{1 - \beta^2}$ 与 1 相差很小，运动效应就不明显。此时，我们用经典理论讨论问题就足够了，无需借助于狭义相对论。

**例 10.4** 速度叠加公式。

在运动参考系 $S'$ 中观测时，$\boldsymbol{v}'$ 的各个分量由下式给定：

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad v'_z = \frac{dz'}{dt}$$

我们现在要求在 $S$ 中观测这同一点的运动速度分量 $v_x$、$v_y$、$v_z$。

由洛仑兹变换式(10.2.10)可知

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \gamma\left(\frac{dx'}{dt'}\frac{dt'}{dt} + \beta c\frac{dt'}{dt}\right)$$

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{\beta v_x}{c}\right)$$

由以上两式解出

$$v_x = \gamma^2(v'_x + V)\left(1 - \frac{\beta v_x}{c}\right)$$

结果得到

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c_2}} \tag{10.2.14}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma\left[1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right]}$$

同样,可以导出

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{v'_y}{\gamma\left[1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right]} \tag{10.2.15}$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{v'_z}{\gamma\left[1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right]} \tag{10.2.16}$$

可以看出,当运动速度 $V \ll c$ 时,狭义相对论速度可以由伽利略变换速度近似表示。另外,狭义相对论速度变换式表明:任何物体的运动速度都不可能超过真空中的光速 $c$。但这里的"运动速度"指的是物质相互作用的传递速度。比如,$V = c$,取 $v'_x = c$。由伽利略变换将得出:

$$v_x = v'_x + V = 2c$$

而根据狭义相对论速度变换的结果为

$$v_x = \frac{c + c}{1 + \frac{c^2}{c^2}} = c$$

正如上面所断言的那样。

狭义相对论指出的客观物质的运动不可能超光速,并不等于说自然界中就不存在超光现象。要理解这一点,就必须清楚不同惯性系之间的速度变换与同一惯性系里速度的合成与分解是两个完全不同的概念。

举一个速度分解的例子,设云层离地 $h = 12\ 000$ m,地面向云层发出的灯光转动的角速度 $\omega = 3\times10^4$ rad/s,则灯光在云层上划过的速度 $v = h\omega = 3.6\times10^8$ m/s。表明灯光在云层上划过的速度超过了光速。当然,速度 $v$ 仅仅是大量的光子在云层上扫描运动的表面现象,并不是光真的在云层上以超光速运动着,事实上是光在从地面向着天上的云层方向在运动。

总之,现在已知的各式各样的所谓超光速运动,都不是真的有某种能量或信息以超过光速的速度在自然界传递着,而事实上还没有发现以大于光速的速度运动的客观存在。所谓的超光运动,只不过是一种表面的现象或形式上的运动,实际上它们之间并不存在因果关系。

不过,超光速粒子是否客观存在,仍然是有争议的。事实是迄今为止尚未发现这类粒子,但探索仍在进行之中。

## 10.3 洛仑兹变换的四维形式

根据式(10.2.2),我们能够把洛仑兹变换的这个基本条件表示成 $s^2$ 的不变性,由下式给

定：

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \tag{10.3.1}$$

如果我们引入符号

$$x_1 = x \qquad x_2 = y \qquad x_3 = z \qquad x_4 = \mathrm{j}ct \tag{10.3.2}$$

则我们能把(10.3.1)式写成

$$s^2 = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2 = \sum_{\mu=1}^{4} x'^2_\mu \tag{10.3.3}$$

上式表明，我们能够把最普通的洛仑兹变换看成是 $x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4 = \mathrm{j}ct$ 轴的四维空间中诸轴的刚性转动。

式(10.3.2)表示的四维坐标 $x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 构成了一个复四维时空，这一思想首先由闵可夫斯基提出，因此通常称之为闵可夫斯基空间。洛仑兹变换式(10.2.8)可以写成

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \quad (\mu, \nu = 1,2,3,4) \tag{10.3.4}$$

式中

$$a_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \mathrm{j}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{j}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \tag{10.3.5}$$

称为洛仑兹变换矩阵，式(10.3.4)就是洛仑兹变换的四维形式。

洛仑兹逆变换为

$$x_\mu = b_{\mu\nu} x'_\nu \tag{10.3.6}$$

式中

$$b_{\mu\nu} = a^{-1} = a^t = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\mathrm{j}\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{j}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \tag{10.3.7}$$

上式中 $\boldsymbol{a}^{-1}$ 是洛仑兹变换矩阵 $\boldsymbol{a}$ 的逆矩阵，而 $\boldsymbol{a}^t$ 是洛仑兹变换矩阵 $\boldsymbol{a}$ 的转置矩阵。表明洛仑兹变换的逆矩阵刚好是它的转置矩阵。

下面讨论洛仑兹变换矩阵的基本性质。

容易验证

$$a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = 0 \quad (\text{当 } \nu \neq \lambda \text{ 时})$$

$$a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = 1 \quad (\text{当 } \nu = \lambda \text{ 时})$$

以上结果可用克罗内克(Kronecker)符号 $\delta_{\nu\lambda}$ 可简记为

$$a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} \tag{10.3.8}$$

其中

$$\delta_{\nu\lambda} = 0 \quad \text{当 } \nu \neq \lambda \text{ 时}$$

$$\delta_{\nu\lambda} = 1 \quad \text{当 } \nu = \lambda \text{ 时}$$

表明洛仑兹变换满足正交变换条件。

## 10.4 复四维时空的运算

仿照三维空间的运算法则，可以定义复四维时空在洛仑兹正交变换下的运算法则。

1. 四维标量

四维标量在洛仑兹变换下它保持不变，四维标量就是洛仑兹不变量。如距离间隔

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^{4} dx_\mu^2 = \sum_{\mu=1}^{4} dx'^2_\mu$$

在洛仑兹变换下保持不变，所以闵可夫斯基空间相邻事件的间隔是一个不变量。

2. 四维矢量

参照三维空间的矢量描述方法，我们可以定义在 $S$ 系统中，四维矢量可写成

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{a}'_1 x'_1 + \boldsymbol{a}_2 x_2 + \boldsymbol{a}_3 x_3 + \boldsymbol{a}_4 x_4 \tag{10.4.1}$$

式中 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$、$\boldsymbol{a}_4$ 为四维空间的单位矢量。经过洛仑兹变换后，在 $S'$系统中的表达式应为

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{a}'_1 x'_1 + \boldsymbol{a}'_2 x'_2 + \boldsymbol{a}'_3 x'_3 + \boldsymbol{a}'_4 x'_4 \tag{10.4.2}$$

或

$$\boldsymbol{R}' = (\boldsymbol{a}'_1 \boldsymbol{a}'_2 \boldsymbol{a}'_3 \boldsymbol{a}'_4)\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \tag{10.4.3}$$

由洛仑兹变换知

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & j\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -j\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

而

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}'_1 \\ \boldsymbol{a}'_2 \\ \boldsymbol{a}'_3 \\ \boldsymbol{a}'_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & j\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ j\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix}$$

根据转置矩阵的性质 $(\boldsymbol{ab})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$，得

$$(\boldsymbol{a}'_1 \boldsymbol{a}'_2 \boldsymbol{a}'_3 \boldsymbol{a}'_4) = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{a}_4)\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & j\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ j\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

代入(10.4.3)，得

$$\boldsymbol{R}' = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{a}_4)\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & j\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ j\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & j\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ j\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$(a_1 a_2 a_3 a_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$$

即

$$\boldsymbol{R}' \quad \boldsymbol{R} \tag{10.4.4}$$

上面的推导结果表明,代表一点位置的四维矢量不随参考系的改变面改变。

3. 四维矢量的点积

点积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 在 $S'$ 系统中的表达式应为

$$\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{B}' = (A'_1 A'_2 A'_3 A'_4)\begin{pmatrix}B'_1\\B'_2\\B'_3\\B'_4\end{pmatrix}$$

$$= (A_1 A_2 A_3 A_4)\begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0 & -\mathrm{j}\beta\gamma\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\\mathrm{j}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0 & \mathrm{j}\beta\gamma\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\-\mathrm{j}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\\B_4\end{pmatrix}$$

$$= (A_1 A_2 A_3 A_4)\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\\B_4\end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{B}' \quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \tag{10.4.5}$$

因此矢量的点积在洛仑兹变换下具有不变性。

4. 四维二阶张量

四维二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 是这样的一种物理量,它们有 16 个分量,其分量在洛仑兹变换下有如下的变换关系为

$$T'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda}\sum_{\tau} a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} T_{\lambda\tau} \tag{10.4.6}$$

式中 $a_{\mu\lambda}$、$a_{\nu\tau}$ 都是洛仑兹变换矩阵(10.3.5)式的变换系数。四维二阶张量可以用 4×4 阶的矩阵表示。

若 $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$,则称此张量为对称的,它有 10 个独立分量;若 $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$,则称此张量为反对称的,其对角项都为零,有 6 个独立分量;张量的对称性和反对称性是张量的固有性质,与参考系的选择无关。

总之,如果一个物理规律可以用四维时空的张量(标量、矢量、二阶矩阵等)方程来描述,它在洛仑兹变换(即四维时空中坐标旋转变换)下其形式将是不变的,那么就称这个物理规律对洛仑兹变换是协变的,因面是满足狭义相对论原理的。从以上这些结论出发,可以证明麦克斯韦方程在洛仑兹变换下具有协变性。

## 10.5 麦克斯韦方程在四维时空中的形式

### 一、四维电流密度矢量 电荷守恒方程

首先，让我们观察三维电荷守恒方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

可将上式写成

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} + \frac{\partial (\mathrm{j}c\rho)}{\partial (\mathrm{j}ct)} = 0 \tag{10.5.1}$$

由于四维时空的第四个坐标 $x_4 = \mathrm{j}ct$，因此，可以将 $\mathrm{j}c\rho$ 看成电流密度矢量的第四个分量，即

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{a}_1 J_1 + \boldsymbol{a}_2 J_2 + \boldsymbol{a}_3 J_3 + \boldsymbol{a}_4 J_4$$

其中 $J_4 = \mathrm{j}c\rho$。仿照三维纳布拉算子的定义，我们可以定义四维矢量的微分算符

$$\Box = \boldsymbol{a}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{a}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{a}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \boldsymbol{a}_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \tag{10.5.2}$$

即四维空间的纳布拉算子。则(9.5.1)式可以写成四维矢量的散度：

$$\Box \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{10.5.3}$$

四维矢量的散度可看成是两矢量的点积，因此在洛仑兹变换下是不变量。

有了以上四维矢量微分算符□，我们还很容易地就能将三维空间中梯度和旋度的定义推广到四维空间。

标量 $\varphi$ 的四维梯度为一四维矢量，即

$$\Box \varphi = \boldsymbol{a}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \boldsymbol{a}_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \boldsymbol{a}_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \boldsymbol{a}_4 \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \tag{10.5.4}$$

四维矢量 $\boldsymbol{A}$ 的四维旋度为一个二阶反对称张量，用分量表示为

$$(\Box \times A)_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial A_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\nu} \tag{10.5.5}$$

张量 $\boldsymbol{T}$ 的散度 $\Box \cdot \boldsymbol{T}$ 为一矢量，用分量表示为

$$(\Box \cdot \boldsymbol{T})_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \tag{10.5.6}$$

### 二、达朗贝尔方程 四维势矢量

在三维空间，麦克斯韦方程组可用矢量位 **A** 和标量位 $\Phi$ 表示为

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{10.5.7}$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{10.5.8}$$

并由洛仑兹规范

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{10.5.9}$$

将矢量位 **A** 和标量位 $\Phi$ 联系起来。(10.5.7)式、(10.5.8)和(10.5.9)式可以改写成

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial (\mathrm{j}ct)^2} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{10.5.10}$$

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial(\mathrm{j}ct)^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{10.5.11}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{\partial(\mathrm{j}\Phi/c)}{\partial(\mathrm{j}ct)} = 0 \tag{10.5.12}$$

展开(10.5.12)式：

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial(\mathrm{j}\Phi/c)}{\partial(\mathrm{j}ct)} = 0 \tag{10.5.13}$$

显然在四维空间中矢量位的第四个分量 $A_4 = \mathrm{j}\Phi/c$，所以上式可以写成

$$\square \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{10.5.14}$$

即洛仑兹规范在四维空间表示为矢量位的散度。

其次展开(10.5.10)式，并把下标 $x$、$y$、$z$ 改为 1、2、3，可得

$$\nabla^2 A_1 + \frac{\partial^2 A_1}{\partial(\mathrm{j}ct)^2} = -\mu_0 J_1 \tag{10.5.15}$$

$$\nabla^2 A_2 + \frac{\partial^2 A_2}{\partial(\mathrm{j}ct)^2} = -\mu_0 J_2 \tag{10.5.16}$$

$$\nabla^2 A_3 + \frac{\partial^2 A_3}{\partial(\mathrm{j}ct)^2} = -\mu_0 J_3 \tag{10.5.17}$$

对(10.5.11)式两边乘以$(\mathrm{j}/c)$，并利用 $A_4 = \mathrm{j}\Phi/c$ 和 $J_4 = \mathrm{j}c\rho$，求得

$$\nabla^2 A_4 + \frac{\partial^2 A_4}{\partial(\mathrm{j}ct)^2} = -\mu_0 J_4 \tag{10.5.18}$$

现在我们用

$$\square \cdot \square = \square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \tag{10.5.19}$$

表示四维空间的拉普拉斯算子，则(10.5.15)～(10.5.18)式可写成

$$\square^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J} \tag{10.5.20}$$

上式即为四维空间的达朗贝尔方程。由于$\square^2$ 是两个矢量的点积，在洛仑兹变换下保持不变，从而方程(10.5.20)式具有在洛仑兹变换下的协变性。

由于达朗贝尔方程在洛仑兹规范下与麦克斯韦方程组是等价的，既然(10.5.20)式在洛仑兹变换下具有协变性，也就证明了麦克斯韦方程组在洛仑兹变换下具有协变性。

### 三、电磁场的变换

方程(10.5.14)和(10.5.20)是用矢量位写出的具有协变性的麦克斯韦方程，现在我们可以利用四维矢量位 $\boldsymbol{A}$ 来考虑电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$。

在三维空间，由于我们是通过 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 得到 $\boldsymbol{B}$ 的，我们自然会想到在四维空间也许可以用同样的方法得到电场和磁感应强度。在四维空间矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的旋度是一个反对称张量，即

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{10.5.21}$$

于是，我们可以验证：

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z$$

由于 $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$，可以验证：

$$F_{14} \quad \frac{\partial A_4}{\partial x_1} \quad \frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{\mathrm{jc}}\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\mathrm{j}E_x}{c}$$

只要我们依照上述方法对 $F_{\mu\nu}$ 进行逐一验证，我们就可以发现电磁场的各分量与 $F_{\mu\nu}$ 之间存在着如下关系：

$$\boldsymbol{F} \quad \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & \frac{1}{c}E_1 \\ B_3 & 0 & B_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 \\ B_2 & B_1 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{c}E_3 \\ \frac{1}{c}E_1 & \frac{\mathrm{i}}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.5.22}$$

我们称 $\boldsymbol{F}$ 为电磁场张量。它将以前相互分离的两个物理量统一到一个物理量之中。说明它们都只是电磁场张量的不同部分。

利用电磁场张量，我们很容易地就可以将三维空间的麦克斯韦方程组写成四维形式，从而使描述电磁现象的电磁规律具有明显的协变性。

首先，反映真空中电磁规律的麦克斯韦方程组有两个描述场与源之间的电磁规律：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} \quad \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{10.5.23}$$

和

$$\nabla \times \boldsymbol{B} \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu_0 \boldsymbol{J} \tag{10.5.24}$$

我们将它们合写成一个四维形式的方程：

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \quad \mu_0 J_\mu \tag{10.5.25}$$

容易验证，当 $\mu=1$、2、3 时，上式分别是方程(10.5.24)的三个分量；而当 $\mu=4$ 时，方程(10.5.25)的左端为

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial F_{4\nu}}{\partial x_\nu} \quad \frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4}$$

$$- \frac{\mathrm{i}}{c}\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} + \frac{\partial E_4}{\partial x_4}\right) = \frac{\mathrm{i}}{c} \nabla \cdot E$$

右端为

$$\mu_0 J_4 = \mu_0(\mathrm{jc}\rho) = \frac{1}{c} \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

左、右端相等立即得方程(10.5.23)。

同样，对另一对方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{10.5.26}$$

和

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - 0 \tag{10.5.27}$$

可以合写成一个四维形式的方程：

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} \quad 0 \tag{10.5.28}$$

是一个四维三阶反对称张量，称为四维电磁场张量的旋度。上式表明四维电磁场张量的旋度

为零。容易验证，当不出现下标 1 时，应用式(10.5.22)，可以求出

$$\frac{\partial F_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{42}}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4}=0=-\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial y}+\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{j}c}\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

经整理，上式可以写成

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

这就是 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$的 $x$ 分量。与此类似，可以得到 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$的 $y$ 分量和 $z$ 分量。当不出现下标 4 时，例如，在 $\mu=2,\nu=3,\lambda=1$ 时，得到

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3}=\frac{\partial B_1}{\partial x_1}+\frac{\partial B_2}{\partial x_2}+\frac{\partial B_3}{\partial x_3}=\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

对于其它取法，例如，$\mu=1,\nu=2,\lambda=3$ 等，可得到相同的结果。

方程(10.5.25)和(10.5.28)就是四维形式的麦克斯韦方程组。

根据式(10.4.6)，电磁场张量的分量按下式变换：

$$F'_{\mu\nu}=\sum_{\lambda}\sum_{\tau}a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}F_{\lambda\tau} \tag{10.5.29}$$

应用以上变换式以及电磁场张量的表达式，很容易得到电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的变换公式。我们将只对式(10.3.5)所描述的特殊洛仑兹变换做这一工作。

作为一个例子，我们来推导式(10.5.29)的第 14 个分量。由于电磁场张量具有反对称的性质，即 $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$，从而有

$$\begin{aligned}F'_{14}&=-\mathrm{j}\frac{E'_x}{c}=\sum_{\lambda\tau}a_{1\lambda}a_{4\tau}F_{\lambda\tau}=\sum_{\lambda}a_{1\lambda}(a_{41}F_{\lambda1}+a_{44}F_{\lambda4})\\&=a_{11}(a_{41}F_{11}+a_{44}F_{14})+a_{14}(a_{41}F_{41}+a_{44}F_{44})\\&=(a_{11}a_{44}-a_{14}a_{41})F_{14}=(\gamma^2-\beta^2\gamma^2)F_{14}\\&=F_{14}=-\mathrm{j}\frac{E_x}{c}\end{aligned}$$

因此，$E'_x=E_x$。与此类似，式(10.5.29)的第 42 个分量是：

$$\begin{aligned}F'_{42}&=\mathrm{j}\frac{E'_y}{c}=\sum_{\lambda\tau}a_{4\lambda}a_{2\tau}F_{\lambda\tau}=\sum_{\lambda}a_{4\lambda}a_{22}F_{\lambda2}\\&=a_{41}F_{12}+a_{44}F_{42}=(-\mathrm{j}\beta\gamma)B_z+\gamma\left(\mathrm{j}\frac{E_y}{c}\right)\end{aligned}$$

故 $E'_y=\gamma(E_y-\beta cB_z)=\gamma(E_y-VB_z)$。继续这样推导下去，求得电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的变换公式为

$$\begin{aligned}&E'_x=E_x &&B'_x=B_x\\&E'_y=\gamma(E_y-VB_z) &&B'_y=\gamma\left(B_y+\frac{VE_z}{c^2}\right)\\&E'_z=\gamma(E_z+VB_y) &&B'_z=\gamma\left(B_z-\frac{VE_y}{c^2}\right)\end{aligned} \tag{10.5.30}$$

逆变换通过改变 $V$ 的符号即可得到，从而

$$\begin{aligned}&E_x=E'_x &&B_x=B'_x\\&E_y=\gamma(E'_y+VB'_z) &&B_y=\gamma\left(B'_y-\frac{VE'_z}{c^2}\right)\end{aligned} \tag{10.5.31}$$

$$E_z = \gamma(E'_z - VB'_y) \qquad B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{VE'_y}{c^2}\right)$$

有了以上结果，我们很容易地就能将之推广到更一般的情况。由于 $x$ 轴的取向是完全任意的，所以我们能够引入平行于($/\!/$)和垂直于($\perp$)相对平移方向的场分量，则式(10.5.30)还可以写成更紧凑的形式：

$$\begin{gathered} \boldsymbol{E}'_{/\!/} = \boldsymbol{E}_{/\!/} \qquad \boldsymbol{B}'_{/\!/} = \boldsymbol{B}_{/\!/} \\ \boldsymbol{E}'_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{E}_{\perp} + \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}_{\perp}) = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B})_{\perp} \\ \boldsymbol{B}'_{\perp} = \gamma\left(\boldsymbol{B}_{\perp} - \frac{\boldsymbol{V}}{c^2}\times\boldsymbol{E}_{\perp}\right) = \gamma\left(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{V}}{c^2}\times\boldsymbol{E}\right)_{\perp} \end{gathered} \tag{10.5.32}$$

这里我们有 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{/\!/} + \boldsymbol{E}_{\perp}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{/\!/} + \boldsymbol{B}_{\perp}$。

当 $V/c \ll 1$，即在非相对论极限下，$\gamma \approx 1$，式(10.5.32)过渡到非相对论电磁场的变化式

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{V}}{c^2}\times\boldsymbol{E} \tag{10.5.33}$$

狭义相对论的结果清楚地表明，电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 不是单独的东西独立的存在的，而电磁场张量才是基本的物理量。$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 构成了电磁场张量的分量，这既反映了电磁场的统一性，又反映出了电场和磁场在不同的惯性系之间的可转换性质。因此，在一个惯性系中为纯电场(或纯磁场)，在另一个惯性系观察则既有电场又有磁场。

**例** 匀速运动点电荷的电磁场

**解** 对于 $S'$ 坐标系来说，一个好的选择是在这个坐标系中点电荷 $q$ 是静止地处在原点，因此在 $S'$ 中只有静电场而无磁场，即

$$\boldsymbol{E}' = \frac{q\boldsymbol{r}'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \qquad \boldsymbol{B}' = 0$$

式中 $\boldsymbol{r}'$ 是 $S'$ 坐标系中场点的位置矢量，

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

设观察者所处的坐标系是 $S$，$S'$ 坐标系相对于 $S$ 系沿 $x$ 轴方向以速度 $V$ 运动，根据电磁场逆变换式(10.5.31)可得 $S$ 坐标系中的电磁场为

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} & B_x &= 0 \\ E_y &= \gamma\frac{qy'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} & B_y &= -\gamma\frac{V}{c^2}\frac{qz'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \\ E_z &= \gamma\frac{qz'}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} & B_z &= \gamma\frac{V}{c^2}\frac{qy}{4\pi\varepsilon_0 r'^3} \end{aligned}$$

设两坐标系在 $t = 0$ 时刻重合，由洛仑兹变换，有

$$x' = \gamma(x - Vt) \qquad y' = y \qquad z' = z$$

代入电场的表达式得

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{q\gamma(x - Vt)}{4\pi\varepsilon_0[\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ E_y &= \frac{q\lambda y}{4\pi\varepsilon_0[\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \\ E_z &= \frac{q\lambda z}{4\pi\varepsilon_0[\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

另外，$\boldsymbol{B}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}}{c^2}$$

如果需要，由此我们便能够求出 $\boldsymbol{B}$ 的显式分量。

这一例说明，静止的电荷只产生库仑静态电场，但是，运动的电荷由于相对论效应，并产生了磁场。

## 10.6 电磁波的狭义相对论效应

1. 相位的不变性

以平面波为例。假设在 $S$ 坐标系中观测到的均匀平面波为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

其 $x$ 分量是
$$E_x=E_{0x}\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

设在 $S'$ 坐标系（相对于 $S$ 坐标系以速度 $V$ 沿 $x$ 轴方向运动）中此均匀平面波为

$$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}'_0\cos(\omega' t'-\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}')$$

其 $x$ 分量是

$$E'_x=E'_{0x}\cos(\omega' t'-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}')$$

根据电磁场的变换关系，有

$$E'_x=E_x$$

即
$$E'_{0x}\cos(\omega' t'-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}')=E_{0x}\cos(\omega t-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}')$$

由于 $t$ 和 $\boldsymbol{r}$ 是任意的，上式成立的条件是余弦函数的振幅值和相位必须相等，因此

$$E'_{0x}=E_{0x}$$

$$\omega' t'-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'=\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} \tag{10.6.1}$$

上式表明，相位 $\varphi=\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ 在洛仑兹变换下为不变量。

2. 多普勒效应和光行差

本例所感兴趣的问题是，对于两个作相对运动的观测者，它们所观测到的波的频率同波的传播方向有何关系。假设在 $S'$ 坐标系中静止的光源 $Q'$（位于坐标系的原点）发出一球面波，可用如下表达式描述

$$\Phi'=\frac{\Phi'_0}{r'}\cos(\omega' t'-k'r')$$

其中，$r'$ 是离 $Q'$ 的距离，$\Phi'_0$ 是振幅常数，且

$$k'=\omega'/c$$

假定在 $S$ 坐标系中有一位静止的观测者处在 $xy$ 平面中的 $P$ 点，在 $S$ 坐标系中 $P$ 点的坐标是 $(x,y)$，在 $S'$ 坐标系中 $P$ 点的坐标是 $(x',y')$。$S$ 中的观测者把这个波看成是一个发源于该坐标系中点光源 $Q$（不妨设此点为 $S$ 坐标系的原点），因此用

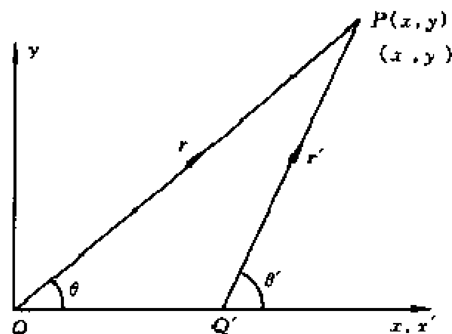


图 10.3

$$\Phi=\frac{\Phi_0}{r}\cos(\omega t-kr)$$

来表示，式中 $r$ 是离 $Q$ 的距离，$\Phi_0$ 是振幅常数，且

$$k = \omega/c$$

如图 10.3 所示，由 $Q'$ 到 $P$ 的传播方向能够用与 $x'$ 轴所构成的夹角 $\theta'$ 来表示，而 $\theta$ 则是在 $S$ 坐标系中相对应的角。由图我们可以得到

$$r' = x'\cos\theta' + y'\sin\theta' \qquad r = x\cos\theta + y\sin\theta$$

由于相位是个不变量，即

$$\omega t - kr = \omega' t' - k'r'$$

将我们在前面导出的 $k$、$k'$、$r$、$r'$ 的表达式和 $t'$ 的洛仑兹变换式代入上式，并经过整理后可以得到

$$\omega\left(\frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{c} - t\right) = \omega'\left[\frac{\gamma(x - \beta ct)\cos\theta' + y\sin\theta'}{c} - \gamma\left(t + \frac{\beta x}{c}\right)\right] \quad (10.6.2)$$

这一等式对 $x$、$y$ 和 $t$ 的所有可能值都成立，因此它们的系数必须相等。使式(10.6.2)两边 $t$ 的系数相等，得到

$$\omega = \omega'\gamma(1 + \beta\cos\theta') \quad (10.6.3)$$

上式把两个坐标系的频率联系在一起，这就是多普勒效应，表达式称为多普勒公式。另外我们可以看到，如果 $\beta \ll 1$，则 $\gamma \approx 1$，多普勒公式可简化成经典公式

$$\omega = \omega'(1 + \beta\cos\theta') \quad (10.6.4)$$

如果令式(10.6.2)中 $x$ 的系数相等，则得到

$$\omega\cos\theta = \omega'\gamma(\cos\theta' + \beta)$$

将 $\omega$ 的表达式代入上式，即可得到联系传播方向的公式

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'} \quad (10.6.5)$$

上式称为光行差公式。

## 习 题 10

10.1 证明：牛顿运动方程 $F = m\dfrac{d^2 r}{dt^2}$ 在伽利略变换下不改变形式，波动方程 $\nabla^2\Phi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$ 在伽利略变换下将改变形式。

10.2 惯性参考系 $K'$ 相对于 $K$ 系以速度 $v$ 沿 $x$ 轴正向运动，两参考系相应坐标平行，$t' = t = 0$ 时刻 $K'$ 与 $K$ 系的原点重合。

①事件 1、2 发生在 $K$ 系中的时空坐标分别为 $(x_1, y_1, z_1, t_1)$ 和 $(x_2, y_2, z_2, t_2)$，求这两个事件在 $K'$ 系中的时间间隔和空间距离。

②如果事件 1 在 $t_1 = 0$ 时刻发生在 $K$ 系的原点，事件 2 在 $t_2 = 5$ s时刻发生在 $x_2 = 4c$，$y_2 = 0$，$z_2 = 0$ 处，在 $K'$ 系看来，这两个事件发生的空间坐标相同。问 $K'$ 系相对于 $K$ 系的运动速度为多少？这两个事件在 $K'$ 系中发生的时间间隔是多少？

10.3 假设两个事件在同一参考系的不同地点同时发生，试证明：

①这两个事件之间不可能存在因果关系；

②在任何相对于该参考系作惯性运动的其它参考系看来，这两个事件的发生并不同时。

10.4 在 $K'$ 系中，物体的运动速度是 $u'$，而 $K'$ 系又相对于 $K$ 系以速度 $v$ 运动($u'$ 和 $v$ 在同一方向)，求在 $K$ 系观测到的物体运动速度。当 $u' = v = \dfrac{1}{2}c$ 时，$u$ 等于多大？

10.5　在地球上观测到中子的寿命为 $6.42\times10^2$ s，问在以速度 $2\times10^8$ m/s运动的飞船上观测到的中子的寿命是多少?

10.6　惯性参考系 $K'$ 相对于 $K$ 系以速度 $v$ 沿 $x$ 轴正向运动，在 $t'=t=0$ 时刻 $K'$ 与 $K$ 系的原点及相应的坐标重合。试推导物体的加速度在这两个参考系之间的变换关系。

10.7　在 $K$ 系上观察，电荷的运动速度为 $u$，在 $K'$ 系上观察，电荷的运动速度为 $u'$，$K'$ 系相对于 $K$ 系沿 $x$ 轴以速度 $v$ 运动。设在 $K$ 系和 $K'$ 系的电荷密度分别为

这里 $\rho_0$ 是静止式的电荷密度。

①证明：电荷密度的变换式为

$$\rho' = \frac{1-\frac{u_x v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\rho$$

②设电荷沿 $x$ 轴方向运动，试写出电荷密度变换公式的另一种形式：

$$\rho' = \frac{\rho-\frac{v}{c^2}J_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\rho$$

10.8　真空中有一点电荷 $q$ 沿 $x$ 轴正向以匀速 $v$ 运动。利用四维矢位 $\boldsymbol{A}_\mu$ 的变换公式求此电荷产生的矢位和标位。

10.9　如果在 $K$ 系中 $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{B}$，求证在一切 $\boldsymbol{K}'$ 系中 $\boldsymbol{E}'\perp\boldsymbol{B}'$。

# 附　　录

## A1　矢量运算

### 一、矢量的表示法

空间任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 可平移到直角坐标系的原点，如图 A1-1 所示。以直角坐标为例，可以用如下多种形式表示矢量 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \overrightarrow{OP} = \boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z = \{A_x, A_y, A_z\} = \boldsymbol{a}_A A \tag{A1.1}$$

$\boldsymbol{A}$ 的模为
$$A = |\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$\boldsymbol{A}$ 的方向为
$$\boldsymbol{a}_A = \left\{\frac{A_x}{A}, \frac{A_y}{A}, \frac{A_z}{A}\right\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$$

### 二、矢量的乘法

1. 标量积(点积、内积)

定义：$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (A\cos\theta)B$　(参图 A1-2)

这一定义与坐标系无关。显然，矢量的点乘积是一个标量。在直角坐标系中，易证明

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

在非直角坐标系中，只有同一场点的两个场矢量的点积才等于对应分量分别相乘之和。

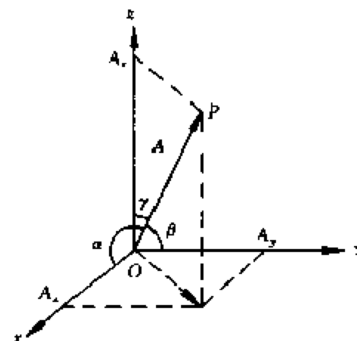


图 A1-1　空间矢量

性质：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$$

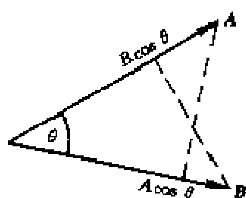
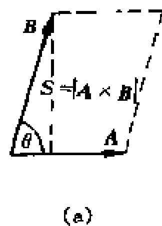
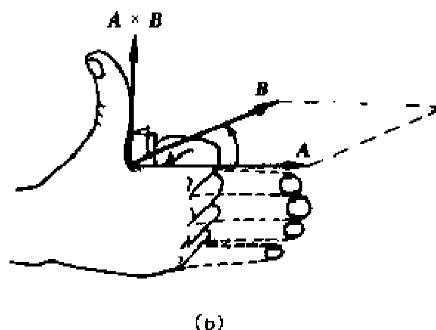


图 A1-2　两个矢量的标量积



(a)



(b)

图 A1-3　两个矢量的矢量积

2. 矢量积(叉积、外积)

定义：$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = (A\sin\theta)B$，它等于图 A1-3(a)中平行四边形的面积。叉积仍是一个矢量，其方向垂直与 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，与 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 成右旋关系，如图 A1-3(b)所示。

直角坐标下的计算公式：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

性质：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \quad \text{（矢量积不满足交换律）}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0 \quad \longleftrightarrow \quad \boldsymbol{A}/\!/\boldsymbol{B}$$

3．混合积

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{A1.2}$$

是一个标量。由于行列式换行偶数次值不变号，因而混合积具有可轮换性

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) =$$

$$-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})$$

混合积的绝对值为如图 A1-4 的平行六面体的体积。以任一面为底面计算的 $V$ 都相同，这是混合积的可轮换性的几何解释。

易知，三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 共面的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=0$

4．双重叉积

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{A1.3}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \neq (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} \quad \text{（不满足结合律）}$$

双重叉积 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 位于垂直于矢量 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ 的平面上，因而是与 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 共面的矢量，如图 A1-5 所示。

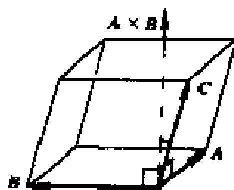



图 A1-4　矢量混合积的几何含义

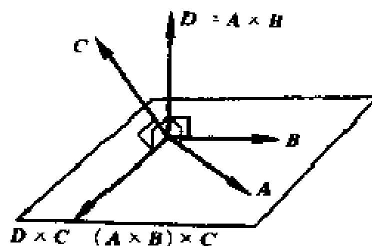



图 A1-5　双重叉积

## 三、矢性函数的微分

设空间点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 为某自变量（标量）$t$ 的函数：

$$\boldsymbol{r}(t) = x\boldsymbol{a}_x + y\boldsymbol{a}_y + z\boldsymbol{a}_z = f(t)\boldsymbol{a}_x + g(t)\boldsymbol{a}_y + h(t)\boldsymbol{a}_z$$

则 $t$ 变动时 $\boldsymbol{r}$ 的矢端形成一条矢端曲线。曲线的参数方程（曲线上任一点的直角坐标）为

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

若该矢端曲线代表某矢量场的矢线，曲线上任一点的位置矢量的矢性微分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \{f'(t)\mathrm{d}t, g'(t)\mathrm{d}t, h'(t)\mathrm{d}t\} = \{x'_t\mathrm{d}t, y'_t\mathrm{d}t, z'_t\mathrm{d}t\}$$

$$= (\boldsymbol{a}_x + y'_x\boldsymbol{a}_y + z'_x\boldsymbol{a}_z)\mathrm{d}x = (x'_y\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y + z'_y\boldsymbol{a}_z)\mathrm{d}y$$

$$= (x'_z\boldsymbol{a}_x + y'_z\boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z)\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\boldsymbol{a}_x + \mathrm{d}y\boldsymbol{a}_y + \mathrm{d}z\boldsymbol{a}_z = \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

则表示曲线上该点处的线元，其极限方向为切线的方向（指向 $t$ 增大的方向），即该点处场矢量

的方向。

易证：对于定模矢量 $\boldsymbol{r}$，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}=0$$

例如圆柱坐标系中

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_\rho}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\boldsymbol{a}_\rho=\boldsymbol{a}_\varphi\cdot\boldsymbol{a}_\rho=0$$

对于场矢量 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$，$\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z)$或 $\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)$的微分，本书中关心的是它们对空间坐标的各种偏导数的特定组合 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{A}$。

矢性函数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$的偏导数是其每个分量的偏导数的矢量和。例如

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\tag{A1.4}$$

矢性函数的全微分是其每个分量的全微分的矢量和：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x\mathrm{d}A_x+\boldsymbol{a}_y\mathrm{d}A_y+\boldsymbol{a}_z\mathrm{d}A_z\tag{A1.5}$$

而

$$\mathrm{d}A_x=\frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial A_x}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial A_x}{\partial z}\mathrm{d}z$$

同理可得 $\mathrm{d}A_y$ 与 $\mathrm{d}A_z$。

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{A}&=\left[\boldsymbol{a}_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\mathrm{d}x+\left[\boldsymbol{a}_x\frac{\partial A_x}{\partial y}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial A_y}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial A_z}{\partial y}\right]\mathrm{d}y+\\&\quad\left[\boldsymbol{a}_x\frac{\partial A_x}{\partial z}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial A_y}{\partial z}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\right]\mathrm{d}z\\&=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}\mathrm{d}z\end{aligned}\tag{A1.6}$$

## A2 重要的矢量恒等式及其证明

$$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u\tag{A2.1}$$

$$\nabla\cdot(u\boldsymbol{A})=u\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla u\tag{A2.2}$$

$$\nabla\times(u\boldsymbol{A})=u\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla u\times\boldsymbol{A}\tag{A2.3}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\tag{A2.4}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\tag{A2.5}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\nabla\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\nabla\cdot\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\tag{A2.6}$$

$$\nabla\cdot\nabla u=\nabla^2u\tag{A2.7}$$

$$\nabla\times\nabla u=0\tag{A2.8}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0\tag{A2.9}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}\tag{A2.10}$$

$$\int_\tau\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\tau=\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\tag{A2.11}$$

$$\int_S\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_C\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\tag{A2.12}$$

$$\int_{\tau} \nabla \times \boldsymbol{A} \mathrm{d}\tau = \oint_{S} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A} \mathrm{d}S \tag{A2.13}$$

$$\int_{\tau} \nabla u \mathrm{d}\tau = \oint_{S} u\boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{A2.14}$$

$$\int_{S} \boldsymbol{n} \times \nabla u \mathrm{d}S = \oint_{C} u \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{A2.15}$$

(A2.4)式和(A2.6)式中：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\nabla &= (\boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z)\cdot\left(\boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \\
(\boldsymbol{A}\cdot\nabla) u &= A_x \frac{\partial u}{\partial x} + A_y \frac{\partial u}{\partial y} + A_z \frac{\partial u}{\partial z} = \boldsymbol{A}\cdot\nabla u \\
(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} &= A_x \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z} \\
&= \boldsymbol{a}_x(\boldsymbol{A}\cdot\nabla B_x) + \boldsymbol{a}_y(\boldsymbol{A}\cdot\nabla B_y) + \boldsymbol{a}_z(\boldsymbol{A}\cdot\nabla B_z)
\end{aligned}$$

在以下的证明中，始终令 $\boldsymbol{C}$ 表示任一常矢量，故 $\nabla\cdot\boldsymbol{C}=0, \nabla\times\boldsymbol{C}=0$。(A2.13)式的证明如下：

利用(A2.5)，有

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

代入(A2.11)即散度定理，并利用矢量混合积的轮换性，有

$$\int_{\tau} \boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}\tau = \int_{\tau} \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\mathrm{d}\tau = \oint_{S}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \oint_{C} \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}S$$

交换点乘与积分(求和)的次序，得

$$\boldsymbol{C}\cdot\int_{\tau} \nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{C}\cdot\oint_{S} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}S$$

因为常矢量 $\boldsymbol{C}$ 是任意的，故必须有

$$\int_{\tau} \nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau = \oint_{S} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}S$$

式(A2.13)得证。在(A2.13)式中，当 $\tau\to 0$，可得旋度的定义式：

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\oint_{S} \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}S}{\Delta\tau} \tag{A2.16}$$

用类似的方法，将 $u\boldsymbol{C}$ 代替 $\boldsymbol{A}$ 代入散度定理(A2.11)式，可证明(A2.14)。

在(A2.14)式中，当体积 $\tau\to 0$，可得梯度的定义式：

$$\nabla u = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\oint_{S} u\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta\tau} \tag{A2.17}$$

(A2.15)的证明思路是把 $u\boldsymbol{C}$ 代替 $\boldsymbol{A}$ 代入斯托克斯定理(A2.12)。由(A2.3)式，得

$$\nabla\times(u\boldsymbol{C}) = u\nabla\times\boldsymbol{C} + \nabla u\times\boldsymbol{C} = \nabla u\times\boldsymbol{C}$$

故
$$\int_{S}[\nabla\times(u\boldsymbol{C})]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S}(\nabla u\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \int_{S}\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{n}\times\nabla u)\mathrm{d}S$$

把上式左端代入(A2.12)式得

$$\int_S [\nabla\times(u\boldsymbol{C})]\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C u\boldsymbol{C}\cdot d\boldsymbol{l} = \oint_C \boldsymbol{C}\cdot u\,d\boldsymbol{l}$$

比较上两式的右端即得到(A2.15)式：

$$\int_S \boldsymbol{n}\times\nabla u\,dS = \oint_C u\,d\boldsymbol{l}$$

## A3 亥姆霍兹定理及其证明

亥姆霍兹定理指出，一个矢量场 $\boldsymbol{F}$ 总可以表为一个无旋场 $\boldsymbol{F}_l$ 和一个无散场 $\boldsymbol{F}_t$ 之和：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_l + \boldsymbol{F}_t \tag{A3.1}$$

其中

$$\nabla\times\boldsymbol{F}_l = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \boldsymbol{F}_l = -\nabla\Phi \tag{A3.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}_t = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \boldsymbol{F}_t = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{A3.3}$$

下面我们将找出 $\boldsymbol{A}$ 和 $\Phi$ 的表达式，表明它们完全可由 $\boldsymbol{F}$ 的散度和旋度确定。

由 5.7 节知无界空间的格林函数 $G = \frac{1}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ 满足泊松方程

$$\nabla^2 G = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

及无限远条件。把上式两端乘以 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')$ 后，在所讨论的空间体积 $\tau$ 中积分，并利用(5.7.3)式和 $\delta$ 函数的对称性(5.7.5)式，得

$$\int_\tau \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\nabla^2\frac{1}{4\pi R}d\tau = -\int_\tau \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\tau = -\int_\tau \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})d\tau$$

由于积分和 $\nabla^2$ 运算是分别作用于源点和场点的，可交换次序，故上式变为

$$-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\int_\tau \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})}{R}d\tau = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$$

把 $\nabla\times\nabla\times = \nabla\nabla\cdot - \nabla^2$ 代入上式，得

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla\nabla\cdot\int_\tau \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}d\tau + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int_\tau \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}d\tau$$

由(A3.1)~(A3.3)式，知

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\int_\tau \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}d\tau \tag{A3.4}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi}\nabla\times\int_\tau \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}d\tau \tag{A3.5}$$

利用有关的矢量恒等式以及 $\nabla' = -\nabla$，还可进一步推出它们和场源的关系：

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\int_\tau \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}d\tau &= \int_\tau\left(\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}\right)d\tau = \int_\tau \boldsymbol{F}\cdot\left(\nabla\frac{1}{R}\right)d\tau = -\int_\tau \boldsymbol{F}\cdot\left(\nabla'\frac{1}{R}\right)d\tau \\
&= -\int_\tau\left(\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{F}}{R}\right)d\tau + \int_\tau\frac{1}{R}\nabla'\cdot\boldsymbol{F}d\tau \\
&= -\oint_S \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}\cdot\boldsymbol{n}dS + \int_\tau \frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}d\tau
\end{aligned} \tag{A3.6}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\int_\tau \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}d\tau &= \int_\tau\left(\nabla\times\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R}\right)d\tau = \int_\tau\left(\nabla\frac{1}{R}\right)\times\boldsymbol{F}d\tau = -\int_\tau \nabla'\left(\frac{1}{R}\right)\times\boldsymbol{F}d\tau \\
&= -\int_\tau\left(\nabla'\times\frac{\boldsymbol{F}}{R}\right)d\tau + \int_\tau\frac{1}{R}(\nabla'\times\boldsymbol{F})d\tau
\end{aligned}$$

$$= -\int_{\tau} \frac{\nabla' \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R} \mathrm{d}\tau + \oint_{S} \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{R} \times \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{A3.7}$$

于是得到

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\left[\int_{\tau} \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{F}}{4\pi R} \mathrm{d}\tau - \oint_{S} \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}}{4\pi R} \mathrm{d}S\right] + \nabla \times \left[\int_{\tau} \frac{\nabla' \times \boldsymbol{F}}{4\pi R} \mathrm{d}\tau + \oint_{S} \frac{\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{n}}{4\pi R} \mathrm{d}S\right] \tag{A3.8}$$

(A3.8)式即为亥姆霍兹定理的数学表达式。它表明:体积 $\tau$ 中的矢量场 $\boldsymbol{F}$ 可以用一个标量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 的梯度和一个矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度之和表示。此标量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 由 $\boldsymbol{F}$ 的散度和 $\boldsymbol{F}$ 在 $\tau$ 的边界面 $S$ 上的法向分量完全确定,而矢量场 $\boldsymbol{A}$ 由 $\boldsymbol{F}$ 的旋度和 $\boldsymbol{F}$ 在边界面 $S$ 上的切向分量完全确定。

根据 1.3 节和 1.4 节的论述,$\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ 表示散度源(记为 $\rho$),$\nabla \times \boldsymbol{F}$ 表示涡旋源(记为 $\boldsymbol{J}$);而 $-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ 是矢量场 $\boldsymbol{F}$ 流向闭合面 $S$ 之内的通量密度,因而相当于表面上的"散度源"(记为 $\rho_S$)。同样道理,$\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{n}$ 相当于表面上的"涡旋源"(记为 $\boldsymbol{J}_S$)。$S$ 可能是真实的物理界面,也可能只是一个数学的计算表面。它们代表的可以是真的分布在界面 $S$ 上的源(例如表面电荷、表面电流),也可能只是 $S$ 之外的场源在 $S$ 面上的等效源。

对于后一种情形,可作如下解释:我们的上述推导只限于由闭合面 $S$ 所界定的空间 $\tau$ 之内,因而相当于是切除了 $\tau$ 之外的矢线,也就是未直接计入体积 $\tau$ 之外的源。为了不影响 $\tau$ 内原来的场分布,只有在 $S$ 面上放置一些等效的"散度源"和"涡旋源",才能维持 $\tau$ 中原来的矢线分布。所放置的这些面源是外部空间的源的反映。

由上所述,(A3.8)式还可写成如下形式:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\left[\int_{\tau} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi R} \mathrm{d}\tau + \oint_{S} \frac{\rho_S(\boldsymbol{r}')}{4\pi R} \mathrm{d}S\right] + \nabla \times \left[\int_{\tau} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{4\pi R} \mathrm{d}\tau + \oint_{S} \frac{\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}')}{4\pi R} \mathrm{d}S\right] \tag{A3.9}$$

换言之,亥姆霍兹定理还可表述如下:体积 $\tau$ 中的一个矢量场的无旋部分由体积内的散度源 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 和表面上的"散度源" $\rho_S(\boldsymbol{r}')$ 唯一确定;而这个矢量场的无散部分由体积内的涡旋源 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ 和表面上的"涡旋源" $\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}')$ 唯一确定。

对于无界空间,相当于是 $\tau$ 无限膨胀,$S \to S_\infty(R \to \infty)$ 的情形。如果 $R \to \infty$ 时 $\boldsymbol{F} \to 0$,则(A3.8)式中的两个面积分会消失,于是 $\boldsymbol{F}$ 由 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{F}$ 唯一确定。即使是有界空间,由于 $-\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{n}$ 不是界面上的广义散度和旋度,便是外部空间的 $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{F}$ 的反映,故而无论在有界和无界的情况下,我们称"矢量场由它的散度和旋度唯一确定"实质上都是正确的。

## A4 贝赛尔函数

在圆柱坐标下用分离变量法求解波动方程时,会遇到贝赛尔(Bessel)方程:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right) + \left(k_z^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)R = 0$$

贝赛尔方程的标准形式为

$$x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right) + (x^2 - n^2)R = 0 \quad (x = k_z\rho) \tag{A4.1}$$

它的解为

$$R(r)=A\mathrm{J}_n(r)+B\mathrm{N}_n(r)$$

其中 $\mathrm{J}_n(r)$ 为变量 $r$ 的 $n$ 阶第一类贝赛尔函数，它由以下的无穷级数来表示：

$$\mathrm{J}_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{m!(n+m)!} \tag{A4.2}$$

$\mathrm{N}_n(r)$ 为 $n$ 阶第二类贝赛尔函数，也称诺依曼函数，它由以下无穷级数表示：

$$\mathrm{N}_n(x)=\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{x}{2}\right)\mathrm{J}_n(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2m}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}}{n!(n+m)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+m}\right)$$

其中 $\gamma=0.577\ 2$，称为欧拉常数。

第三类贝赛尔函数指 $\mathrm{J}_n(x)$ 和 $\mathrm{N}_n(x)$ 的如下线性组合，它们也称为：

第一类汉克尔函数 $\quad \mathrm{H}_n^{(1)}(x)=\mathrm{J}_n(x)+\mathrm{j}\mathrm{N}_n(x) \quad$ (A4.3)

第二类汉克尔函数 $\quad \mathrm{H}_n^{(2)}(x)=\mathrm{J}_n(x)-\mathrm{j}\mathrm{N}_n(x) \quad$ (A4.4)

当 $x$ 为虚变量(也称虚宗量)即 $x=\mathrm{j}u$ 时的贝赛尔函数称为修正贝赛尔函数(或变态贝赛尔函数)：

第一类修正贝赛尔函数 $\quad \mathrm{I}_n(u)=\mathrm{j}^n\mathrm{J}_n(-\mathrm{j}u) \quad$ (A4.5)

第二类修正贝赛尔函数 $\quad \mathrm{K}_n(u)=\frac{\pi}{2}(-\mathrm{j})^{n+1}\mathrm{H}_n^{(2)}(-\mathrm{j}u) \quad$ (A4.6)

三类贝赛尔函数通称圆柱谐波函数。第一、二类贝赛尔函数及修正贝赛尔函数的曲线如图 A4-1 所示。

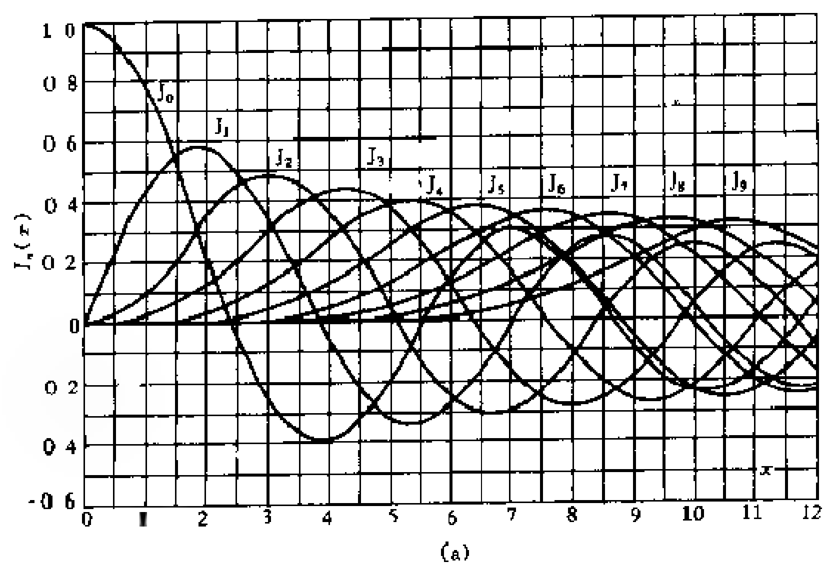
由于贝赛尔函数在物理和工程上有重要用途，除了上述曲线，还有专门的贝赛尔函数表可供查找各种阶数($n$)的贝赛尔函数值。

从公式和曲线中可知 $|\mathrm{J}_n(x)|<1$，除了 $\mathrm{J}_0(0)=1$ 之外，当 $x=0$ 时，对所有的 $n(n=1,2,\cdots)$ 都有 $\mathrm{J}_n(0)=0$；对所有的阶次 $n(n=0,1,2,\cdots)$ 都有 $\mathrm{N}_n(0)\to-\infty$。所以在包含 $x=0$ 的区域中的解式都不应含有 $\mathrm{N}_n(x)$、$\mathrm{H}_n(x)$、$\mathrm{K}_n(x)$。

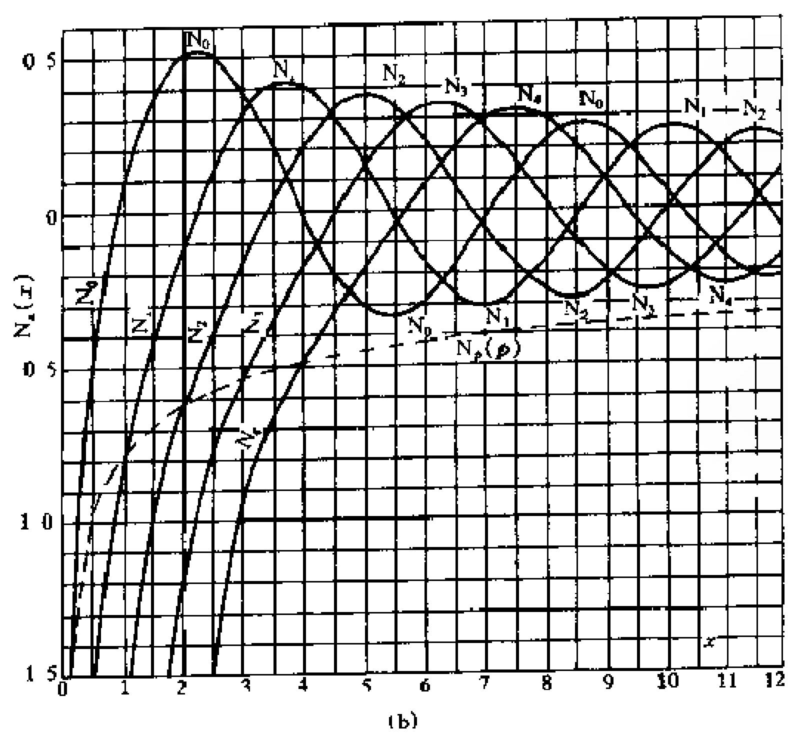
$\mathrm{J}_n(x)$ 和 $\mathrm{N}_n(x)$ 都有无穷个实根，表 A4-1 中列出了 $\mathrm{J}_0(x)$ 和 $\mathrm{J}_1(x)$ 的头几个根。

**表 A4-1 $\mathrm{J}_0(x)$ 与 $\mathrm{J}_1(x)$ 的前 8 个根**

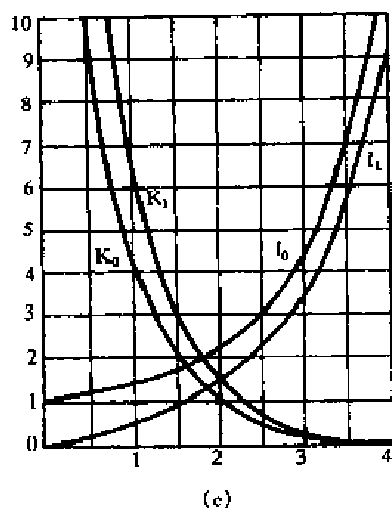
| $\mathrm{J}_0(x)=0$ 的根 | | $\mathrm{J}_1(x)=0$ 的根 | |
|---|---|---|---|
| 根的序数 | $x$ | 根的序数 | $x$ |
| 1 | 2.405 | 1 | 3.832 |
| 2 | 5.520 | 2 | 7.016 |
| 3 | 8.654 | 3 | 10.173 |
| 4 | 11.792 | 4 | 13.324 |
| 5 | 14.931 | 5 | 16.471 |
| 6 | 18.071 | 6 | 19.616 |
| 7 | 21.212 | 7 | 22.760 |
| 8 | 24.352 | 8 | 25.904 |




(a)




(b)




(c)

图 A4 1 贝赛尔函数 $J_n$、$N_n$、$I_n$、$K_n$

由于贝赛尔函数很复杂，把它们与熟悉的初等函数作出类比会有助于理解和应用。当 $x$ 很大时，各类贝赛尔函数可用下列的渐近式表示，它们都是初等函数：

$$\mathrm{J}_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \tag{A4.7}$$

$$\mathrm{N}_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \tag{A4.8}$$

$$\mathrm{H}_n^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\mathrm{j}\pi x}}\, \mathrm{j}^{-n} \mathrm{e}^{\mathrm{j}x} \tag{A4.9}$$

$$\mathrm{H}_n^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2\mathrm{j}}{\pi x}}\, \mathrm{j}^{n} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x} \tag{A4.10}$$

$$\mathrm{I}_n(u) \approx \frac{\mathrm{e}^u}{\sqrt{2\pi u}} \quad (x = \mathrm{j}u) \tag{A4.11}$$

$$\mathrm{K}_n(u) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2u}}\, \mathrm{e}^{-u} \tag{A4.12}$$

下面用 $\mathrm{Z}_n(x)$ 表示上述的任一类贝赛尔函数。$\mathrm{Z}_n(x)$ 具有如下性质：

1. 递推公式

$$\frac{2n}{x}\mathrm{Z}_n(x) = \mathrm{Z}_{n-1}(x) + \mathrm{Z}_{n+1}(x) \tag{A4.13}$$

利用该递推公式，任一阶贝赛尔函数 $\mathrm{Z}_{n+1}$ 都可由它相邻的前两阶贝赛尔函数 $\mathrm{Z}_{n-1}$、$\mathrm{Z}_n$ 求出。因此，对于整数阶的贝赛尔函数，只需知道 $Z_0(x)$ 和 $Z_1(x)$ 就足以依次求出后续各阶的贝赛尔函数值。

2. 导数公式

$$\mathrm{Z}_n'(x) = \mathrm{Z}_{n-1}(x) - \frac{n}{x}\mathrm{Z}_n(x) \tag{A4.14}$$

$$\mathrm{Z}_n'(x) = \frac{n}{x}\mathrm{Z}_n(x) - \mathrm{Z}_{n+1}(x) \tag{A4.15}$$

当 $n=0$ 时，由(A4.15)式可得

$$\mathrm{Z}_0'(x) = -\mathrm{Z}_1(x) \tag{A4.16}$$

3. 积分公式

$$\int x^{n+1}\mathrm{Z}_n(x)\mathrm{d}x = x^{n+1}\mathrm{Z}_{n+1}(x) + C \tag{A4.17}$$

$$\int x^{1-n}\mathrm{Z}_n(x)\mathrm{d}x = -x^{1-n}\mathrm{Z}_{n-1}(x) + C \tag{A4.18}$$

当 $n=0$ 和 $n=1$ 时，分别有

$$\int x\mathrm{Z}_0(x)\mathrm{d}x = x\mathrm{Z}_1(x) + C \tag{A4.19}$$

$$\int \mathrm{Z}_1(x)\mathrm{d}x = -\mathrm{Z}_0(x) + C \tag{A4.20}$$

4. 正交性

各类贝赛尔函数都是正交函数集。如果 $\alpha_{n,m}$ 和 $\alpha_{n,k}$ 为 $n$ 阶贝赛尔函数的两个根，则

$$\int_0^1 x\mathrm{Z}_n(\alpha_{n,m}x)\mathrm{Z}_n(\alpha_{n,k}x)\mathrm{d}x = 0 \quad (m \neq k) \tag{A4.21}$$

$$\int_0^1 x Z_n^2(\alpha_{n,m}x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\mathrm{J}_{n+1}(\alpha_{n,m})]^2 \tag{A4.22}$$

## A5 基本常数、量的符号和单位

### 基 本 常 数

| | |
|---|---|
| 自由空间的介电常数 | $\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$ |
| 自由空间的磁导率 | $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H/m}$ |
| 自由空间中的光速 | $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 2.9979\times10^8\,\mathrm{m/s}$ |
| 自由空间的本征阻抗 | $\eta = 376.7\,\mathrm{V/A}$ |
| 电子的电荷 | $e = 1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ |
| 电子的质量 | $m = 9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$ |
| 电子电量/电子质量(荷质比) | $1.76\times10^{11}\,\mathrm{C/kg}$ |
| 1 电子伏特能量 | $1\mathrm{eV} = 1.602\times10^{-19}\,\mathrm{J}$ |
| 质子的质量 | $m = 1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$ |
| 重力加速度 | $g = 9.807\,\mathrm{m/s^2}$ |

### 量的符号和单位

| 量 的 名 称 | 量的符号 | 单　　位 | 单位符号 |
|---|---|---|---|
| 力 | $\boldsymbol{F}$ | 牛[顿](Newton) | N |
| 力矩 | $\boldsymbol{T}$ | 牛[顿]·米 | N·m |
| 功,能[量] | $W$ | 焦[耳](Joule) | J |
| 功率 | $P$ | 瓦[特](Watt) | W |
| 电动势 | $e$ | 伏[特](Volt) | V |
| 电位 | $\Phi$ | 伏[特] | V |
| | | | |
| 电导率 | $\sigma$ | 西[门子]/米(Siemens/meter) | S/m |
| 电容率,介电常数 | $\varepsilon$ | 法[拉]/米(Farad/meter) | F/m |
| 相对电容率,相对介电常数 | $\varepsilon_r$ | (无量纲) | |
| 磁导率 | $\mu$ | 亨[利]/米(Henry/meter) | H/m |
| 相对磁导率 | $\mu_r$ | (无量纲) | — |
| | | | |
| 电场强度 | $\boldsymbol{E}$ | 伏[特]/米 | V/m |
| 电通量 | $\Psi_e$ | 库[仑](Coulomb) | C |
| 电位移,电通密度 | $\boldsymbol{D}$ | 库[仑]/米² | C/m² |
| 电极化率 | $\chi_e$ | (无量纲) | — |
| 极化强度 | $\boldsymbol{P}$ | 库[仑]/米² | C/m² |
| 电偶极矩 | $\boldsymbol{p}$ | 库[仑]·米 | C·m |
| | | | |

续上表

| 量 的 名 称 | 量的符号 | 单　　位 | 单位符号 |
| --- | --- | --- | --- |
| 磁场强度 | $\boldsymbol{H}$ | 安[培]/米(Ampere/meter) | A/m |
| 磁通量 | $\Psi_m$ | 韦[伯](Weber) | Wb |
| 磁感应强度,磁通密度 | $\boldsymbol{B}$ | 韦[伯]米$^2$　特斯拉(Tesla) | Wb/m$^2$ |
| 磁化率 | $\chi_m$ | (无量纲) | — |
| 磁化强度 | $\boldsymbol{M}$ | 安[培]/米 | A/m |
| 磁偶极矩 | $\boldsymbol{P}_m$ | 安[培]·米$^2$ | A/m$^2$ |
| 磁阻 | $R_m$ | 1/亨[利] | 1/H |
| 磁动势 | $F_m$ | 安[培] | A |
| | | | |
| 玻印廷矢量,能流密度 | $\boldsymbol{S}$ | 瓦[特]/米$^2$ | W/m$^2$ |
| 传播常数 | $\gamma$ | 1/米 | 1/m |
| 衰减常数 | $\alpha$ | 奈培/米,分贝/米 | Np/m,dB/m |
| 相移常数,波数 | $\beta$ | 弧度/米(radians/meter) | rad/m |
| 波矢量,传播矢量 | $\boldsymbol{k}$ | 弧度/米 | rad/m |
| 本质阻抗 | $\eta$ | 欧[姆](Ohm) | Ω |
| 折射率 | $n$ | (无量纲) | |
| 能量密度 | $w$ | 焦[耳]/米$^3$ | J/m$^3$ |
| 辐射强度 | $U$ | 瓦[特]/球面度(W/steradian) | W/sr |
| 辐射电阻 | $R_r$ | 欧[姆] | Ω |
| 方向性系数 | $D$ | (无量纲) | — |

# 习 题 答 案

## 习题 1

1.1 $C = \sqrt{35}$; $\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{a}_x \frac{1}{\sqrt{35}} + \boldsymbol{a}_y \frac{5}{\sqrt{35}} \quad \boldsymbol{a}_z \frac{3}{\sqrt{35}}$

1.2 $\overline{OC} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$

1.4 ②$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{a}_x 2 \quad \boldsymbol{a}_y 40 + \boldsymbol{a}_z 5$；$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{a}_x 55 - \boldsymbol{a}_y 44 \quad \boldsymbol{a}_z 11$

1.5 ①是；②$3\sqrt{26}$

1.6 $\cos\theta \quad 12/\sqrt{1078}$；$A_B = 1.37$

1.7 $\frac{25}{\sqrt{3}}$

1.9 ①$|\boldsymbol{E} \quad 0.5$；$E_x = -0.212$；②$153°38'$

1.12 $Q = \frac{1}{2}\pi h^2$

1.14 0；无关系

1.16 $4\boldsymbol{a}_x - 4\boldsymbol{a}_y + 12\boldsymbol{a}_z$；$|\nabla u| = 4\sqrt{11}$

1.17 $\boldsymbol{n} = \left(\boldsymbol{a}_x \frac{x}{a^2} \quad \boldsymbol{a}_y \frac{y}{b^2}\right) \Big/ \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{1/2}$

1.18 $\frac{24}{\sqrt{14}}$

1.19 ①抛物柱面；②$\nabla u = \quad \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y 2y$

1.20 2 V；是

1.22 ①0；②0；③是保守场，$\Phi \quad \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(y)\mathrm{d}y + \int h(z)\mathrm{d}z + C$

1.23 ①$b$；②$a$，$c$；③是无旋的

1.24 $\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$；$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$；$\nabla\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$；$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 2\rho\sin\varphi$；$\nabla\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a}_z(2x \quad 6y)$；$\nabla\cdot\boldsymbol{C} = 0$

1.27 ①$f(r) = \frac{C}{r^2}$；②$f(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$；③$n = -3$

## 习题 2

2.1 ①②$\boldsymbol{a}_E \quad \boldsymbol{a}_x \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \boldsymbol{a}_y \frac{1}{\sqrt{2}}$

2.2 ①$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{a}_z \frac{q\rho_l a z}{2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}$；②$\boldsymbol{E} = \pm\boldsymbol{a}_z \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 a}$

2.3 $Q_{1,2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 a}{b^2 q}(a^2+b^2)^{1/2}[(a^2+b^2)^{1/2}W_{1,2} \quad aW_{2,1}]$

2.5 $E_1 \quad \frac{\rho_V}{2\varepsilon}\left[\frac{b^2\boldsymbol{\rho}}{\rho^2} \quad \frac{a^2\boldsymbol{\rho}'}{\rho'^2}\right]$, $(\rho>b)$

$E_2 \quad \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\left[\boldsymbol{\rho} \quad \frac{a^2\boldsymbol{\rho}'}{\rho'^2}\right]$, $(\rho<b, \rho'>a)$

$E_3 \quad \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{C}$(空腔内)

2.6 28μJ

2.7 $\rho(z)=\varepsilon_0 E_0(\alpha A e^{\ \alpha z}+\beta B e^{\ \beta z})$；正电荷

2.8 ①$4\varepsilon_0 E_0\rho^2/a^3$，$(0<\rho<a)$；0，$(a<\rho)$；②0，$(r>0)$；场源是位于$r \quad 0$的电偶极子

2.10 ①是，$\Phi \quad x^2-xyz+c$；②不是

2.11 ①②③是，④不是

2.13 ①$\rho_{PS}=P\cos\theta$；②球内 $\Phi_i=\frac{PZ}{3\varepsilon_0}$，$\boldsymbol{E}_{in}=\ \ \frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}$；③把①②的所有结果反号

2.14 ①$\rho_P \quad -3k$，$\rho_{PS}(b)=kb$，$\rho_{PS}(a)=-ka$；

②$\rho \quad \frac{3\varepsilon k}{\varepsilon-\varepsilon_0}$；③$\Phi \quad \frac{k(b^2 \quad a^2)}{2(\varepsilon-\varepsilon_0)}+\frac{\varepsilon k(b^3-a^3)}{\varepsilon_0(\varepsilon \quad \varepsilon_0)b}$

2.15 只能求出 $z \quad 0$ 处 $\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{a}_x 2y \quad \boldsymbol{a}_y 3x+\boldsymbol{a}_z\frac{10}{3}$ 和 $\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{a}_x 6\varepsilon_0 y-\boldsymbol{a}_y 9\varepsilon_0 x+\boldsymbol{a}_z 10\varepsilon_0$

2.16 正

2.17 ①②$E=5$ kV/cm

2.18 ①$\rho=6\varepsilon_0 r^3/a^4$；②$\rho_S=2\varepsilon_0$；③$2a$；④$11a/5$

2.19 ①$E_1=0$，$(\rho\leqslant a)$，$E_2=-\boldsymbol{a}_\rho\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)A\cos\varphi+\boldsymbol{a}_\varphi\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)A\sin\varphi \quad (\rho\geqslant a)$

②导体材料，$\rho_S= \quad 2\varepsilon_0 A\cos\varphi$

2.20 ①$\theta \quad 14°$；②$\rho_{PS} \quad \pm 0.728\varepsilon_0 E_0$

2.21 ①$\rho_{PS} \quad \frac{3(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\varepsilon_0 E_0\cos\theta$

②$\boldsymbol{E}_2=\frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_0+\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)a^3E_0}{(\varepsilon+2\varepsilon_0)r^3}(\boldsymbol{a}_r 2\cos\theta \quad \boldsymbol{a}_\theta\sin\theta)$

$\lim_{r\to\infty}\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_0$

③在原题 $\Phi_1$、$\Phi_2$ 的表达式中把 $\varepsilon$ 和 $\varepsilon_0$ 换位。

2.22 $\varepsilon_r \quad 5/3$

2.23 ②和③

2.24 $\Phi=\frac{U_2 \quad U_1}{\alpha}\varphi+U_1$，$\boldsymbol{E}=-\frac{U_2 \quad U_1}{\alpha\rho}\boldsymbol{a}_\varphi$，$\rho_S=+\frac{\varepsilon_0(U_2 \quad U_1)}{\alpha\rho}$

2.25 $7.08\times10^{\ 4}$(F)

2.26 ①$\nabla^2\Phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}=0$，$\Phi \quad \frac{b \quad \rho}{b-a}U$；②$\boldsymbol{E} \quad \frac{U}{b \quad a}\boldsymbol{a}_\rho$，$\rho_l=+\frac{2\pi kU}{b \quad a}$；

③$\rho_{PS}=+\frac{U}{b \quad a}\left(\frac{k}{a}-\varepsilon_0\right)$；④$C=\frac{2\pi k}{b \quad a}$；

2.27 $C=[\varepsilon\Omega+(4\pi-\Omega)\varepsilon_0]\dfrac{r_1r_2}{r_2-r_1}$

2.28 增大

2.29 ①会；②不会

2.31 ①$a=\dfrac{b}{e}$，$E_{\min}=\dfrac{eU}{b}$；②$a=\dfrac{b}{e}$，$U_{\max}=\dfrac{b}{e}E_{\max}$

2.32 ①$\Phi=\dfrac{aU}{b-a}\left(\dfrac{b}{r}-1\right)$；②$C=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$；③$E_{\min}=\dfrac{4}{b}U$

2.33 $C=\dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{\varepsilon_1 a}-\dfrac{1}{\varepsilon_2 b}+\dfrac{1}{r_0}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2}-\dfrac{1}{\varepsilon_1}\right)}$

2.34 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{a}_r 5.56\times10^{-5}(\mathrm{N})$

2.36 ①$f=\dfrac{\varepsilon_r\varepsilon V^2(b-\varepsilon_r t)}{2(b+\varepsilon_r t)^3}$(吸引力)；②无关系

2.38 $\Phi=(\varepsilon_r+1)U/(2\varepsilon_r)$，$Q=\varepsilon_0(\varepsilon_r+1)L^2U/(2d)$，$E=(\varepsilon_r+1)U/(2\varepsilon_r d)$

2.39 $1.81\times10^{-4}\mathrm{kg}$

**习题 3**

3.1 ①$\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{a}_\varphi\dfrac{1}{2}\omega aP\sin2\theta$；②0；③$I=\pm\dfrac{1}{2}\omega aP$

3.2 10.5 A

3.3 $\Phi=-\Phi_0 z$，$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{a}_z\sigma\Phi_0$

3.4 $\rho=aJ_x$

3.5 $\boldsymbol{E}_1=\dfrac{\boldsymbol{a}_\rho V_0}{\left(\dfrac{1}{\sigma_2}\ln\dfrac{c}{b}+\dfrac{1}{\sigma_1}\ln\dfrac{b}{a}\right)\sigma_1\rho}$，$\boldsymbol{E}_2=\dfrac{\boldsymbol{a}_\rho V}{\left(\dfrac{1}{\sigma_2}\ln\dfrac{c}{b}+\dfrac{1}{\sigma_1}\ln\dfrac{b}{a}\right)\sigma_2\rho}$

$\rho_S=\dfrac{V\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\sigma_1}-\dfrac{\varepsilon_2}{\sigma_2}\right)}{\left(\dfrac{1}{\sigma_2}\ln\dfrac{c}{b}+\dfrac{1}{\sigma_1}\ln\dfrac{b}{a}\right)b}$

3.6 $R=\dfrac{1}{4\pi K\sigma_0}\ln\dfrac{R_2(R_1+K)}{R_1(R_2+K)}$

3.7 ①$R_S=\dfrac{1}{\sigma\delta}$；②$R_0=\dfrac{2\delta}{\alpha\sigma(r_2^2-r_1^2)}$，$R=\dfrac{1}{\alpha\sigma\delta}\ln\dfrac{r_2}{r_1}$，$R'=\dfrac{\alpha}{\sigma\delta\ln\dfrac{r_2}{r_1}}$

3.9 $\tau\approx35.4\ \mathrm{s}$

3.10 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_r 7.5\times10^9 r\mathrm{e}^{-9.42\times10^{11}t}$ (V/m)

$\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{a}_r\dfrac{1}{r^2}9\times10^6\mathrm{e}^{-9.42\times10^{11}t}$ (V/m)

$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{a}_r 7.5\times10^{10}\mathrm{e}^{-9.42\times10^{11}t}$ $(\mathrm{A/m^2})$

3.11 0.331 5 Ω

3.12 $R\approx\dfrac{1}{4\pi\sigma}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{d-r_1}+\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{d-r_2}\right)$

3.13 $I \approx \dfrac{\pi\sigma U d}{\ln \dfrac{D}{A}}$

3.14 $R \approx \dfrac{\ln \dfrac{2h}{a}}{2\pi\sigma L}$

**习题 4**

4.1 $\mu_0 I^2(\boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y)/4\pi a$

4.3 $\boldsymbol{a}_x q v \mu_0 I(b - a)/4ab$

4.4 $B_z = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi ab}(a + b + \sqrt{a^2 + b^2})$

4.5 ①$\boldsymbol{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \omega B \rho \boldsymbol{a}_\rho$；②$Q_{PS} = 2\pi(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \omega B a^2 L$

4.6 ①$B_z = \mu_0 N I b^2 \Big/ \left(b^2 + \dfrac{d^2}{4}\right)^{3/2}$；③$d = b$

4.7 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_x \dfrac{\mu_0 N I}{2L}\left[\dfrac{L - x}{\sqrt{(L - x)^2 + a^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right]$（$x$ 为从螺线管的一端算起的距离）

4.8 $B = \dfrac{\mu_0 \pi J_S}{4}$

4.9 $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 J}{2}\boldsymbol{a}_z \times \left(\dfrac{b^2 \boldsymbol{\rho}}{\rho^2} - \dfrac{a^2 \boldsymbol{\rho}'}{\rho'^2}\right)$ $(\rho > b)$

$\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 J}{2}\boldsymbol{a}_z \times \left(\boldsymbol{\rho} - \dfrac{a^2 \boldsymbol{\rho}'}{\rho'^2}\right)$ $(\rho < b\ ,\ \rho' > a)$

$\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 J}{2}\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{C}$ $(\rho' < a)$

4.12 ①不是；②是，$\boldsymbol{J} = \dfrac{2k}{\mu_0}\boldsymbol{a}_z$；③是，$\boldsymbol{J} = \dfrac{2A}{\mu_0}\boldsymbol{a}_z$

4.13 $\boldsymbol{J} = \begin{cases} 0 & (0 < \rho < a) \\ \boldsymbol{a}_z \dfrac{I}{\pi(b^2 - a^2)} & (a \leqslant \rho \leqslant b) \\ 0 & (b < \rho) \end{cases}$

4.14 $A = 0$

4.16 ①$\dfrac{1}{2} q a^2 \omega$；②$\dfrac{4}{3}\rho_S \omega \pi a^4$

4.17 ①$\boldsymbol{H} = \begin{cases} \dfrac{I\rho}{2\pi a^2}\boldsymbol{a}_\varphi \\ \dfrac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\varphi \end{cases}$ $\boldsymbol{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu I \rho}{2\pi a^2}\boldsymbol{a}_\varphi & (\rho \leqslant a) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{a}_\varphi & (\rho > a) \end{cases}$

换为铜导线后 $\boldsymbol{H}$ 不变，导线内 $\boldsymbol{B}$ 减小为 $\mu_0 \boldsymbol{H}$；

②$\boldsymbol{M} = (\mu_r - 1)\boldsymbol{H} = \dfrac{999 I\rho}{2\pi a^2}\boldsymbol{a}_\varphi$，$\boldsymbol{J}_m = (\mu_r - 1)\nabla \times H = (\mu_r - 1)\dfrac{I}{\pi a^2}\boldsymbol{a}_z$，$(\rho \leqslant a)$

③$\boldsymbol{J}_{mS} = (\mu_r - 1)H(a)\boldsymbol{a}_z = \dfrac{999 I}{2\pi a}\boldsymbol{a}_z$

4.18 铁杆内 $H=8\times10^5$ A/m，$B=5\,000$ T，$M=\dfrac{4\,999}{\mu_0}$ A/m

铁盘内 $H=\dfrac{B_0}{5\,000\mu_0}=159$ A/m，$B=1$ T，$M=\dfrac{4\,999}{5\,000\mu_0}$ A/m

4.19 正值

4.20 ①$H_2=9.8\times10^5$ A/m，$\theta_2\approx1.6'$；②$J_{mS}=6.8\times10^5$ A/m

4.21 ①$J_m=0$，$J_{mS}=\boldsymbol{a}_\varphi M\sin\theta$；

②$\rho_{mS}=M\cos\theta$，$\boldsymbol{H}_i=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{M}(r\leqslant a)$，$\boldsymbol{H}_o=\dfrac{M\tau}{4\pi r^3}(\boldsymbol{a}_r2\cos\theta+\boldsymbol{a}_\theta\sin\theta)$

$(\tau=\dfrac{4}{3}\pi a^3)$

4.22 $J_m=0$，$J_{mS}=\boldsymbol{a}_\varphi(Aa^2\cos^2\theta\sin\theta+B\sin\theta)$，

$\rho_m=-2Az\quad(r<a)$，$\rho_{mS}=Aa^2\cos^3\theta+B\cos\theta$

4.23 $L=\mu_0n^2LS=1.42\times10^{-4}$H

4.24 ①$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{a}_z\dfrac{u_0I}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a},(\rho<a)$；$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{a}_z\dfrac{u_0I}{2\pi}\ln\dfrac{b}{\rho},(a\leqslant\rho\leqslant b)$；$\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{0},(\rho>b)$；

②$L_o=\dfrac{u_0I}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

4.25 ①$L=2.343$(H)；②$L=0.944$(H)

4.27 $M=36(\mu\text{H})$

4.28 $w_m/w_e=9\times10^{16}$

4.31 $W_m=\dfrac{\mu_0I^2}{16\pi}+\dfrac{\mu_0I^2}{4\pi}\ln\dfrac{b}{a}$，$L=\dfrac{\mu_0}{8\pi}+\dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$，$L_{内}=\dfrac{\mu_0}{8\pi}$

4.32 $\dfrac{1}{2}(\mu-\mu_0)n^2I^2S$

4.35 $\boldsymbol{f}=-\dfrac{\mu_0I^2}{8\pi^2a^2}\boldsymbol{a}_\rho$，$F=-\dfrac{\mu_0lI^2}{4\pi a}$（负号表示向着圆柱内）

**习题 5**

5.1 $\Phi=\displaystyle\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\dfrac{4U_0\sinh\dfrac{n\pi}{a}y}{n\pi\sinh\dfrac{n\pi}{a}b}\sin\dfrac{n\pi}{a}x$

5.2 $\Phi=U_0\dfrac{y}{b}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2U_0}{(n\pi)^2}\dfrac{b}{d}\sin\dfrac{n\pi}{b}d\sin\dfrac{n\pi}{b}y\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{d}x}$

5.3 $\Phi_1=\dfrac{q_1}{\varepsilon_0\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi d}{a}\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{a}x}\sin\dfrac{n\pi}{a}y\quad(x>0)$

$\Phi_2=\dfrac{q_1}{\varepsilon_0\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi d}{a}\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{a}x}\sin\dfrac{n\pi}{a}y\quad(x<0)$

5.4 $\Phi=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi x'}{a}\sin\dfrac{n\pi x}{a}}{n\sinh\dfrac{n\pi b}{a}}\times\begin{cases}\sinh\dfrac{n\pi}{a}(b-y')\sinh\dfrac{n\pi y}{a} & (y\leqslant y')\\ \sinh\dfrac{n\pi}{a}y'\sinh\dfrac{n\pi}{a}(b-y) & (y\geqslant y')\end{cases}$

5.5 $\Phi = \frac{4\varphi_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n\cosh\frac{n\pi}{b}a}\cosh\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi}{b}y)$

5.6 $\Phi = \frac{\varphi_0}{a}y + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi_0}{n\pi}e^{-\frac{2n\pi}{a}x}\sin\frac{2n\pi}{a}y)$

5.7 $\Phi = -E_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\cos\varphi$ , $\boldsymbol{E} = E_0\cos\varphi\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\boldsymbol{a}_r - E_0\sin\varphi\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\boldsymbol{a}_\varphi$

5.8 $\Phi_1 = -E_0 r\cos\varphi + \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}a^2\frac{E_0}{r}\cos\varphi \quad (r\geqslant a)$

$\Phi_2 = -\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0 r\cos\varphi \quad (r\leqslant a)$

5.9 $\Phi_1 = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^n - \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\right]\cos n\varphi - \ln r_0\right\} \quad (r\leqslant a)$ ;

$\Phi_2 = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^n - \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n\right]\cos n\varphi - \ln r_0\right\} \quad (a\leqslant r\leqslant r_0)$ ;

$\Phi_3 = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^n - \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n\right]\cos n\varphi - \ln r\right\} \quad (r\geqslant r_0)$ ;

5.10 $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\varphi_0}{n\pi}\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\beta}}\sin\frac{n\pi}{\beta}\varphi \quad (n = 1,3,5,\cdots)$

5.11 $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\varphi_0}{n\pi}\frac{r^{\frac{n\pi}{\beta}} - a^{\frac{2n\pi}{\beta}}r^{-\frac{n\pi}{\beta}}}{b^{\frac{n\pi}{\beta}} - a^{\frac{2n\pi}{\beta}}b^{-\frac{n\pi}{\beta}}}\sin\frac{n\pi}{\beta}\varphi \quad (n = 1,3,5,\cdots)$

5.12 $\Phi_1 = \frac{4\varphi_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n\sin n\varphi,\ r\leqslant a \quad (n = 1,3,5,\cdots)$

$\Phi_2 = \frac{4\varphi_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{r}\right)^n\sin n\varphi,\ r\geqslant a \quad (n = 1,3,5,\cdots)$

5.13 $\Phi = -\frac{2\varepsilon_2 b^2 E_0}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)b^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)a^2}(r - a^2 r^{-1})\cos\varphi \quad (a\leqslant r\leqslant b)$

$\Phi_2 = -\left[1 - \frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)b^2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)b^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)a^2}b^2 r^{-2}\right]E_0 r\cos\varphi \quad (r\geqslant b)$

5.14 $\Phi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\varphi_0}{p_{0m}J_1(p_{0m})}J_0\left(\frac{p_{0m}}{a}r\right)e^{-\frac{p_{0m}}{a}z} \quad (r\leqslant a)$

5.15 ① $\Phi = -E_0 r\cos\theta + \frac{U_0 a}{r} + \frac{a^3}{r}E_0\cos\theta$ ;

② $\Phi = -E_0 r\cos\theta + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{a^3}{r}E_0\cos\theta$

5.16 $\Phi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0 r\cos\theta$ , $\boldsymbol{E}_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0\boldsymbol{a}_z \quad (r\leqslant a)$

$\Phi_2 = -E_0\cos\theta + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}a^3E_0\frac{1}{r^2}\cos\theta \quad (r\geqslant a)$

$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{a}_r\left[1+\frac{2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\frac{a^3}{r^3}\right]E_0\cos\theta - \boldsymbol{a}_\theta\left(1-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\frac{a^3}{r^3}\right)E_0\sin\theta$

5.17 $\Phi_1 = \varphi_0\left(1+\frac{z}{a}\right) \quad (r\leqslant a)$ ; $\Phi_2 = \varphi_0\left(\frac{a}{r}+\frac{a^2}{r^2}\cos\theta\right) \quad (r\geqslant a)$

5.19 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_z \dfrac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon} E_0$， $\rho_S = \dfrac{3\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{1 + 2\varepsilon_r} E_0 \cos\theta$

5.20 $\dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}$

5.21 $2.88 \times 10^9$ eV

5.24 $\boldsymbol{E} = \dfrac{V_0}{\pi} \dfrac{1}{x^2 + y^2}(y\boldsymbol{a}_x - x\boldsymbol{a}_y)$

5.25 $\Phi(r,\varphi) = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{4 + r^4 + 4r^2 \sin 2\varphi}{4 + r^4 - 4r^2 \sin 2\varphi}$

5.26 $\Phi(x,y) = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{\sin^2 x \cosh^2 y + (\cos x \sinh y + \sinh y)^2}{\sin^2 x \cosh^2 y + (\cos x \sinh y - \sinh y)^2}$

5.27 $\Phi(x,y) = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{e^{2x} + 2e^x \sin y + 1}{e^{2x} - 2e^x \sin y + 1}$

5.28 $$\Phi(r,\varphi) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + r - 2\sqrt{r(x_0^2 + y_0^2)}\cos\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\arctan\frac{y_0}{x_0}\right)}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + r - 2\sqrt{r(x_0^2 + y_0^2)}\cos\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\arctan\frac{y_0}{x_0}\right)}$$

$$\rho_S = -\frac{\lambda}{2\pi} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}(r + a)}$$

5.30 $$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_S U(\theta,\varphi) \frac{a^2 - r^2}{4\pi a(r^2 + a^2 - 2ra\cos\gamma)^{3/2}} \mathrm{d}S = \frac{a}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} U(\theta,\varphi) \frac{(a^2 - r^2)\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi}{(r^2 + a^2 - 2ra\cos\gamma)^{3/2}}$$

5.32 $G = \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{a}{hr_1} - \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{a}{hr_3}\right)$

**习题 6**

6.1 ① $e = -\dfrac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \lambda e^{-\lambda t} \ln(1 + \dfrac{a}{d})$；

② $e = \dfrac{\mu_0 I_0 b}{2\pi}\left[\left(\dfrac{v}{d + vt} - \dfrac{v}{d + a + vt}\right)\cos\omega t + \left(\ln\dfrac{d + a + vt}{d + vt}\right)\omega \sin\omega t\right]$

6.2 $i = -1.75\omega \sin\omega t(1 + 2\cos\omega t)$ (mA)

6.3 ① $\dfrac{l}{\sigma ab}$； ② $vB_0 l$； ③ $\sigma abvB_0$； ④ $5\,\Omega$； $8.25 \times 10^{-4}$ V； $1.65 \times 10^{-4}$ A

6.6 $I_d = 7.82 \times 10^{-12}$ C

6.7 $i_d = -\dfrac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{b}{a}} \omega U_m \cos\omega t$

6.8 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_\varphi \dfrac{\mu R U_m}{2d}(\sigma\sin\omega t + \varepsilon\omega\cos\omega t)$

6.14 $\beta = 17.32\pi = 54.41$ (rad/m)

$\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{a}_z 0.133 \times 10^{-3}\cos(10\pi x)\sin(6\pi \times 10^9 t - 54.41z)$
$\quad - \boldsymbol{a}_x 0.229 \times 10^{-3}\sin(10\pi x)\cos(6\pi \times 10^9 t - 54.41z)$

6.15 $\beta = 13.2\pi = 41.6$ (rad/m)

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\boldsymbol{a}_x 496\cos(15\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}41.6z} + \boldsymbol{a}_z 565\sin(15\pi x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}41.6z}$$

6.16 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_\varphi \dfrac{kE_0}{\omega\mu_0 r}\sin\theta\cos(\omega t - kr)$, $k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$

6.17 ①$3.17\times10^{13}$；②$9.75\times10^{-10}$；③1.125；④铜：$\nabla\times\boldsymbol{H} = 5.7\times10^7\boldsymbol{E}$；海水：$\nabla\times\boldsymbol{H} = \mathrm{j}(4.506-\mathrm{j}4)\boldsymbol{E}$

6.18 ②$\rho_S = 0$，$\boldsymbol{J}_S = \boldsymbol{a}_y \dfrac{\pi E_0}{\omega\mu_0 a}\sin(\omega t - k_x x)$；

③$\boldsymbol{J}_d = -\boldsymbol{a}_y\omega\varepsilon_0 E_0 \sin\dfrac{\pi}{d}z\sin(\omega t - k_x x)$

6.19 $\boldsymbol{S}(z,t) = -\boldsymbol{a}_z \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\sin 2kz\sin 2\omega t$，$\boldsymbol{S}_{均} = 0$，没有能量沿 $z$ 轴流动；

$\boldsymbol{S}(z,t)|_{z=n\frac{\lambda}{4}} = 0$，$\boldsymbol{S}(z,t)|_{z=(2n+1)\frac{\lambda}{8}} = \pm\boldsymbol{a}_z \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\sin 2\omega t$，$\boldsymbol{S}$ 的振幅最大。

6.20 $\boldsymbol{S}(z,t) = \boldsymbol{a}_x \dfrac{E_0^2}{\eta}\sin\theta\cos^2\beta_z z\cos^2(\omega t - \beta_x x) + \boldsymbol{a}_z \dfrac{E_0^2}{4\eta}\cos\theta\ \sin(2\beta_z z)\sin 2(\omega t - \beta_x x)$；

$\boldsymbol{S}_{均} = \boldsymbol{a}_x \dfrac{E_0^2}{2\eta}\sin\theta\cos^2\beta_z z$

**习题 7**

7.1 $f = 100$ kHz时，$\lambda = 5(\mathrm{m})$，$\alpha = 0.4\pi(\mathrm{NP/m})$，$\beta = 0.4\pi(\mathrm{rad/m})$，
$\eta = 0.1\pi(1+\mathrm{j})(\Omega)$；
$f = 100$ MHz时，$\lambda = 0.15(\mathrm{m})$，$\alpha = 11.96\pi(\mathrm{NP/m})$，$\beta = 13.4\pi(\mathrm{rad/m})$，
$\eta = \dfrac{42}{\sqrt{1-\mathrm{j}8.9}}(\Omega)$；
$f = 100$ GHz时，$\lambda = 0.33(\mathrm{mm})$，$\alpha = \dfrac{80}{3}\pi(\mathrm{NP/m})$，$\beta = 6\pi\times10^3(\mathrm{rad/m})$，
$\eta = \dfrac{40\pi}{3}\ (\Omega)$；

7.5 $|E_m^-| = 33.3$；$|E_{m2}^+| = 66.7$

7.6 0.03 m；1%

7.7 $\mu_r = 2$；$\varepsilon_r = 18$

7.8 $1.16\times10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}$

7.10 $ab\left[\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\theta_i} - \dfrac{\tan^2\theta_i}{\varepsilon_r}}\right]$

7.11 $\dfrac{\mathrm{Im}(E_{r0})}{\mathrm{Re}(E_{r0})} = \dfrac{2R_S^2}{2R_S^2 - \eta_1^2} \approx -2\left(\dfrac{R_S}{\eta_1}\right)^2$

7.13 $E_0 = 5.7\times10^{-4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}(\mathrm{V/m})$，，$P_L = 10^{-4}\mathrm{W/m^2}$

7.15 平行极化：$E_{r0} = 0$，$E_{t0} = 0.577$；垂直极化：$E_{r0} = -0.5$，$E_{t0} = 0.5$

7.16 $|R| = \dfrac{1+\delta-\sqrt{1-2\delta\tan^2\theta_i}}{1+\delta+\sqrt{1-2\delta\tan^2\theta_i}}$

7.18　(1)$\theta_t$ 为小于 90°；(2)$\theta_{max}=14.4°$

7.19　(1)$\theta_t=\pi/4$；(2)$R=0.35+j0.364$，$S_{avr}=0.255$

**习题 8**

8.5　①$\lambda_c=2\pi/k_c=3\sqrt{2}$ cm，$\lambda_z=2\pi/\beta=3\sqrt{2}$ cm；②$a=9$ cm，$b=6$ cm

8.6　$a\geqslant6$ cm，$b\leqslant4$ cm(例如 $a=6.5$ cm，$b=3.5$ cm)

8.7　①$\lambda=16$ cm时不能传输任何模式

$\lambda=8$ cm时传输 $TE_{10}$模

$\lambda=6.5$ cm时传输 $TE_{10}$、$TE_{20}$、$TE_{01}$模

②$2.187\leqslant f\leqslant3.959$(GHz)

8.8　$\sqrt{2}a<\lambda<2a$

8.9　①$\beta=158$ rad/m，$\eta_{TE_{10}}=499\ \Omega$

②$\beta=349$ rad/m，$\eta_{TE_{10}}=201\ \Omega$

③$\alpha=89$ NP/m，$\eta_{TE_{10}}=j443.5\ \Omega$，$Z\approx0.01$ m

8.10　降低工作频率或改变尺寸可使之重新谐振于 $TE_{101}$模

8.11　$a\leqslant5.34\ \mu$m

**习题 9**

9.1　954.93 km，0.9549 m

9.2　$258e^{-j26.7°}\Omega$

9.3　①$E_r=0$，$E_\theta=14.3\sin(2\pi\times10^6t)$　(V/m)；

$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{a}_r0.114\cos(2\pi\times10^6t)$　(W/m²)；$S_{平均}=0$

②$P_{r平均}\approx0.44$ W

9.4　$1.1\times10^4$W；$1.1\times10^{-3}\Omega$

9.5　1.2 Ω

9.7　73 Ω；1.64

9.8　$1.48\times10^{-17}$W；$1.48\times10^{-15}\ \Omega$

9.9　2.67 A；130 W

9.10　90°

9.11　$4.57\lambda$，$5.44\lambda$

9.12　$40\pi^2I_0^2\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$　(W)；

9.13　$\boldsymbol{a}_r0.5\times10^{-3}$ W/m²

**习题 10**

10.2　①$\Delta\tau'=\left[\frac{(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]$

$$\Delta l'=\sqrt{\frac{[(x_2-x_1)-v(t_2-t_1)]^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

②$v=\frac{4}{5}c$，$\Delta\tau'=3$ s

10.4　0.83c

10.5　$8.61\times10^2$ s

10.6　$a'_x=\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}{(1-\frac{v_x v}{c^2})^3}a_x$，　$a'_y=\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})}{(1-\frac{v_x v}{c^2})^2}\left(a_y+\frac{vu_y a_x}{c^2-u_x v}\right)$，

$$a'_z=\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})}{(1-\frac{v_x v}{c^2})^2}\left(a_z+\frac{vu_z a_x}{c^2-u_x v}\right)$$

10.8　$A_x=\frac{vq}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2+(1-\frac{v^2}{c^2})(y^2+z^2)}}$，$A_y=A_z=0$，

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2+(1-\frac{v^2}{c^2})(y^2+z^2)}}$$

# 参 考 文 献

[1] 谢处方，饶克谨．电磁场与电磁波．北京：高等教育出版社，1987
[2] Roald k.wangsness.Electromagnetic Fields. John Wiley &Sons，1979
[3] H A Haus，J R Melcher.Electromagnetic Fields and Energy. 江家麟，钱秀英，王瑞禹，马西奎译．冯慈璋校．北京：高等教育出版社，1992
[4] 周省三．电磁场基本教程．北京：高等教育出版社，1995
[5] 符果行．工程电磁场理论方法．北京：人民邮电出版社，1991
[6] G E Hay.Vector and Tensor Analysis.Dover Publications，Inc.，1953
[7] 张三慧，臧庚媛，华基美．电磁学．北京：清华大学出版社，1994
[8] 林德云，李国定．电磁场理论基础．北京：清华大学出版社，1994
[9] 符果行．电磁场中的格林函数法．北京：高等教育出版社，1993
[10] 林为干，符果行，邬林若，等．电磁场理论．北京：人民邮电出版社，1996
[11] 王长清，祝西里．电磁场计算中的时域有限差分法．北京：北京大学出版社，1994
[12] [德] 瓦·杨森．鲍贤杰译．波导与带状线．北京：国防工业出版社，1981
[13] 吕善伟．微波工程基础．北京：北京航空航天大学出版社，1995
[14] 黄志洵，王晓金．微波传输线理论与实用技术．北京：科学出版社，1996
[15] 吴重庆．光波导理论．北京：清华大学出版社，2000
[16] 赵梓森．单模光纤通信系统原理．北京：人民邮电出版社，1991
[17] 谢树艺．矢量分析与场论．北京：高等教育出版社，1997
[18] 刘鹏程．电磁场解析方法．北京：电子工业出版社，1995
[19] 赵家陞．邓亲俊，等．电磁场与电磁波习题集．成都：电子科技大学，1987
[20] 余恒清，全泽松，电磁波理论解题指南．成都：电子科技大学出版社，1995
[21] 楼仁海．工程电磁理论．北京：国防工业出版社，1981
[22] 冯慈璋．电磁场．北京：高等教育出版社，1994
[23] J.A. 斯特莱顿著．何国瑜译．电磁理论．北京：北京航空学院出版社，1986
[24] 杨儒贵，陈达章，刘鹏程．电磁理论．西安：西安交通大学出版社，1991
[25] 马信山，张济世，王平．电磁场基础．北京：清华大学出版社，1995
[26] 全泽松．电磁场理论．成都：电子科技大学出版社，1995
[27] 赵凯华，陈熙谋．电磁学．北京：人民教育出版社，1978
[28] 刘鹏程．工程电磁场简明手册．北京：高等教育出版社，1991
[29] 徐永斌，何国瑜，卢才成，等．工程电磁场基础．北京：北京航空航天大学出版社，1992
[30] 李斌颖．天线原理与应用．兰州：兰州大学出版社，1993
[31] 王朴中，石长生，天线原理．北京：清华大学出版社，1993